ОСОБЕННОСТИ ПОСТРОЕНИЯ ТРИАНГУЛЯЦИОННЫХ СЕТОК НА ПОВЕРХНОСТЯХ В АНАЛИТИЧЕСКОМ И ФАСЕТОЧНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

А. Н. Лукичев, Т. В. Цалко, Д. М. Панкратов, Д. В. Логинов, А. И. Белова, Е. О. Моськина

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», г. Саров Нижегородской обл.

Введение

В наше время в России, как и во всем мире, активно развиваются технологии компьютерного моделирования. Одна из задач, с которой часто сталкиваются при решении данного вопроса – дискретизация поверхностей трехмерного тела, то есть описание поверхности тела множеством простейших элементов. В этом докладе рассматриваются некоторые проблемы, связанные с особенностями представления геометрии моделируемых тел, с которыми придется столкнуться при решении данной задачи, на примере построения поверхностных триангуляционных сеток. Однако аналогичные проблемы ожидают и при построении других типов сеток, использующих геометрическую модель тела.

Поверхностные триангуляционные сетки

Поверхностная триангуляционная сетка – это дискретное представление поверхности трехмерного тела с помощью набора связанных треугольников. Говоря о триангуляционной сетке, будем предполагать наличие дополнительных требований со стороны методики моделирования и генераторов объемных сеток:

– триангуляционная сетка должна полностью описывать поверхность тела с заданной точностью. Отклонение от геометрии больше заданной точности может негативно повлиять на достоверность расчетов;

– размер элементов должен соответствовать заданным пользователем параметрам;

– качество треугольников определяется соотношением длин сторон. При построении сетки требуется увеличивать минимальный угол всех треугольников сетки. Равносторонний треугольник обладает максимальным качеством;

– соотношение площадей соседних треугольников не должно превышать заданного порога.

– недопустимо наличие пересечений, наложений, вырожденных элементов;

– недопустимо наличие «дыр» (треугольников, не имеющих соседей по одному или нескольким ребрам), если этого не предусматривает геометрия.

В рамках данного доклада мы не будем рассматривать сложные случаи с различными параметрами, предполагая, что размер элемента – один на всю геометрию, а показатели качества и соотношение площадей – по возможности наиболее оптимальные.

Задача построения триангуляционной сетки существует уже давно, и существует множество алгоритмов построения оптимальной по тем или иным критериям триангуляции на плоскости, однако, построение оптимальной триангуляции трехмерных поверхностей в общем случае является нетривиальной задачей [1]. Будем предполагать задачу генерации 2D сетки решенной и сосредоточимся на проблемах получения качественной трехмерной поверхностной сетки.

Для описания геометрии моделируемого тела используются различные варианты представления. Рассмотрим наиболее популярные.

Аналитические поверхности

Аналитическое представление геометрии описывает тело с помощью математических формул и структур данных, представляющих вершины, ребра и грани геометрии. Чаще всего в качестве аналитического представления геометрии используется т. н. BREP [2] представление.

В BREP (или B-rep) представлении трехмерное тело описывается набором замкнутых оболочек, разделяющих пространство на внешнее пространство и внутреннее по отношению к рассматриваемому предмету. Каждая оболочка состоит из набора граней. Грань – это поверхность, ограниченная набором ребер. Ребро – это кривая на поверхности или в пространстве, ограниченная двумя вершинами.

Поверхности и кривые при аналитическом представлении описываются с помощью математических формул. Чаще всего используется параметрический способ задания.

При параметрическом способе задания поверхность описывается в виде:

$$S = S(u,v), u,v \in \Omega\,, \qquad (1)$$

где $S = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ – точка поверхности, Ω – область определения параметров, чаще всего – прямоугольная область $\left[u_{\min}, v_{\min}, u_{\max}, v_{\max}\right]$, u,v – координаты точки в этой области.

Каждой точке из области определения параметров соответствует точка на трехмерной поверхности. Таким образом, можно говорить о преобразовании двухмерной области в 3D, и $S(u,v)$ является функцией преобразования.

