

ОСОБЕННОСТИ РАСЧЕТА НЕСЖИМАЕМЫХ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ В ПАКЕТЕ ПРОГРАММ ЛОГОС

Д. П. Рубцова, М. А. Сизова, С. В. Лашкин, А. С. Козелков

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», г. Саров Нижегородской обл.

На сегодняшний день развитие высокотехнологичных промышленных комплексов и систем невозможно представить без применения суперкомпьютерных технологий. С целью проверки и оптимизации выбранных технических решений не всегда возможно проведение реальных испытаний в необходимом объеме. Поэтому создание программных продуктов в условиях высокопроизводительных технологий приобретает особую актуальность.

В настоящее время в РФЯЦ-ВНИИЭФ в городе Сарове ведется разработка отечественного пакета программ ЛОГОС, ориентированного на решение важных прикладных задач промышленности. Данный пакет программ осуществляет решение связанных и сопряженных трехмерных задач тепломассопереноса и гидродинамики на параллельных ЭВМ.

Все практически важные течения являются турбулентными. Для учета турбулентности в инженерных приложениях используются уравнения Навье – Стокса, осредненные по Рейнольдсу и замыкаемые моделями турбулентности семейства RANS (Reynolds averaged Navier – Stokes), k - ε модель, k - ω модели, k - ω (SST модель сдвиговых напряжений Ментера) [1–3], модель Спаларта – Аллмараса (SA модель).

Исторически данная модель турбулентности была сконструирована специально для аэрокосмических приложений и применялась для расчета обтекания многоэлементных крыловых профилей [4].

Одним из важнейших классов задач является гидродинамика вязкой несжимаемой жидкости, которая характерна для многих процессов, например, определение аэродинамических характеристик автомобиля. Однако вопрос о применении модели Спаларта – Аллмараса к расчету такого рода турбулентных течений остается недостаточно изученным.

Поэтому появляется необходимость реализации модели Спаларта – Аллмараса для расчета задач внешнего и конвективного теплообмена при течении вязкой несжимаемой жидкости в пакете программ ЛОГОС. Тем самым расширяется вычислительная способность данного программного продукта, в котором уже реализованы другие модели турбулентности семейства RANS. И с целью проверки правильности реализованной SA модели необходимо провести расчеты на примере известных тестовых задач, обтекания пластины [5] и обратного уступа с подогреваемой стенкой [6] и сравнение с экспериментальными данными и расчетами по другим моделям.

Нестационарные трехмерные турбулентные течения вязкого теплопроводного газа описываются системой уравнений Навье – Стокса, осредненных по Рейнольдсу [1–3, 7, 8] которая в консервативной форме имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{u}) = 0; \\ \frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{u} \vec{u}) = -\nabla p + \nabla(\tau_\mu + \tau_t); \\ \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{u} H) = \nabla[\vec{u} \tau + (\vec{q}_\mu + \vec{q}_t)]. \end{cases} \quad (1)$$

В системе уравнений (1) используются общепринятые обозначения: ρ – плотность, \vec{u} – вектор скорости осредненного течения с компонентами u, v, w , p – давление, $E = C_v T + 0,5(u^2 + v^2 + w^2)$ – полная энергия газа, $H = C_p T + 0,5(u^2 + v^2 + w^2)$ – полная энтальпия газа, τ_μ и τ_t – молекулярная и турбулентная составляющие тензора касательных напряжений соответственно, q_μ и q_t – молекулярная и турбулентная составляющие вектора плотности теплового потока соответственно, T – температура, $C_v = (C_p - R/m)$ – удельная теплоемкость при постоянном объеме, C_p – удельная теплоемкость при постоянном давлении, R – универсальная газовая постоянная, m – молярная масса газа.

В случае несжимаемых течений, т. е. течений сред с постоянной плотностью, система уравнений (1) несколько упрощается и принимает вид (2)

$$\begin{cases} \nabla \vec{u} = 0; \\ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \nabla(\vec{u} \vec{u}) = -\nabla p + \nabla(\tau_\mu + \tau_t); \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \nabla(\vec{u} T) = \lambda(T) \nabla^2 T + \frac{\mu}{2\rho c_p} [\nabla \vec{u}]^2. \end{cases} \quad (2)$$

Системы уравнений (1) и (2) представляют собой математическое выражение трех основных законов механики сплошной среды – закона сохранения массы, количества движения и энергии.

