

АЛГОРИТМЫ ПОСТРОЕНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ НЕСТРУКТУРИРОВАННЫХ СЕТОК НА ОСНОВЕ ПОВЕРХНОСТНОЙ СЕТКИ ДЛЯ МЕТОДИКИ ТИМ

А. К. Шмелева, А. А. Воропинов

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», г. Саров Нижегородской обл.

При решении трехмерных задач механики сплошной среды в областях сложной формы начальная геометрия часто задается в виде поверхностной сетки, а возмущения в системе – в виде граничных условий. В связи с этим наиболее важно построение качественной расчетной сетки, особенно вблизи границ. В данной работе описаны два подхода к построению трехмерных неструктурированных сеток на основе поверхностной сетки, реализованные в рамках методики ТИМ [1]:

- 1) построение сетки приграничного слоя;
- 2) построение сетки на основе диаграммы Вороного с расстановкой центров от поверхности.

Построение сетки приграничного слоя

Для построения каждого слоя требуется определить положение новых узлов сетки, рис.1, при заданном отступе h . Для этого для каждого узла поверхностной сетки $Vert_i$ делается смещение на величину $h_i = h\delta_i$ по направлению нормали узла. Здесь используется коэффициент сдвига узла δ_i – величина, определяющая, на какое расстояние переместится новый узел относительно положения старого узла в зависимости от углов между нормальными граней старого узла. Если брать коэффициент сдвига постоянным, рис. 1а, то на изломах поверхности может получиться сетка плохого качества, в сравнении с сеткой при переменном коэффициенте сдвига, рис. 1б.

Для определения коэффициента сдвига в двумерном случае была выбрана формула:

$$\delta_i = \left(\cos \frac{\alpha_i}{2} \right)^{-1}, \quad (1)$$

где α_i – угол между нормальными.

В трехмерном случае вычисления усложняются: надо знать все грани, содержащие данный узел и попарно рассматривать формулу (1) для нормалей граней, имеющих общее ребро (рис. 2). Эту формулу надо применять в плоскости, ортогональной их общему ребру – то есть нужно найти проекцию нормали на эту плоскость:

$$\delta_i = \frac{k}{\sum_{m=1}^k \text{Pr}_{\pi_m} \bar{n} \cos \frac{\alpha_{im}}{2}}, \quad (2)$$

где k – количество ребер, сходящихся в узле; π_m – плоскость, ортогональная ребру $Edge_m$.

После вычисления всех коэффициентов δ_i формируется первый слой сетки. Для построения следующих слоев определяются грани трехмерной сетки, по которым производится дальнейшее наращивание. Эти грани объединяются в новую поверхность. Далее, аналогично построению первого слоя, для узлов полученной поверхности определяются нормали и коэффициенты δ_i . К текущей трехмерной сетке добавляется новый слой, сформированный от полученной поверхности.

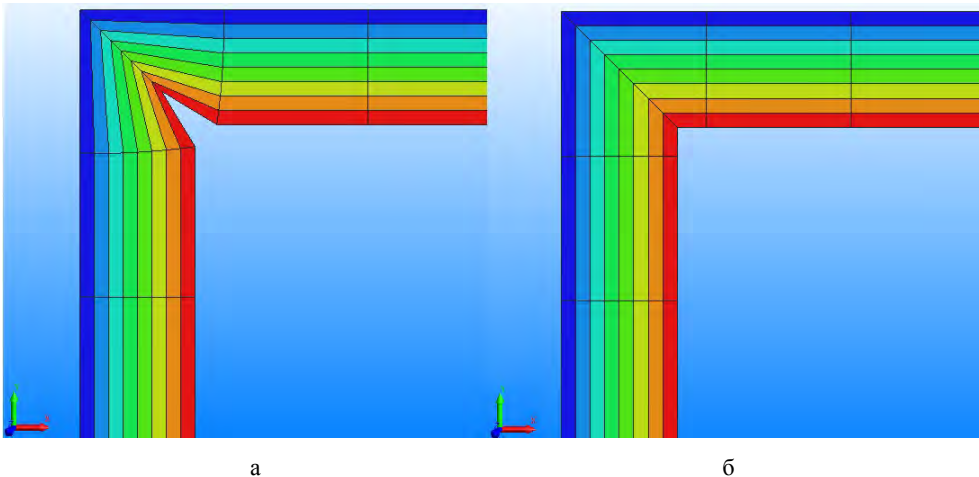


Рис. 1. Сечение сетки: а – при постоянном коэффициенте сдвига узлов, б – при переменном коэффициенте сдвига узлов