При использовании данного представления геометрии очевидным алгоритмом построения трехмерной сетки является построение 2D сетки в области определения параметров и использование функции преобразования для получения трехмерных координат узлов сетки. Но проблемы построения поверхностных сеток заключаются в некоторых важных особенностях параметрического представления поверхностей:

- Преобразование $S(u,v)$ не гарантирует сохранение углов, пропорций, и, как следствие, может приводить к сильным искажениям любых фигур, построенных на плоскости.
- Обратное преобразование, восстанавливающее 2D координаты в параметрической области произвольной точки поверхности, в общем случае не является однозначным. Это значит, что одной точке поверхности может соответствовать несколько координат (u,v) в области определения параметров. Более того, в ряде случаев точке на поверхности будет соответствовать бесконечное множество точек на отрезке области определения параметров.

Далее рассмотрим основные проблемы, возникающие из-за данных особенностей и варианты их решения, используемые при генерации поверхностных сеток: искажение размеров, перекрытие, самопересечения, несогласованное разбиение границ, вырожденные элементы и совпадающие вершины.

Искажение размеров

Первая и наиболее важная проблема – искажение размеров при переходе на 3D поверхность. Представим ситуацию, когда мы имеем параметризацию сферы. Рассмотрим наиболее часто встречающийся случай описания сферы одной поверхностью и ребром, проходящим от одного полюса к другому (рис. 1).

Параметрическое уравнение сферы:

$$\begin{cases} x = x_0 + R \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi \\ y = y_0 + R \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi \\ z = z_0 + R \cdot \cos\theta \end{cases}, \qquad (2)$$

где $\theta \in [0,\pi]$ и $\varphi \in [0,2\pi]$.

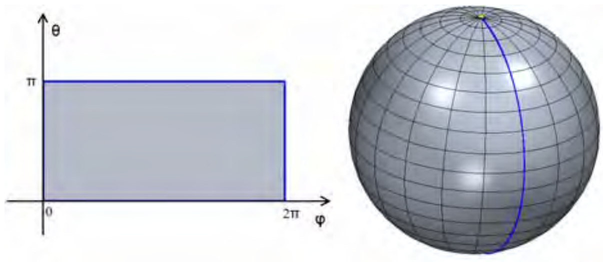


Рис. 1. Сферическая поверхность в аналитическом представлении

Таким образом, область определения параметров представляет собой прямоугольник со следующими свойствами:

– отрезки $\theta = 0, \varphi \in [0,2\pi]$ и $\theta = \pi, \varphi \in [0,2\pi]$ соответствуют двум точкам – полюсам сферы;

– отрезки $\theta \in [0,\pi], \varphi = 0$ и $\theta \in [0,\pi], \varphi = 2\pi$ соответствуют одному отрезку на поверхности сферы, соединяющему полюса.

Представим, что мы, используя простейший алгоритм построения сетки в 2D области, строим равномерную сетку с фиксированным размером. При переводе результата в 3D мы увидим, что равномерный размер элементов в области определения параметров превратится в постепенное сгущение элементов к полюсам.

Для корректного распределения размеров элементов при построении сетки в 2D области используется метрический тензор или метрика, позволяющая при выборе положения новых точек в области определения параметров вычислять реальное расстояние до соседних точек в 3D. На рис. 2 изображена сетка, построенная с использованием метрического тензора.

Также метрический тензор используется для построения сетки с неравномерным распределением размеров элементов – когда требуется получить специфичные размеры элементов в тех или иных областях поверхности.