Для определения турбулентной вязкости используется совокупность полуэмпирических моделей турбулентности. В инженерной практике наиболее распространенными являются модели RANS.

В пакете программ ЛОГОС для расчета несжимаемых течений реализован широко используемый для данного класса задач метод SIMPLE [7, 9–11], в котором уравнения массопереноса расщепляются по физическим процессам, записываются в дивергентном виде и аппроксимируются неявной разностной схемой относительно искомым переменных.

Всю методику численного решения уравнений Навье – Стокса для SIMPLE-подобных алгоритмов можно представить в виде следующих этапов:

1. Решение уравнения количества движения для вычисления промежуточного поля скоростей.

Значения скорости определяются в два этапа, сначала вычисляется аппроксимация u^* величины u^{n+1} , которая не удовлетворяет уравнению неразрывности.

2. Решение уравнения Пуассона для давления. Определяют поправку к давлению δp из формулы

$$u^{n+1} = u^* - \Delta t \nabla (\delta p^{n+1}). \quad (3)$$

При помощи этой поправки определяются новые значения давления по формуле

$$p^{n+1} = p^n + \delta p^{n+1} \quad (4)$$

и поправка скорости u' .

3. Корректировка поля скоростей по формуле (3).

С учетом этой поправки скорость на $(n + 1)$ слое вычисляется по формуле

$$u^{n+1} = u' + u^*. \quad (5)$$

При решении уравнения Пуассона для давления скорость на $(n + 1)$ слое удовлетворяет уравнению неразрывности.

4. Расчет температуры и турбулентной вязкости.

Решение систем линейных алгебраических уравнений основано на использовании решателей библиотеки PMLP, являющейся собственной разработкой ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ» [13].

Модель Спаларта – Аллмараса (SA) была предложена в 1992 году [14] и, благодаря своей простоте и достаточно высокой точности при расчете аэродинамических течений, быстро стала одной из наиболее популярных моделей турбулентности.

Данная модель относится к классу низкорейнольдсовых. Первоначально она была введена для получения более качественных расчетных оценок для двумерных смешанных течений, следов и пограничного слоя на плоской пластине. Опыт применения на протяжении последних десятилетий показал достоинство этой модели при расчете потоков с неблагоприятными градиентами давления по сравнению с k - ϵ и k - ω моделями [7, 8].

В модели Спаларта – Аллмараса рассматривается единственное уравнение переноса, записанное

относительно модифицированной кинематической турбулентной вязкости $\tilde{\nu}$

$$\frac{\partial \rho \tilde{\nu}}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j \tilde{\nu}}{\partial x_j} = \frac{1}{\sigma} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \rho \tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right] + c_{b2} \rho \left(\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} \right)^2 \right\} + P^v - D^v. \quad (6)$$

В уравнении (6) генерационный и диссипативный члены P^v и D^v являются источниковыми членами и определяются следующим образом:

$$D^v = \left(c_{w1} f_w - \frac{c_{b1}}{\kappa^2} f_{t2} \right) \left(\frac{\tilde{\nu}}{d} \right)^2, \quad (7)$$

$$P^v = c_{b1} \rho \tilde{S} \tilde{\nu} - c_{b1} \rho f_{t2} \tilde{S} \tilde{\nu},$$

где d – ближайшее расстояние до твердой стенки, κ – постоянная Кармана.

