

РЕЗУЛЬТАТЫ ВЕРИФИКАЦИИ МОДЕЛЕЙ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ, РЕАЛИЗОВАННЫХ В ПАКЕТЕ ПРОГРАММ ЛЭГАК-ДК

Д. Ю. Дьянов, Е. И. Корсакова, Г. П. Симонов, К. В. Циберев, Е. В. Шувалова

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», г. Саров Нижегородской обл.

Пакет программ ЛЭГАК–ДК разрабатывается для численного решения широкого круга трехмерных и двумерных задач газодинамики, динамического упругопластического деформирования и разрушения конструкций. Численная методика основана на методе конечных элементов в лагранжевой, лагранжево-эйлеровой и эйлеровой постановках на неструктурированных сетках. При этом типы ячеек могут быть различны, но основу составляют шестигранники и четырехугольники. Аппроксимация по времени осуществляется с использованием двух схем на выбор: схема методики ЛЭГАК [1] и схема «крест» [2].

Рассмотрим замыкающие соотношения основной системы уравнений, описывающей движение сплошной среды. А именно, уравнения, определяющие полный тензор напряжений: уравнения состояния; закон Гука в упругой области и критерий пластичности Мизеса в пластической области течений.

Тензор напряжений Эйлера (Коши) для упругопластических материалов интегрируется по времени следующим образом:

$$\sigma_{ij}(t + dt) = \sigma_{ij}(t) + \dot{\sigma}_{ij} dt.$$

Производная по времени тензора напряжений может быть записана в следующем виде:

$$\dot{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}^{\nabla} + \sigma_{ik} \Omega_{kj} + \sigma_{jk} \Omega_{ki},$$

где $\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)$ – тензор вращения; $\sigma_{ij}^{\nabla} = C_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}$ – тензор напряжений, вычисленный по Яуманну; C_{ijkl} – матрица упругих постоянных, а $\dot{\epsilon}_{ij}$ – тензор скоростей деформаций:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right).$$

Тензоры скоростей деформаций и вращения вычисляются в заданных точках элемента с использованием терминов матрицы деформация-смещение:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{N_{\text{узлов}}} \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_j} v_i^k.$$

Таким образом, для вычисления тензора напряжений мы можем записать следующие разностные формулы:

1. Для схемы «крест»:

$$\sigma_{ij}^{n+1} = \sigma_{ij}^n + r_{ij}^n + \sigma_{ij}^{\nabla(n+\frac{1}{2})} \Delta t^{n+\frac{1}{2}},$$

где $\sigma_{ij}^{\nabla(n+\frac{1}{2})} \Delta t^{n+\frac{1}{2}} = C_{ijkl} \Delta \epsilon_{kl}^{n+\frac{1}{2}}$, $\Delta \epsilon_{kl}^{n+\frac{1}{2}} = \dot{\epsilon}_{kl}^{n+\frac{1}{2}} \Delta t^{n+\frac{1}{2}}$,

$$r_{ij}^n = \left(\sigma_{ip}^n \omega_{pj}^{n+\frac{1}{2}} + \sigma_{jp}^n \omega_{pi}^{n+\frac{1}{2}} \right) \Delta t^{n+\frac{1}{2}}.$$

Для материалов, у которых давление есть функция относительного изменения объема, энергии или температуры соответствующая разностная запись девiatorа тензора напряжений имеет вид:

$$s_{ij}^{n+1} = \sigma_{ij}^n + p^n \delta_{ij} + r_{ij}^n + C_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}^{n+\frac{1}{2}} \Delta t^{n+\frac{1}{2}}.$$

2. Для схемы методики ЛЭГАК:

$$\sigma_{ij}^{n+1} = \sigma_{ij}^n + r_{ij}^n + \sigma_{ij}^{\nabla(n+1)} \Delta t^n,$$

где $\sigma_{ij}^{\nabla(n+1)} \Delta t^n = C_{ijkl} \Delta \epsilon_{kl}^{n+1}$, $\Delta \epsilon_{kl}^{n+1} = \dot{\epsilon}_{kl}^{n+1} \Delta t^n$, $r_{ij}^n = \left(\sigma_{ip}^n \omega_{pj}^{n+1} + \sigma_{jp}^n \omega_{pi}^{n+1} \right) \Delta t^n$.