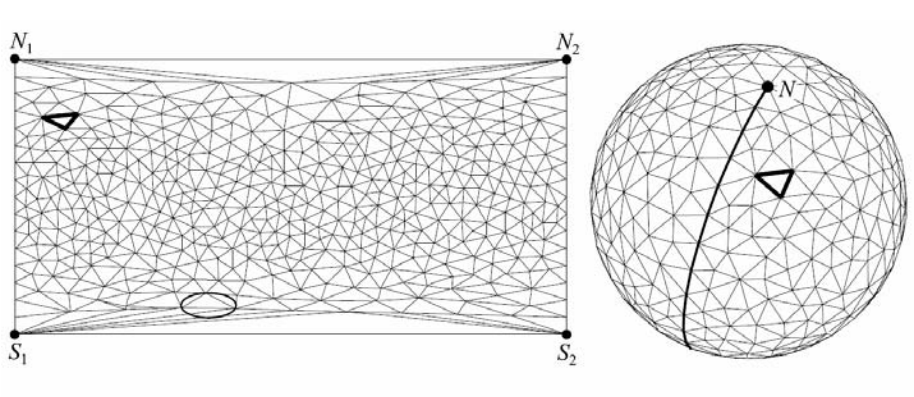


Рис. 2. Сетка, построенная с использованием метрического тензора

Перекрытия

Поскольку преобразование $S(u,v)$ не является аффинным, некоторые элементы сетки при переходе в 3D могут оказаться вывернутыми. Особенно это касается элементов, близких к вырожденным элементам (рис. 3).

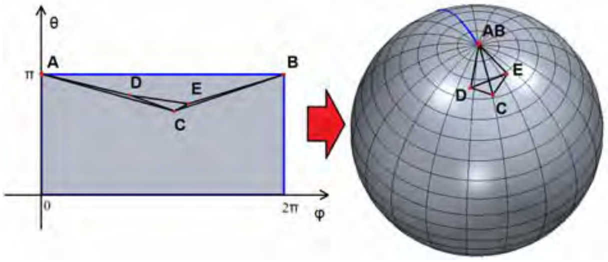


Рис. 3. Появление перекрытий при переходе от параметрической области к трехмерной поверхности

Во избежание подобных случаев используется дополнительный контроль расстояния и направления нормалей при генерации сетки. Кроме того, используется контроль качества, чтобы не допускать появления подобных элементов. В ряде случаев используется дополнительная обработка сетки и перекрытия исправляются уже после построения.

Самопересечения

Самопересечения поверхностной сетки возникают, когда две криволинейные поверхности находятся на достаточно близком расстоянии друг от друга. В качестве примера рассмотрим тонкостенный цилиндр, на котором были заданы достаточно крупные размеры элементов на боковых поверхностях (рис. 4). В результате построения, сетки на боковых поверхностях стали пересекаться.

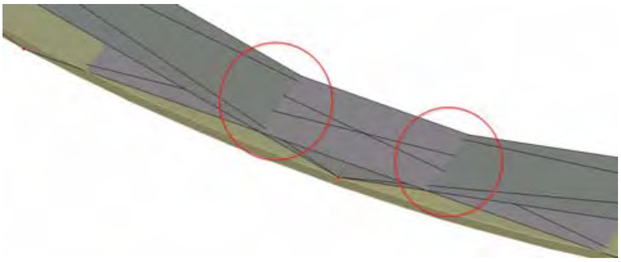


Рис. 4. Самопересечение поверхностей на тонкостенном цилиндре

Во избежание подобных ситуаций используют следующие подходы:

– при построении сетки учитывается дополнительный параметр – отклонение элементов сетки от поверхности. Если данный параметр будет меньше минимального расстояния между поверхностями геометрии, подобной ситуации не возникнет;

– учет близости поверхностей. При генерации сетки в подобных областях размер элемента ограничивается в соответствии с расстоянием до ближайшей поверхности (рис. 5).