Определим формулы для других параметров, участвующих в уравнении (6):

$$\tilde{S} = \Omega + f_{v2} \frac{\tilde{\nu}}{\kappa^2 d^2}, \quad (8)$$

здесь величина Ω представляет собой модуль тензора завихренности

$$\Omega = (2\Omega_{ij}\Omega_{ij})^{1/2}, \quad \Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right); \quad (9)$$

$$f_w = g \left(\frac{1 + C_{w3}^6}{g^6 + C_{w3}^6} \right)^{1/6}; \quad (10)$$

$$g = r + C_{w2} (r^6 - r); \quad (11)$$

$$r = \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{S} \kappa^2 d^2}; \quad (12)$$

$$C_{w1} = \frac{c_{b1}}{\kappa^2} + \frac{(1 + c_{b1})}{\sigma}. \quad (13)$$

Функция f_{t2} обеспечивает подавление численного перехода от ламинарного режима в пограничном слое к турбулентному и определяется выражением

$$f_{t2} = C_{t3} \exp(-C_{t4} \chi^2). \quad (14)$$

Эмпирические константы модели

$$\sigma = \frac{2}{3}, \quad \kappa = 0,41, \quad c_{b1} = 0,1355, \quad c_{b2} = 0,622,$$

$$C_{w2} = 0,3, \quad C_{w3} = 2, \quad C_{v1} = 7,1, \quad C_{t3} = 1,2, \quad C_{t4} = 0,5.$$

Для постановки граничных условий для турбулентности рассматривают общую структуру пограничного слоя. В пограничном слое обычно выделяют несколько характерных подобластей: внутренняя

(область закона стенки) и внешняя. Внутренняя область включает вязкий подслой, переходную область и область логарифмического профиля скоростей. В вязком подслое поток является практически ламинарным и вязкие напряжения доминируют над турбулентными, логарифмический подслой – это развитый пограничный слой, где турбулентные пульсации велики, а молекулярная вязкость несущественна. В вязком подслое касательное напряжение на стенке, которое является граничным условием для уравнения движения в пристеночной ячейке, определяется по следующей формуле:

$$\tau_{wall} = \frac{\mu U_t}{y}, \quad (15)$$

где μ – молекулярная вязкость, U_t – величина касательной скорости в центре пристеночной ячейки, y – расстояние от центра ячейки до стенки.

Также рассматривается динамическая скорость

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_{wall}}{\rho}}, \quad \text{безразмерное расстояние от центра}$$

$$\text{ячейки до стенки } y^+ = \frac{\rho u_\tau y}{\mu} \quad [3].$$

Модель Спаларта – Аллмараса применяется во всей расчетной области, в т. ч. вблизи твердых стенок, на поверхностях которых в качестве граничного условия полагают значение $\tilde{v} = 0$. В этом случае вблизи твердых поверхностей требуется такая расчетная сетка, которая обеспечивает достаточно большое число элементов внутри пограничного слоя, в т. ч. внутри вязкого подслоя. Разрешение сетки должно быть таким, чтобы y^+ был порядка единицы.

Для адаптации внедренной модели Спаларта – Аллмараса, а также для проверки правильности реализации модели были проведены тестовые расчеты.

Рассматривается задача моделирования течения вязкого несжимаемого нетеплопроводного газа вдоль поверхности пластины.

Для расчета используется блочно-структурированная сетка, состоящая из шестигранников, содержащая порядка 34 тыс. ячеек (рис. 2). Модель представляет собой пластину длиной $L = 1$ м и толщиной $h/2 = 0,05$ мм с закруглением на носике (рис. 1).

Течение газа считается турбулентным.

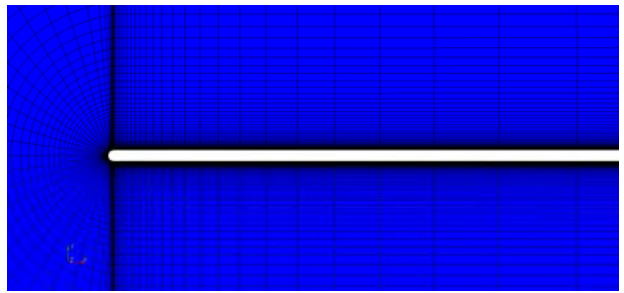
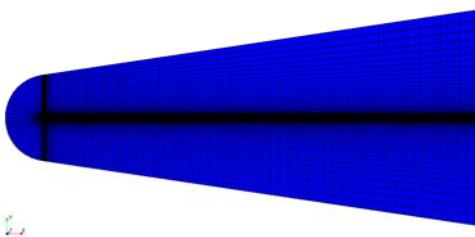


Рис. 2. Геометрия расчетной области (пластина крупно)

Используем следующие характеристики среды:

– плотность $\rho = 1,214187$ кг/м³,

– молекулярная вязкость $\mu = 1,85 \cdot 10^{-5}$ кг/м · с.