Сетка на основе диаграммы Вороного с расстановкой центров от поверхности

Напомним, что диаграмма Вороного[2] определяется следующим образом:

пусть задано множество C из n точек $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ в пространстве R^3 . Диаграммой Вороного $V(C)$ множества C называется разбиение пространства на n ячеек Вороного $V(i)$, каждая из которых характеризуется тем, что внутренние точки ячейки $V(i)$ лежат ближе к точке p_i , чем к любой точке из C , отличной от p_i :

$$V(p_i) = V(i) = \{r : r \in R^3, d(r, p_i) \leq d(r, p_j), j \neq i\}. \quad (3)$$

Таким образом, в данной постановке $V(i)$ - выпуклый многогранник, являющийся пересечением полупространств $H(p_i, p_j)$, которые определяются плоскостью, такой, что отрезок $[p_i, p_j]$ делится пополам, и эта плоскость перпендикулярна отрезку.

Основываясь на этих свойствах диаграммы Вороного, можно корректно описать границу будущей сетки, расставляя центры ячеек парами на одинаковом расстоянии δ от поверхности во внешнем и внутреннем направлении.

Тогда общий алгоритм построения сетки будет следующий:

- 1) анализ качества исходной поверхности и ее последующее изменение.
- 2) формирование списка основных центров (полученных с использованием данных о поверхности);
- 3) формирование списка дополнительных центров (полученных с помощью распределений);
- 4) построение диаграммы Вороного по набору полученных центров;
- 5) удаление внешнего слоя ячеек;
- 6) преобразования полученной сетки.

Рассмотрим подробнее каждый из этапов построения сетки.

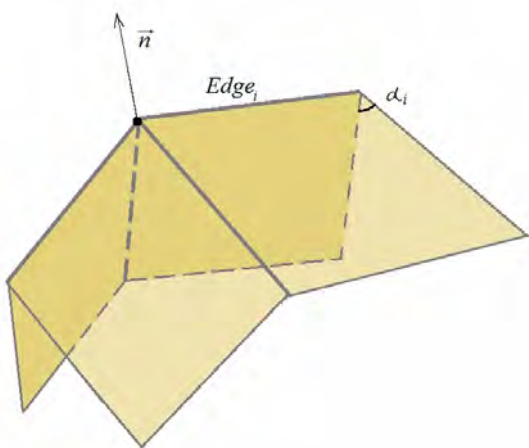


Рис. 2. Определение коэффициента сдвига узла

Следует отметить, что на каждом шаге производится проверка сетки на предмет самопересечений. Если возникают самопересечения граней, то последний слой не учитывается и построение сетки прерывается.

На рис. 3 показан вид исходной поверхности (габаритные размеры: $254 \times 255 \times 254$).

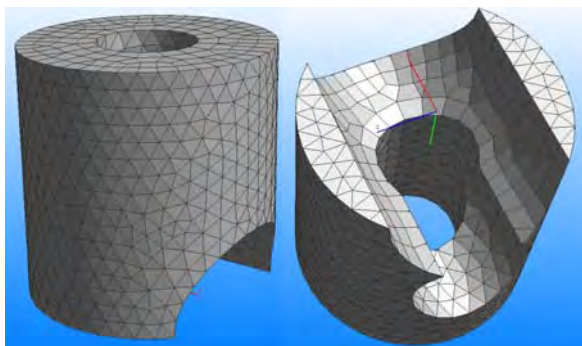


Рис. 3. Вид исходной поверхности с различных углов обзора

Для данной поверхности была построена сетка приграничного слоя, состоящая из 10 слоев с шириной слоя $h = 0,01$, фрагменты которой показаны на рис. 4.