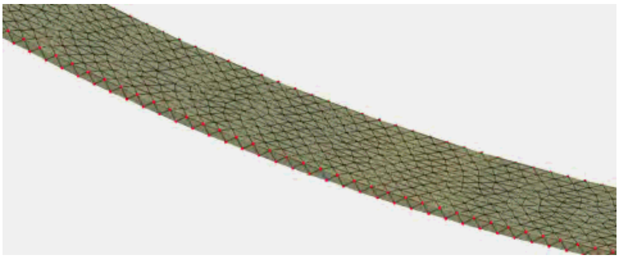


Рис. 5. Учет близости поверхностей при генерации сетки на тонкостенном цилиндре

Несогласованные разбиения границ

Рассмотрим пример со сферой. Если мы будем рассматривать параметрическую область независимо от соответствующей ей трехмерной поверхности, то возможно построение, при котором точки на ребрах $\varphi = 0$ и $\varphi = 2\pi$ не будут соответствовать друг другу, что приведет к ситуации, изображенной на рис. 6.

Рис. 6. Несогласованные границы на сфере

Таким образом, при генерации сетки на параметрической области дополнительно необходимо учитывать совпадения отображений ребер на трехмерную поверхность.

Вырожденные элементы, совпадающие вершины

Используя все тот же пример со сферой, можно заметить, что при переходе из 2D в 3D, совпали некоторые вершины и появился ряд вырожденных треугольников. Подобный результат также связан с особенностями представления геометрии, и его необходимо обрабатывать, вставляя дополнительный этап сшивки сетки и удаления вырожденных элементов.

Фасеточная геометрия

Фасеточная геометрия описывает поверхность тела с помощью набора треугольников таким образом, чтобы отклонение полученной поверхности от реальной (исходной) было не больше заданного значения. В качестве критерия оценки отклонения используются различные подходы: абсолютное – расстояние между поверхностями, относительное – отклонение от поверхности на единицу длины/площади, потеря объема, и т. д.

Преимущества фасеточного представления геометрии:

– простейший формат представления и хранения – для полного описания поверхности достаточно массива треугольников с координатами вершин (формат STL [3]);

– простые и быстрые алгоритмы по обработке данной геометрии: проекция точки на поверхность, поиск кратчайшего пути по поверхности, пересечение поверхностей, различные аффинные преобразования и т. д.

Недостатки:

– потеря точности: безвозвратное огрубление криволинейных поверхностей,

– в большинстве случаев – потеря или отсутствие информации о характерных элементах геометрии: ребер, граней, фрагментов. Необходимость ее восстановления.

Несмотря на недостатки, фасеточное представление геометрии незаменимо при решении множества практических задач:

– восстановление поверхностей тел по данным, полученным в результате сканирования реального объекта,

– построение оболочки для облака точек (частиц),

– обработка сложных геометрий в аналитическом представлении с множеством несшитых поверхностей, при наличии самопересечений и искажений, связанных с особенностями CAD системы и трансляторов.

Ключевые особенности фасеточной геометрии:

– в отличие от аналитического представления, фасеточная геометрия не имеет функции преобразования объектов из 3D в 2D пространство и обратно,

– возможно отсутствие информации о характерных элементах геометрии: ребрах, гранях, фрагментах.

Построение сетки на поверхности в фасеточном представлении часто включает в себя три этапа:

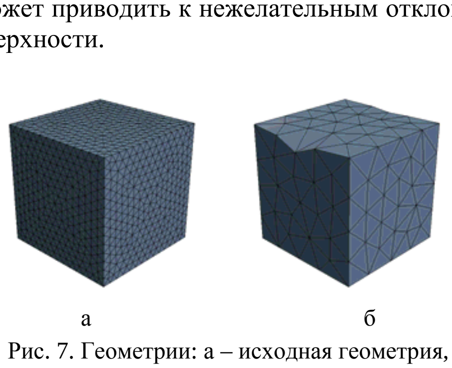
– восстановление информации о геометрии;

– сегментация поверхности;

– отображение патчей (патч – односвязное подмножество треугольников) на плоскость.

Восстановление информации о геометрии

Поскольку часто фасеточная геометрия не содержит информации о ребрах, гранях, фрагментах описываемых тел, ее необходимо восстановить. Если этого не делать, возможны неприятные казусы, такие как сглаживание острых углов и ребер деталей либо пропадание технологических отверстий (рис. 7). Отсутствие информации о характерных ребрах геометрии может приводить к нежелательным отклонениям от поверхности.