В табл. 1 приведены значения начальных условий.

Т а б л и ц а 1

Начальные условия

Величина	Значение
Интенсивность турбулентности I	0,01 м ² /с ²
Длина зоны перемешивания L	10 ⁻³ м ² /с ³
Начальная скорость потока U	(34,18058, 0, 0) м/с

Одним из важнейших показателей является коэффициент трения

$$C_f = \frac{2\tau_w}{\rho u^2}. \quad (16)$$

На рис. 3 и 4 представлены результаты расчета коэффициента поверхностного трения на пластине, где показано сравнение SA модели с экспериментальными данными и результатами расчетов, полученными по другим моделями турбулентности, реализованными в комплексе программ ЛОГОС:

– $k-\omega$ (SST) модель Ментера в рамках «низкорейнольдсового» приближения (sst-low),

– $k-\omega$ (SST) с автоматическим определением зоны пограничного слоя (sst-all),

– $k-\epsilon$ модель для низких чисел Рейнольдса (ke-low).

Используемые модели турбулентности соответствуют построенной расчетной сетке y^+ порядка 1.

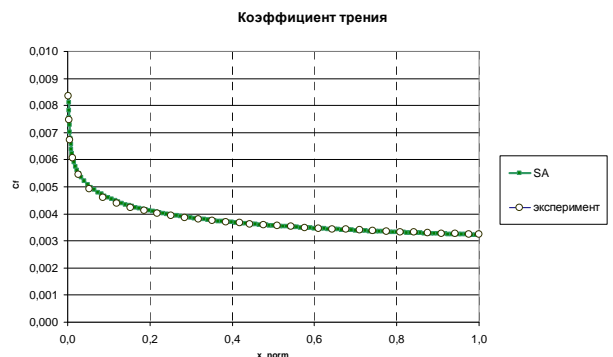


Рис. 3. Коэффициент трения вдоль поверхности пластины

Рис. 1. Геометрия расчетной области (вся область)

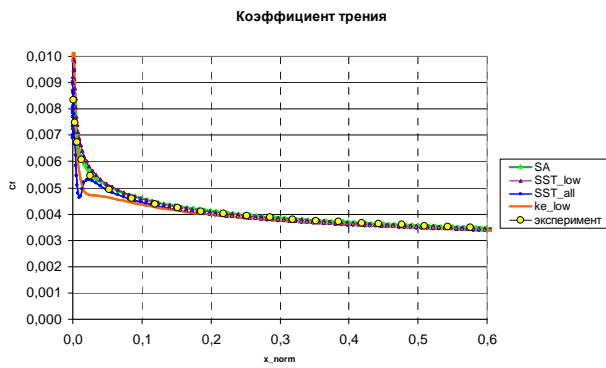


Рис. 4. Коэффициент трения

На основании проведенного анализа полученных результатов по распределению коэффициента трения можно сделать вывод, что результаты по SA модели отклоняются от эксперимента не более чем на 1,2 %, а с результатами, полученными по SST-low модели, практически совпадают. Сравнение графиков позволяет говорить о хорошем согласовании расчетных и экспериментальных данных.

$$\text{Величина безразмерной скорости } u^+ = \frac{u}{u_\tau} \quad [8]$$

в пристеночной области определяется следующими выражениями:

$$\text{при } 0 \leq \log(y^+) \leq 1: u^+ = y^+;$$

$$\text{при } 1 \leq \log(y^+) \leq 3: u^+ = 2,44 \ln y^+ + 4,90.$$

На графике (рис. 5) показана зависимость безразмерной скорости u^+ в пристеночной области от величины y^+ в сравнении с аналитическим решением [8]. Данный рисунок демонстрирует достаточно хорошее согласование с приведенными аналитическими зависимостями, отличие не превышает 5 %.