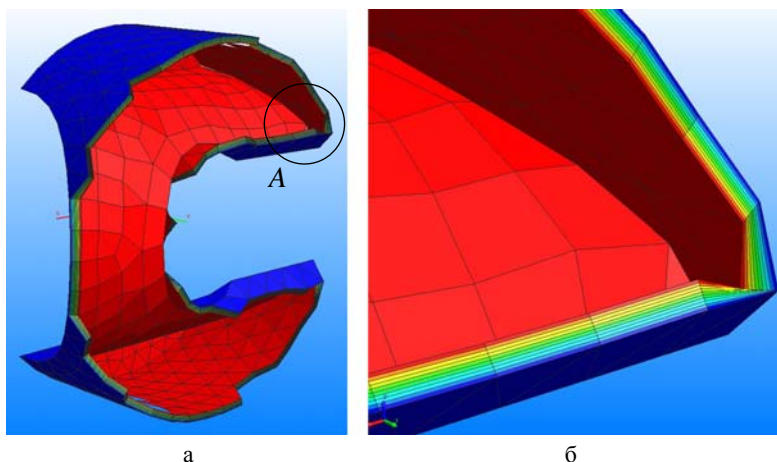


Рис. 4. Полученная сетка приграничного слоя: а – сетка, б – фрагмент А сетки

1. Анализ качества исходной поверхности

Качество исходной сетки напрямую влияет на качество получаемой, а в некоторых случаях даже на саму возможность ее построения. На этапе анализа проводится проверка поверхностной сетки на предмет самопересечений, удаление «двойных» узлов, определение списка граней для измельчения (грани на узких участках сетки, грани большой площади и т.д.) и дробление таких граней на четырехугольники, переход к плоским граням. Также проводится определение линии излома поверхности (совокупности всех ребер поверхностной сетки, разделяющих грани, двугранный угол между которыми превосходит $\pi/3$) и вычисление нормалей для граней.

Рис. 5 и рис. 6 показывают необходимость проведения данных процедур.

На рис. 5 показана поверхностная сетка в исходном виде, рис. 5а, и то, что получилось после ее изменения, рис. 5б. Габаритные размеры: $10 \times 12,9 \times 6,5$.

На рис. 6 показаны сетки на основе диаграммы Вороного. Сетки были получены для поверхностей с рис. 5 с отступом $\delta = 10^{-4}$.

На рис. 6,а показана сетка для исходной поверхности с рис. 5а, на рис. 6б – для измененной с рис. 5б.

Из рисунков видно, что без дробления поверхности построить корректно сетку на узких участках геометрии невозможно.

2. Формирование списка основных центров

Основные центры вводятся попарно и откладываются на одинаковом расстоянии от какой-либо точки исходной поверхности по направлению нормали грани, которой принадлежит эта точка. Такую точку можно выбрать несколькими способами. Лучше всего себя зарекомендовал способ вычисления координат основных центров через арифметические центры граней поверхности. Однако для построения сеток в существенно трехмерных геометриях таких центров не всегда бывает достаточно. В случае если на изломах геометрии поверхностная сетка имеет сильно вытянутые вдоль излома грани, необходимо добавить центры вдоль этой грани, иначе сетка не будет описывать геометрию корректно. Если в одном узле поверхностной сетки сходится большое число ребер, то есть возможность центры будущей сетки откладывать и от этого узла.