а б

Рис. 7. Геометрии: а – исходная геометрия, б – геометрия с отклонениями

Для восстановления информации об особенностях геометрии используют:

– полуавтоматический метод. Предоставляют пользователю возможность задания угла для выделения характерных особенностей геометрии и инструменты редактирования полученного набора,

– полностью автоматический метод. Выделение производится по набору внутренних параметров, с учетом кривизн, заданных размеров сетки и сложных алгоритмов автоматического выделения отдельных компонент детали.

Восстановление информации о геометрии тесно связано со следующей задачей: сегментация поверхности.

Сегментация поверхности

Изначально фасеточная геометрия представляет собой единый массив связанных между собой треугольников. Отображение всей поверхности на плоскость является чрезвычайно сложной задачей, требующей решения сложных задач оптимизации и развертки. Для упрощения задачи отображения необходимо произвести разделение поверхности на более простые наборы связанных треугольников (патчи), каждый из которых легко отображается на плоскость.

Ключевыми критериями в задаче сегментации поверхности являются:

– учет геометрических особенностей поверхности;

– возможность отображения патча на плоскость с учетом допустимых искажений.

Отображение патчей на плоскость

После сегментации поверхности должны быть получены патчи, гарантированно отображаемые на плоскость. Для отображения патча на плоскость необходимо отобразить узлы патча на плоскость таким образом, чтобы при сохранении связанности сетки ни один узел не попал внутрь треугольника, на ребро или другой узел сетки.

Критерии хорошего отображения патча на плоскость:

– отсутствие самопересечений.

– минимальное искажение треугольников.

Идеальным считается отображение, при котором сохраняются все длины сторон треугольников.

Далее на контуре патча в 2D строится сетка, с учетом операции отображения, искажающей размеры (подобно тому, как это делалось в случае с аналитическим представлением). Для отображения полученной сетки на поверхность используются барицентрические координаты новых узлов в треугольниках исходной сетки.

Далее рассмотрим некоторые сложности, с которыми придется столкнуться при построении сетки на фасеточной геометрии: кривизна дискретных поверхностей, зашумленность поверхности, низкое качество поверхности, ошибки в топологии и вырожденные элементы.

Кривизна дискретных поверхностей

На фасеточных поверхностях, как и на аналитических, также требуется учет кривизны для более точного описания геометрии. Однако в отличие от аналитических поверхностей, вычисление кривизны дискретных поверхностей является далеко не тривиальной задачей. Для ее решения используются различные методы аппроксимации поверхности, а также вычисление различных интегральных характеристик поверхности в каждой вершине и треугольнике [4] (рис. 8).

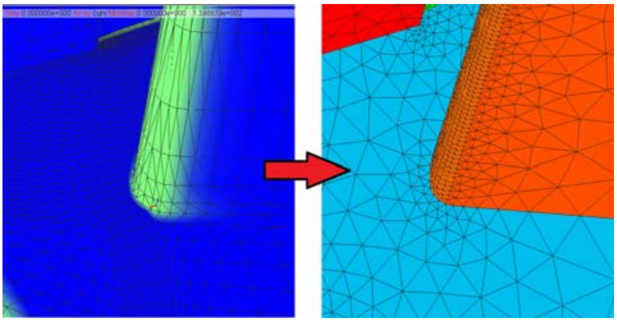


Рис. 8. Результат построения сетки с использованием кривизны поверхности

Зашумленность поверхности

Поскольку фасеточная геометрия может быть получена различными путями, возможно «зашумление» поверхности, что проявляется в виде неравномерного изменения направления нормалей треугольников на предположительно гладких поверхностях, что может привести к ошибкам во многих алгоритмах, таким как – неверное вычисление кривизн поверхности, ошибочное автоматическое выделение геометрических особенностей, и т. д. (рис. 9).