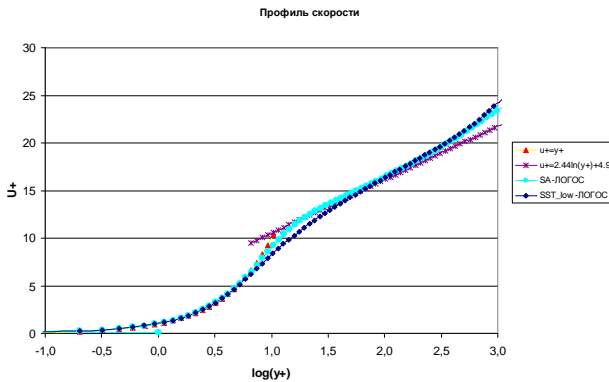


Рис. 5. Профиль скорости в турбулентном течении вдоль пластины

В вязком подслое наблюдается идеальное наложение расчетов по SA модели и модели SST-low, это объясняется тем, что выполняется «закон стенки», согласно которому профили скоростей во внутренней области пограничного слоя оказываются универсальными, т. е. нечувствительными к изменению внешних условий. В переходной области есть не-

большое отклонение, в связи с сильным изменением слагаемых, описывающих турбулентный перенос вблизи стенки, и отсутствием общего подхода к моделированию турбулентности в переходной области, центр пристеночной ячейки располагается либо в вязком подслое (низкорейнольдсовые модели турбулентности, y^+ порядка 1), либо в области логарифмического профиля скорости (высокорейнольдсовые модели турбулентности, $30 < y^+ < 100$).

На рис. 6–8 представлены поля распределения скорости, давления, турбулентной вязкости для установившегося течения около пластины.

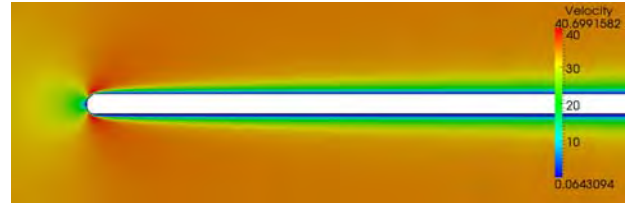


Рис. 6. Поле распределения скорости



Рис. 7. Поле распределения давления

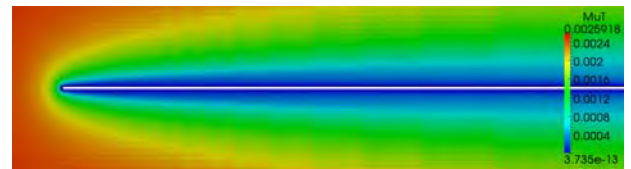


Рис. 8. Поле распределения турбулентной вязкости

Сравнение графиков (рис. 3–5) позволяет говорить о хорошем согласовании расчетных данных и экспериментальных.

В качестве показательного теста для оценки эффективных вычислительных способностей модели было выбрано течение в канале с обратным уступом, которое изучалось в экспериментах [14–16].

Для расчетов используется блочно-структурированная сетка (рис. 9). Общее число ячеек составляет 56790. Течение газа считается турбулентным.



Рис. 9. Сеточная модель, уступ

Для расчета используются следующие характеристики среды:

- плотность $\rho = 1 \text{ кг/м}^3$,
- молекулярная вязкость $\mu = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ кг/м} \cdot \text{с}$,

- коэффициент теплопроводности $1,5 \cdot 10^{-5}$ Вт/м·К,
- теплоемкость при постоянном давлении 0,7 Дж/кг·К.

Для данной задачи интенсивность турбулентности и длину перемешивания вычислим по формулам

$$I = \sqrt{\frac{2k}{3V_x^2}}; \quad (17)$$

$$L = \frac{C_\mu^{3/4} k^{3/2}}{\varepsilon_\infty}, \quad (18)$$

где $k = 0,078$, $\varepsilon = 0,18$, $C_\mu = 0,09$, $V_x = 11$.

В табл. 2 приведены начальные условия.

Таблица 2

Начальные данные

Величина	Значение
Статическая температура T	293 К
Интенсивность турбулентности I	0,207305 м ² /с ²
Длина зоны перемешивания L	0,0198862 м ² /с ³
Начальная скорость потока U	(11, 0, 0) м/с

На рис. 10, 11 показаны поля распределения скорости и давления, полученные в расчете по пакету ЛОГОС.