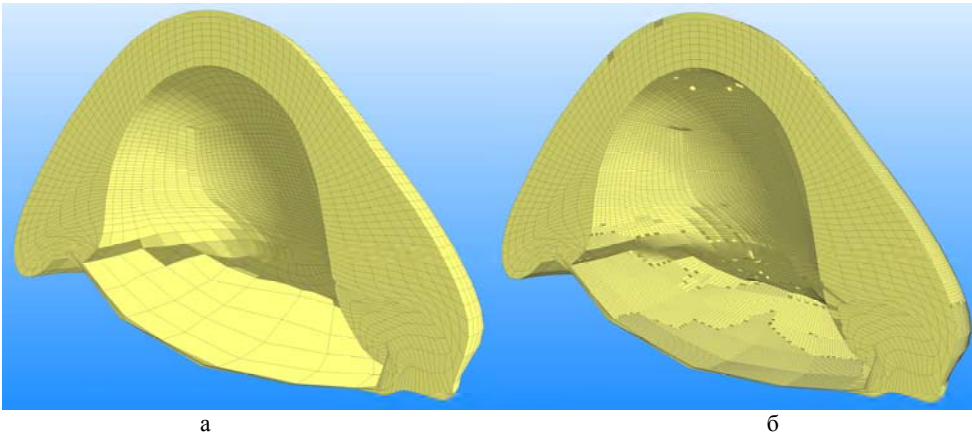


Рис. 5. Поверхностная сетка: а – в исходном виде, б – после изменения

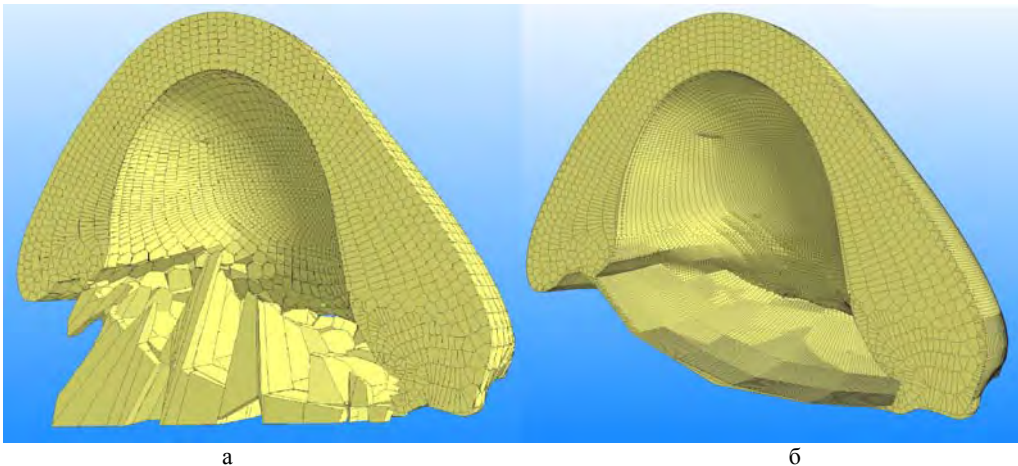


Рис. 6. Полученные сетки: а – для исходной поверхности с рис. 5а, б – для измененной поверхности с рис. 5б

3. Формирование списка дополнительных центров

Чтобы вычислить координаты дополнительных центров, вначале генерируются координаты точек в параллелепипеде, обрамляющем поверхность. Далее нужно избавиться от центров, мешающих построению сетки. Во-первых, все центры должны находиться внутри поверхности. Во-вторых, дополнительные центры не должны оказывать влияние на границу будущей сетки, поэтому центры должны располагаться на некотором расстоянии от границы (поверхности). Следует отметить, что для сортировки центров применяется быстрый геометрический поиск с разбиением пространства на кубы [3].

4. Построение диаграммы Вороного

Определившись окончательно с расположением центров, строим сетку диаграммы Вороного в минимальном координатном параллелепипеде, в который можно вписать набор имеющихся центров. Для построения применяется инкрементный алгоритм, основанный на последовательном добавлении центров в текущую диаграмму.

5. Удаление внешнего слоя ячеек

После построения диаграммы Вороного по набору полученных центров удаляются все ячейки, лежащие снаружи относительно исходной поверхности.

На рис. 7 показан фрагмент диаграммы Вороного для исходной поверхности, рис. 7а, в виде эллипсоида. На рис. 7б показан тот же фрагмент сетки после удаления слоя внешних относительно поверхности ячеек.

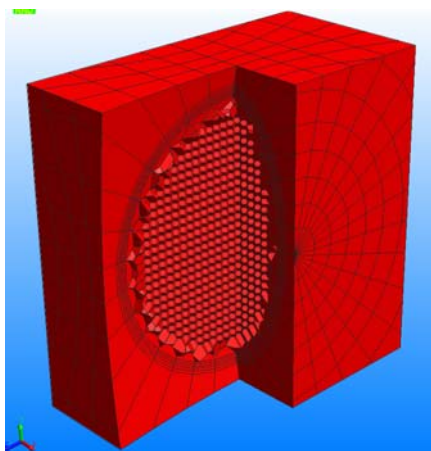
6. Преобразование полученной сетки

Отдельное внимание хочется уделить вопросу улучшения качества сетки на границе.

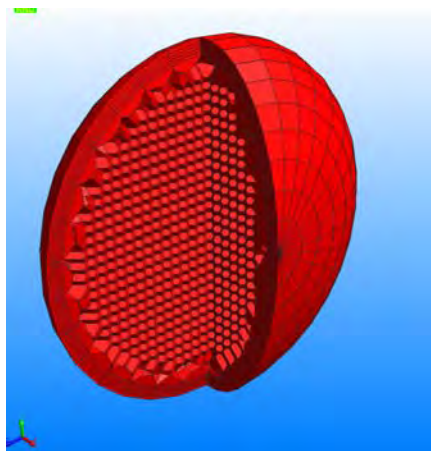
При построении сетки возникают два вида проблем – некорректное построение сетки на участках излома поверхности и «ступенчатость» на гладких участках. Эти проблемы возникают из-за неравномерного расположения центров граней исходной поверхности.