Разностная запись девiatorа тензора напряжений имеет вид:

$$s_{ij}^{n+1} = \sigma_{ij}^n + p^n \delta_{ij} + r_{ij}^n + C_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}^{n+1} \Delta t^n.$$

В пластической области девiator тензора напряжений подчиняется условию текучести Мизеса:

$$\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij} - \sigma_y^2 \leq 0, \quad (1)$$

где σ_y – предел текучести. Если условие нарушается, что означает переход в область пластического течения, то производится пересчет девiatorа напряжений:

$$s_{ij\text{пл}} = \sqrt{\frac{\sigma_y^2}{3/2 s_{sp} (S^2)}} s_{ij}. \quad (2)$$

В настоящее время в пакете программ ЛЭГАК-ДК реализованы уравнения состояния и модели упругопластического деформирования и разрушения как пакета LS-DYNA, так и внутренние уравнения состояния и модели методики ЛЭГАК. Одно из главных преимуществ созданной структуры программы расчета тензора напряжений – это возможность быстрого подключения любой из библиотек, определяющей давление, скорость звука, модули упругости и предел текучести в зависимости от напряженно-деформируемого состояния вещества в ячейке.

Рассмотрим подробнее некоторые реализованные в пакете программ ЛЭГАК-ДК уравнения состояния и модели упругопластического деформирования и разрушения.

Уравнение состояния идеального газа

Уравнение состояния идеального газа записывается следующим образом:

$$p = (\gamma - 1)\rho e,$$

где γ – константа, ρ – плотность, e – удельная внутренняя энергия.

Полиномиальное уравнение состояния

Полиномиальное уравнение состояния определяется следующим соотношением:

$$p = C_0 + C_1\mu + C_2\mu^2 + C_3\mu^3 + (C_4 + C_5\mu + C_6\mu^2)e,$$

где $C_0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ – константы, $\mu = \rho/\rho_0 - 1$, ρ_0 – начальная плотность.

Уравнение состояния Грюнайзена

Уравнение состояния Грюнайзена записывается в следующем виде.

Величины давление и скорость звука на адиабате сжатия определяется уравнениями:

$$p = \frac{\rho_0 C^2 \mu \left[1 + \left(1 - \frac{\gamma_0}{2} \right) \mu - \frac{a}{2} \mu^2 \right]}{\left[1 - (S_1 - 1)\mu - S_2 \frac{\mu^2}{\mu + 1} - S_3 \frac{\mu^3}{(\mu + 1)^2} \right]^2} + (\gamma_0 + a\mu)\rho e.$$

Скорость звука находится из соотношения $c^2 = \frac{dp}{d\rho}$. Зная, что $dp = \frac{\partial p}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial p}{\partial e} de$, получим:

$$\frac{dp}{d\rho} = \frac{\partial p}{\partial \rho} + \frac{\partial p}{\partial e} \frac{de}{d\rho} = \frac{\partial p}{\partial \rho} + \frac{\partial p}{\partial e} \frac{p}{\rho^2}.$$

Найдя частные производные $\frac{\partial p}{\partial \rho}$ и $\frac{\partial p}{\partial e}$, получим выражение для скорости звука:

$$c^2 = \frac{C^2 \left[1 + (2 - \gamma_0)\mu - \frac{3}{2}a\mu^2 \right]}{\left[1 - (S_1 - 1)\mu - S_2 \frac{\mu^2}{\mu + 1} - S_3 \frac{\mu^3}{(\mu + 1)^2} \right]^2} - \frac{2C^2 \mu \left[1 + \left(1 - \frac{\gamma_0}{2} \right) \mu - \frac{a\mu^2}{2} \right] \left[1 - S_1 - S_2 \frac{\mu^2 + 2\mu}{(\mu + 1)^2} - S_3 \frac{\mu^3 + 3\mu^2}{(\mu + 1)^3} \right]}{\left[1 - (S_1 - 1)\mu - S_2 \frac{\mu^2}{\mu + 1} - S_3 \frac{\mu^3}{(\mu + 1)^2} \right]^3} + ae + (\gamma_0 + a\mu)\rho_0 \frac{p}{\rho^2}$$

На адиабате расширения:

$$p = \rho_0 C^2 \mu + (\gamma_0 + a\mu)\rho e,$$

$$c^2 = C^2 + ae + (\gamma_0 + a\mu)\rho_0 \frac{p}{\rho^2},$$

где $C, \gamma_0, S_1, S_2, S_3$ – константы.