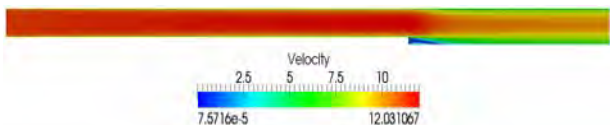


Рис. 10. Поле распределения скорости

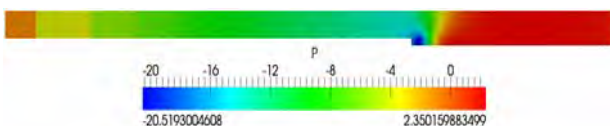


Рис. 11. Поле распределения давления

С целью количественной проверки полученных результатов рассчитывалось число Стантона:

$$St(x) = \frac{\alpha(x)}{\rho C_p}, \quad \text{где } \alpha(x) = \frac{\dot{q}}{T_W(x) - T_B} = \frac{270}{T_W(x) - 293}$$

локальный коэффициент теплоотдачи; T_B – температура потока, \dot{q} – тепловой поток на подогреваемой стенке, C_p – теплоемкость при постоянном давлении, $T_W(x)$ – температура на стенке, полученная в результате расчетов.

На графике (рис. 12) показана зависимость $St(x)$ от x_norm , где $x_norm = \frac{x - x_{min}}{x_{max} - x_{min}}$. Приво-

дится сравнение расчета по ЛОГОС с экспериментальными данными и данными, рассчитанными по коммерческому пакету.

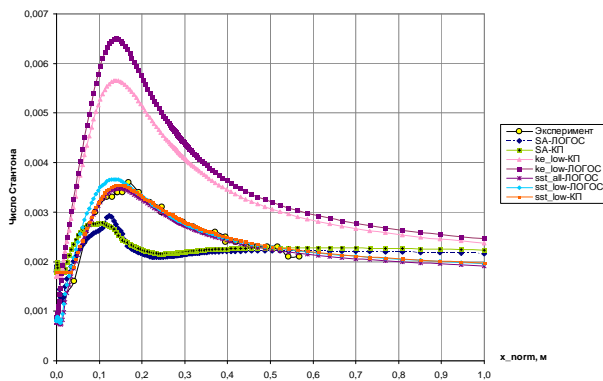


Рис. 12. Число Стантона, рассчитанное для уступа

Также важной характеристикой является коэффициент трения C_f вдоль нижней стенки канала, рассчитанный по формуле (16). Результаты расчетов проиллюстрированы на графиках (рис. 13, 14) в сравнении с другими моделями турбулентности, уже реализованными в пакете программ ЛОГОС, и экспериментальными данными [3].

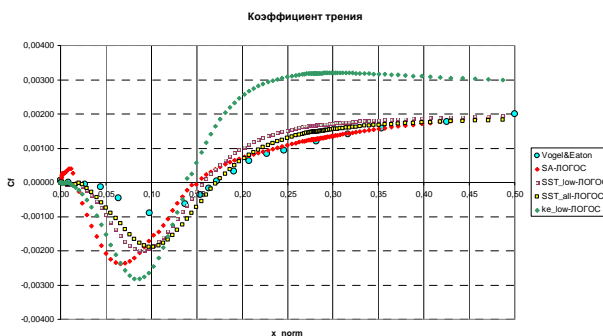


Рис. 13. Коэффициент трения вдоль нижней стенки канала

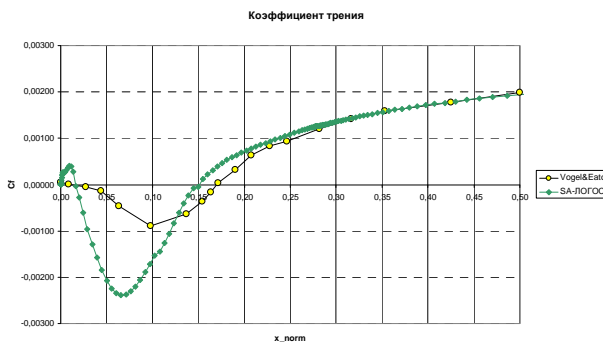


Рис. 14. Коэффициент трения для SA модели

На основании проведенного анализа полученных результатов по числу Стантона и распределению коэффициента трения (рис. 12–14) можно сделать вывод, что имеется качественное согласование с экспериментальными данными, но присутствует неболь-

шая количественная разница, которая наблюдается в расчетах по коммерческому пакету (КП) для других моделей турбулентности, реализованных в программном комплексе ЛОГОС.