Чтобы избавиться от проблемы «ступенчатости», производится сжатие малых граней полученной сетки в узел, ребро или совокупность ребер в зависимости от формы грани.

На рис. 8 показан фрагмент границы сетки до применения этих алгоритмов, рис. 8а, и после, рис. 8б.

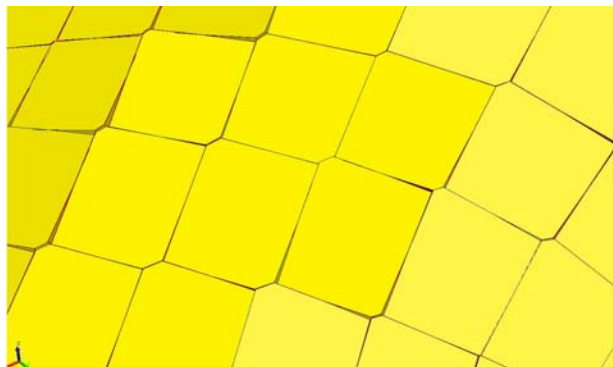


а

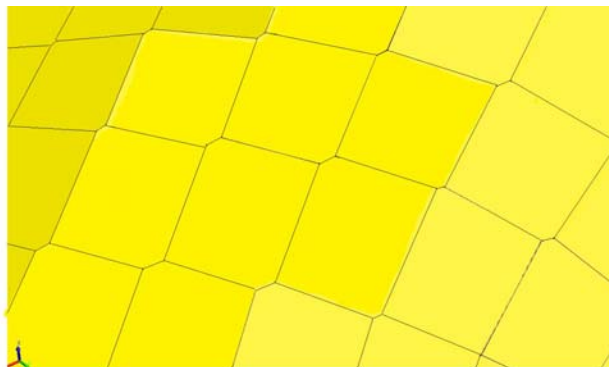


б

Рис. 7. Фрагмент сетки: а – до удаления слоя внешних ячеек, б – после удаления слоя внешних ячеек

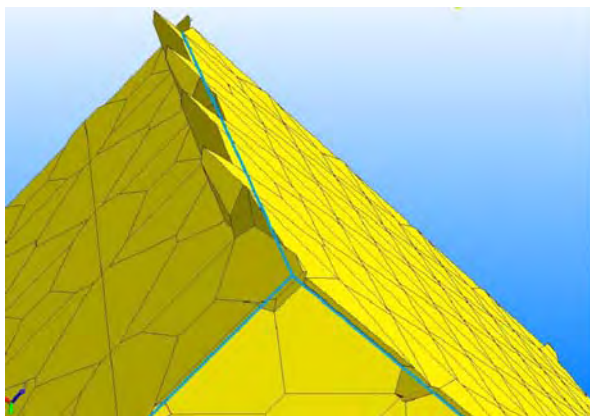


а

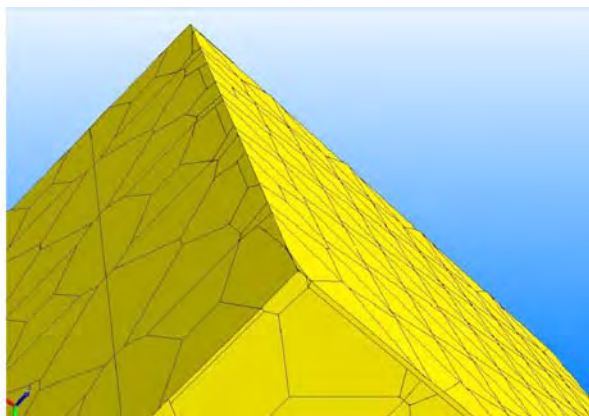


б

Рис. 8. Фрагмент границы сетки: а – до сжатия граней, б – после сжатия граней



а



б

Рис. 9. Фрагмент сетки: а – до преобразования, б – после преобразования

На рис. 9 показан фрагмент сетки, построенной на изломе исходной поверхности, рис. 9а. Из рис. 9а видно, что появляются зубчики и впадины. Чтобы избавиться от этого эффекта, производится описание линии излома на этапе анализа поверхности и дальнейшее отсечение или добавление фрагментов ячеек в сетку. Данный этап преобразования сетки выполняется после построения диаграммы Вороного. На рис. 9б показан фрагмент сетки после преобразований.