Модель упругого материала

Простейшая модель – это модель упругого материала.

Основные уравнения модели следующие. Компоненты девиатора тензора напряжений определяют согласно закону Гука:

$$\dot{s}_{ij} = 2G\dot{\epsilon}_{ij}, \quad (3)$$

где G – модуль сдвига, $\dot{\epsilon}_{ij}$ – компоненты девиатора тензора скоростей деформации.

Уравнение для модуля сдвига следующее:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad (4)$$

где E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона (являются параметрами модели).

Давление в этой модели не определяется по уравнению состояния, а вычисляется по формуле:

$$p^{n+1} = -K \ln(V^{n+1}), \quad (5)$$

где $K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}$ – объемный модуль сжатия, V – относительный объем, то есть отношение текущего объема к начальному.

Модель упругопластического материала с кинематическим упрочнением

Модель упругопластического материала с кинематическим упрочнением является аналогом модели MAT_PLASTIC_KINEMATIC пакета LS-DYNA [2, 3] и используется для расчета упругопластического материала с учетом изотропного и кинематического упрочнения.

В упругой области компоненты девиатора тензора напряжений s_{ij} определяются согласно закону Гука (3). Условие текучести для этой модели записывается в следующем виде:

$$\frac{3}{2} \xi_{ij} \xi_{ij} - \sigma_y^2 \leq 0,$$

где $\xi_{ij} = s_{ij} - \alpha_{ij}$, s_{ij} – компоненты девиатора тензора напряжений, α_{ij} – центр поверхности пластичности. Предел текучести определяется по формуле: $\sigma_y = \sigma_0 + \beta E_p \varepsilon_p$, где σ_0 – начальный предел текучести, β – параметр упрочнения, ε_p – пластическая деформация, E_p – модуль пластического упрочнения. Модуль пластического упрочнения записывается в следующем виде:

$$E_p = \frac{E_t E}{E - E_t}, \quad (6)$$

где E – модуль Юнга, E_t – касательный модуль, являющиеся параметрами модели.

Если условие текучести нарушается, то рассчитываются пластическая деформация $\varepsilon_p^{n+1} = \varepsilon_p^n + \Delta \varepsilon_p$,

$$\Delta \varepsilon_p = \frac{\sqrt{3/2 \xi_{ij} \xi_{ij}} - \sigma_y}{3G + E_p},$$

центр поверхности пластичности и компоненты девиатора тензора напряжений определяются по формулам:

$$\alpha_{ij}^{n+1} = \alpha_{ij}^n + \frac{(1-\beta) E_p \Delta \varepsilon_p}{\sqrt{3/2 \xi_{ij} \xi_{ij}}} \xi_{ij},$$

$$s_{ij}^{n+1} = s_{ij} - \frac{3G \Delta \varepsilon_p}{\sqrt{3/2 \xi_{ij} \xi_{ij}}} \xi_{ij}.$$

В данной модели предусмотрена также возможность учета кинематического упрочнения за счет величины скорости деформации. Для этого необходимо задать параметры модели C и P отличными от нуля. Тогда в уравнении для предела текучести добавляется множитель:

$$\sigma_y = \left(1 + \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{C} \right)^{1/P} \right) (\sigma_0 + \beta E_p \varepsilon_p),$$

где $\dot{\varepsilon}$ – скорость деформации.

Давление вычисляется как в модели упругого материала (5).

Модель Джонсона–Кука

В комплексе программ ЛЭГАК-ДК реализована хорошо известная модель Джонсона-Кука [4], которая предназначена для расчета сдвиговых течений при больших значениях скоростей деформаций.

Основные уравнения модели следующие. В упругой области компоненты девиатора тензора напряжений s_{ij} рассчитываются согласно закону Гука (3).

Условие текучести записывается в виде (1).

Предел текучести является функцией трех переменных: пластической деформации ε_p , интенсивности скоростей пластических деформаций $\dot{\varepsilon}_p$ и температуры T :

$$\sigma_y(\varepsilon_p, \dot{\varepsilon}_p, T) = \begin{cases} \left(A + B(\varepsilon_p)^N \right) \left(1 + C \ln \left(\frac{\dot{\varepsilon}_p}{\dot{\varepsilon}_0} \right) \right) \left(1 - \left(\frac{T - T_0}{T_m - T_0} \right)^M \right), & \dot{\varepsilon}_p > \dot{\varepsilon}_0 \\ \left(A + B(\varepsilon_p)^N \right) \left(1 - \left(\frac{T - T_0}{T_m - T_0} \right)^M \right), & \dot{\varepsilon}_p \leq \dot{\varepsilon}_0 \end{cases},$$

$$G = G_0$$

где A, B, N, C, M – константы; T_0 – начальная температура; T_m – температура плавления; $\dot{\varepsilon}_0$ 2 параметр модели.