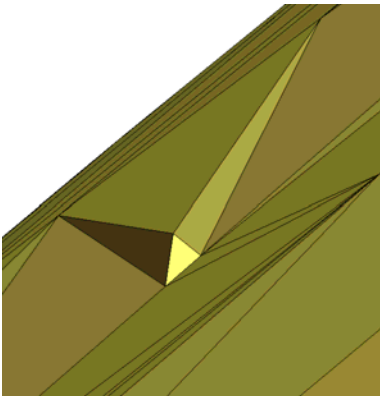


Рис. 9. Резкий уступ на гладкой поверхности

Низкое качество поверхности

Помимо зашумленности, поверхность часто содержит узкие вытянутые треугольники низкого качества (с длиной самой короткой стороны – на пределе точности геометрии), что накладывает повышенные требования к точности вычислений и учету возможной вычислительной погрешности (рис. 10).

Рис. 10. Узкие вытянутые треугольники – главная особенность всех фасеточных поверхностей

Ошибки в топологии, вырожденные элементы

И наконец, фасеточная геометрия может содержать большое количество топологических и геометрических ошибок (рис. 11), таких как:

– вырожденные элементы (треугольники нулевой площади);
– самопересечения;
– перекрытия;
– «дыры» (отсутствие соседей у треугольников в местах, где предполагалась непрерывная поверхность).

Для того чтобы избежать ошибок, некорректной работы алгоритмов построения сетки и повысить качество результирующей сетки необходимо включать этап предварительного анализа и лечения геометрии.

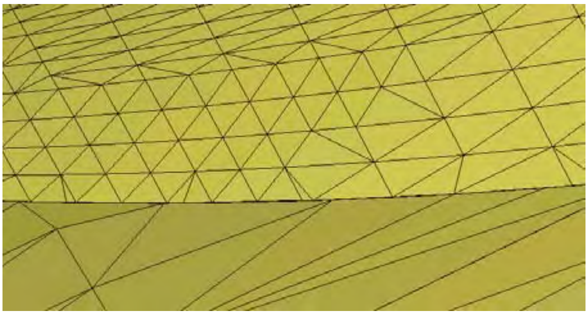


Рис. 11. Вырожденные треугольники, перекрытия на стыке поверхностей

Заключение

В докладе были показаны далеко не все особенности, которые приходится учитывать при разработке генераторов поверхностных сеток, однако, целью данной работы было показать плюсы и минусы использования того или иного представления геометрии с точки зрения генерации сеток и того, с какими особенностями придется столкнуться при работе с тем или иным представлением.

Подводя итог, можно сказать, что:

– аналитическое представление позволяет более точно описывать геометрию моделируемого тела и в пределах точности геометрии увеличивать точность моделирования, однако, требует хорошей параметризации поверхностей, сильного упрощения модели и отсутствия геометрических ошибок.

– фасеточное представление позволяет самостоятельно выделить характерные особенности геометрии, вычислить оптимальное отображение патчей на плоскость, уменьшая искажения, но вносит ограничения на увеличение точности моделирования, а также может содержать множество элементов низкого качества и «артефакты», требующих особой обработки и лечения.

Литература

1. Скворцов А. В. Обзор алгоритмов триангуляции Делоне // Вычислительные методы и программирование, 2002. Т. 3, С. 14-39.
2. Матвеев И., Игнатьев Ю., Микушин В. Построение согласованной триангуляции для b-rep моделей с параметрическим представлением поверхностей в системе 3DVision // Построение расчетных сеток: теория и приложения: сборник трудов. – М.: РАН Вычислительный центр, 2002.
3. The STL format // Режим доступа http://fabbers.com/tech/STL_Format, свободный.
4. Dyn N., Hormann K., Kim S., Levin D. Optimizing 3d triangulations using discrete curvature analysis / T. Lyche, L.L. Schumaker (Eds.) // Mathematical Methods in CAGD: Oslo 2000. Nashville, TN: Vanderbilt University Press, 2001. P. 135–146.