С помощью вышеописанного алгоритма были построены трехмерные сетки для ряда поверхностей: «трехмерного креста», несферической оболочки и поверхности поршня.

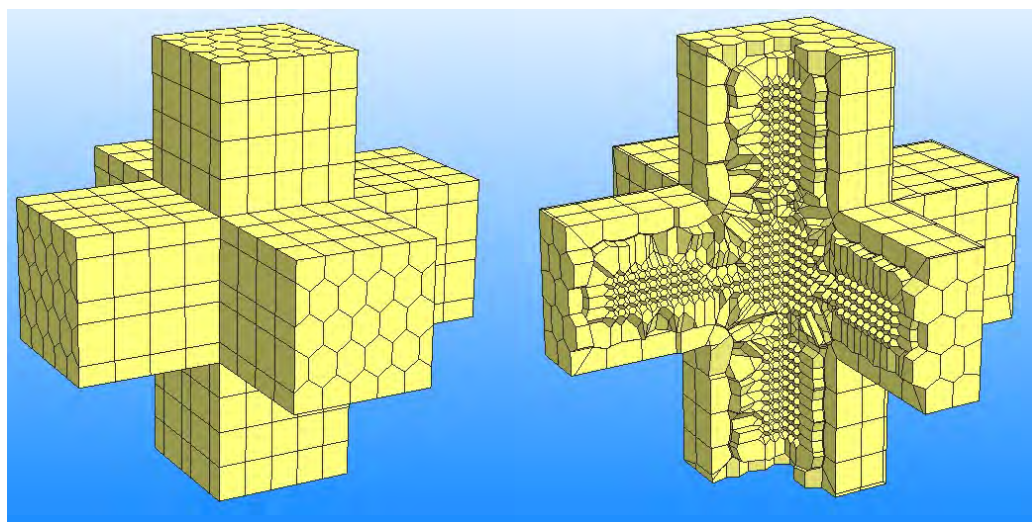
Поверхность «трехмерного креста»

Габаритные размеры области: $3 \times 3 \times 3$, отступ: $\delta = 0,01$.

На рис. 10 показана поверхность «трехмерного креста», рис. 10а, и фрагмент сетки, полученной для данной поверхности, рис. 10б.

Из рис. 10 видно, что в приграничном слое получены ячейки большого объема. Это произошло из-за того, что грани поверхности не дробились и имеют достаточно большие площади. Внутренние ячейки являются телами Вороного.

Информация о том, как изменялась топология сетки, приводится в табл. 1.



а

б

Рис. 10. Поверхность «трехмерного креста» и фрагмент полученной сетки: а – исходная поверхность, б – фрагмент сетки

Таблица 1

Информация о топологии полученной сетки

Информация о топологии сетки	После построения диаграммы Вороного	После деления ячеек на новой границе	После удаления слоя внешних ячеек	После коррекции граничных ячеек
Число ячеек	2660	2919	2046	2046
Число граней	14939	16307	12520	12505
Число узлов	10622	10874	9485	9470

Поверхность несферической оболочки

Габаритные размеры области: $475 \times 276 \times 236$.
Отступ: $\delta = 1,31$.

На рис. 11 показана поверхность несферической оболочки, ее исходная поверхность, рис. 11,а, и фрагмент полученной сетки, рис. 11,б.

В табл. 2 приводится информация о топологии сетки и о времени ее построения.

Поверхность поршня

Габаритные размеры: $2554 \times 255 \times 254$, отступ $\delta = 1,8$

На рис. 12 показана поверхность поршня, ее исходная поверхность, рис. 12,а, и фрагмент сетки, рис. 12,б.

Из рис. 12 видно, что внутренние ячейки являются телами Вороного. Полученная сетка хорошо описывает границу области и линии ее излома.