Отклонение расположения точки присоединения от эксперимента составляет 4,5 %. Результаты, приведенные на графиках по распределению коэффициента трения, свидетельствуют о том, что модель SA завышает интенсивность возвратного течения в отрывной зоне и в то же время предсказывает восстановление параметров пограничного слоя вниз по потоку от точки присоединения более согласованно с экспериментом, чем другие модели турбулентности.

Возникающая несогласованность подтверждает преобладающее мнение о том, что все известные RANS модели не обеспечивают приемлемой для практики точности расчета течений с протяженными отрывными зонами [17].

На основании проведенного анализа полученных результатов можно сделать вывод, что модель турбулентности Спаларта – Аллмараса, основанная на уравнении переноса турбулентной вязкости, обладает достаточной вычислительной эффективностью

Но для того, чтобы расширить представление о поведении модели турбулентности Спаларта – Аллмараса, так как ее использование в расчетах задач внешнего теплообмена при течении вязкой несжимаемой жидкости до настоящего времени остается недостаточно хорошо изученным, в дальнейшем требуется провести более подробный анализ данной модели на более широком классе задач.

Литература

1. Волков К. Н., Емельянов В. Н. Моделирование крупных вихрей в расчетах турбулентных течений. М.: Физматлит, 2008.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц В. М. Гидродинамика. М.: Наука, 1988.
3. Снегирев А. Ю. Высокопроизводительные вычисления в технической физике. Численное моделирование турбулентных течений: Учеб. пособие. СПб.: Изд-во политехн. ун-та, 2009.
4. Bardina J. E., Caelum Research Corporation,

Moffett Field, California, P. G. Huang, University of Kentucky, Lexington, Kentucky, T. J. Coakley, Ames Research Center, Moffett Field, California, Turbulence Modeling Validation, Testing, and Development, Ames Research Center, Moffett Field, California 94035-1000

5. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974.
6. Vogel J. C., Eaton J. K. Combined Heat Transfer and Fluid Dynamic Measurements Downstream of a Backward-Facing Step // Journal of Heat Transfer. 1985. Vol. 107. P. 922–929.
7. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей в двух томах. М.: Мир, 1991.
8. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1973.
9. Швыдкий В. С., Ярошенко Ю. Г. Механика жидкости и газа.: М.: ИКЦ «Академкнига», 2003.
10. Ferziger J. H., Peric M. Computational Method for Fluid Dynamics. Springer-Verlag, New York, 2002.
11. Jasak Hrvoj. Error analysis and Estimation for the Finite Volume Method with Applications to Fluid Flows. 1996.
12. Артемьев А. Ю., Бартенев Ю. Г., Басалов В. Г. и др. Реализованные методы решения разреженных линейных систем в библиотеке линейной алгебры // ВАНТ. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2002. Вып. 2.
13. Spalart P. R., Allmaras S. R. A One Equation Turbulence Model for Aerodynamic Flows. AIAAPaper, 92–439. 1992.
14. Driver D. M., Seegmiller H. L. Features of a Reattachment Turbulent Shear Layer in Divergent Channel Flow AIAA Journal. 1985. V. 23. N 2. P. 163.
15. Jovic S., Driver D. M. Backward – Facing Step Measment at Low Reynolds Number, Re = 5000 // NA Technical Memorandum N 1008807. 1994
16. Jovic S., Driver D. M. Reynolds Number Effect on Skin Friction in Separated Flow Behind a Backw Facing Step // Submitted to exp. of fluids. 1993.
17. Стрелец М. Х., Травин А. К., Шур М. Л. Применение метода моделирования отсоединенных вихрей для расчета гидродинамики и теплообмена в отрывных потоках // Труды третьей российской национальной конференции по теплообмену. М.: Изд-во МЭИ, 2002. Т. 2. С. 273–276.