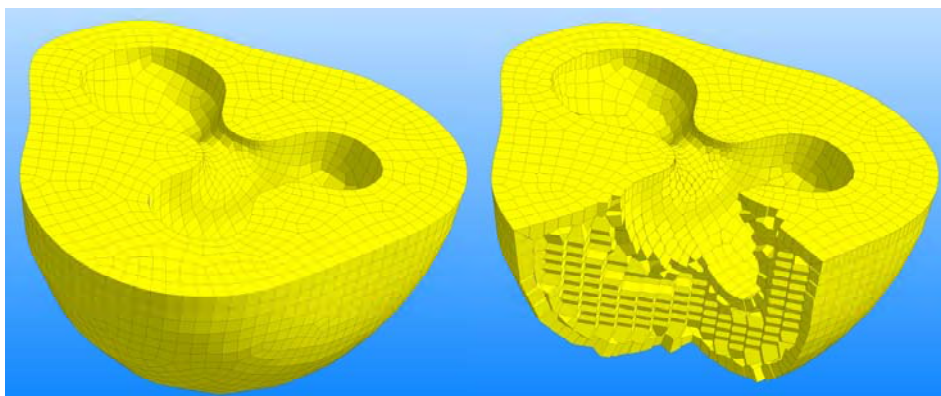


Рис. 11. Поверхность несферической оболочки и фрагмент полученной сетки: а – исходная поверхность, б – фрагмент сетки

Таблица 2

Информация о топологии полученной сетки

Данные о сетке		После построения диаграммы Вороного	После деления ячеек на новой границе	После удаления слоя внешних ячеек	После коррекции граничных ячеек
Информация о топологии сетки	Число ячеек	9083	9586	6283	6283
	Число граней	65506	68822	53525	42243
	Число узлов	55378	57462	49426	39843
Время построения, с		28,66	0,28	0,05	0,31

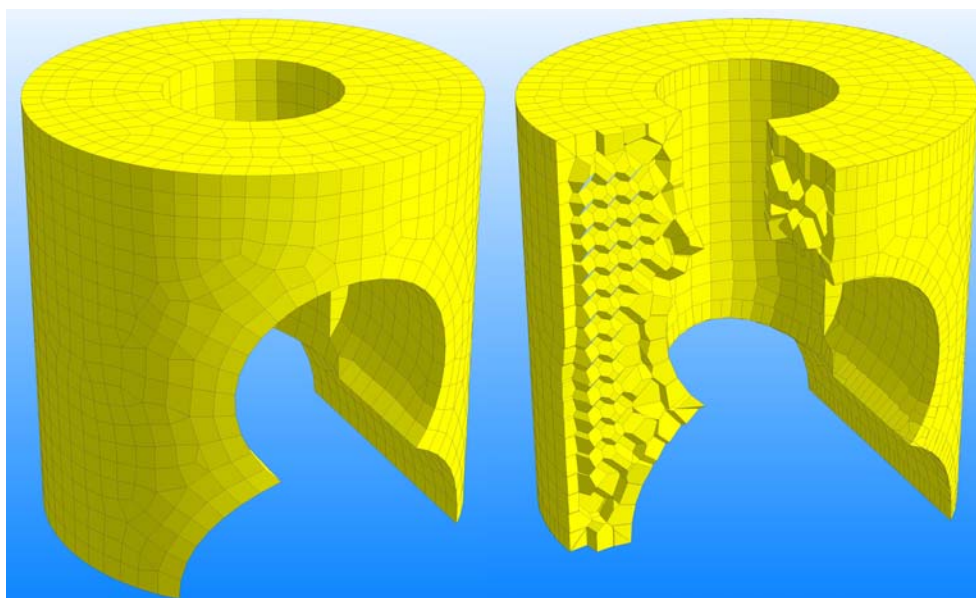


Рис. 12. Поверхность поршня и фрагмент полученной сетки: а – исходная поверхность, б – фрагмент полученной сетки

В рамках данной работы были разработаны и реализованы алгоритмы построения трехмерных сеток на основе поверхностной сетки для методики ТИМ. С их помощью появилась возможность построения сеток в сложных трехмерных геометриях. В качестве перспектив развития можно рассмотреть вопрос улучшения качества сетки на основе диаграммы Вороного на границах, совместное применение обоих методов при построении сеток и распараллеливание этих алгоритмов.

1. Соколов С. С., Панов А. И., Воропинов А. А. и др. Методика ТИМ расчета трехмерных задач механики сплошных сред на неструктурированных многогранных лагранжевых сетках // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2005. № 3. С. 37–52.
2. Вороной Г.Ф. Собрание сочинений. Т. 2. – Киев: Изд-во АН УССР, 1952.
3. Шмелева А. К., Воропинов А. А., Новиков И. Г., Шурыгин А. В. Алгоритмы построения неструктурированных сеток с использованием быстрого поиска геометрической близости точек для методики ТИМ.// «Молодежь в науке». Сборник аннотаций десятой научно-технической конференции (г. Саров, 1–3 ноября 2011 г.), С. 195.