Если условие текучести нарушается, компоненты s_{ij} пересчитываются по формуле (2):

Для вычисления давления в этой модели необходимо задать уравнение состояния.

Модель кусочно-линейного упругопластического материала

В пакете программ ЛЭГАК-ДК реализована модель кусочно-линейной пластичности, которая является аналогом модели MAT_PIECEWISE_LINEAR_PLASTICITY пакета LS-DYNA [2, 3]. Модель используется для моделирования материалов с произвольной зависимостью между напряжением и деформацией, а также с произвольной зависимостью от скорости деформации.

В упругой области компоненты девиатора тензора напряжений s_{ij} рассчитываются согласно закону Гука (3). Условие текучести имеет вид (1). Для данной модели предел текучести σ_y в условии (1) – динамический предел текучести:

$$\sigma_y(\varepsilon_p, \dot{\varepsilon}_p) = \begin{cases} \sigma_y^s(\varepsilon_p) + SIGY \left(\dot{\varepsilon}_p / C \right)^{1/P}, & SIGY > 0; \\ \sigma_y^s(\varepsilon_p) \left(1 + \left(\dot{\varepsilon}_p / C \right)^{1/P} \right), & SIGY = 0, \end{cases}$$

здесь $SIGY, C, P$ – константы, σ_y^s – статический предел текучести, который определяется из заданных кривых.

Если условие текучести (1) нарушается, вычисляется пластическая деформация ε_p :

$$\varepsilon_p^{n+1} = \varepsilon_p^n + \Delta\varepsilon_p, \quad \Delta\varepsilon_p = \frac{\sqrt{3/2 s_{ij} s_{ij}} - \sigma_y}{3G + E_p},$$

с учетом формул (4) и (6) соответственно для модуля сдвига и модуля пластического упрочнения, и определяются компоненты девиатора тензора напряжений по формуле (2).

Если задана кривая, то модуль пластического упрочнения полагается равным нулю.

Давление вычисляется как в модели упругого материала (5).

Модель пористых материалов

Модель пористых материалов является аналогом модели MAT_HONEYCOMB пакета LS-DYNA [2, 3, 5, 6] и используется для моделирования пористых материалов с анизотропными свойствами.

Основные принципы модели следующие. Поведение материала определяется параметром

$$\beta = \max \left[\min \left(\frac{1 - V_{\min}}{1 - V_f}, 1 \right), 0 \right], \quad \text{где } V_{\min} - \text{минимальное}$$

значение относительного объема за время счета; V_f – константа.

Модуль Юнга и модуль сдвига рассчитываются для каждого направления по следующим формулам:

$$\begin{aligned} E_{aa} &= E_{aa0} + \beta(E - E_{aa0}); & G_{ab} &= G_{ab0} + \beta(G - G_{ab0}); \\ E_{bb} &= E_{bb0} + \beta(E - E_{bb0}); & G_{bc} &= G_{bc0} + \beta(G - G_{bc0}); \\ E_{cc} &= E_{cc0} + \beta(E - E_{cc0}); & G_{ca} &= G_{ca0} + \beta(G - G_{ca0}), \end{aligned}$$

где G – модуль сдвига для сжатого вещества, определяемый по формуле (4); E – модуль Юнга для сжатого вещества – константа; $E_{aa0}, E_{bb0}, E_{cc0}, G_{ab}, G_{bc}, G_{ca}$ – константы.

Компоненты тензора напряжений для пористого материала находятся следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_{aa}^{n+1*} &= \sigma_{aa}^n + E_{aa} \Delta\varepsilon_{aa}; & \sigma_{ab}^{n+1*} &= \sigma_{ab}^n + 2G_{ab} \Delta\varepsilon_{ab}; \\ \sigma_{bb}^{n+1*} &= \sigma_{bb}^n + E_{bb} \Delta\varepsilon_{bb}; & \sigma_{bc}^{n+1*} &= \sigma_{bc}^n + 2G_{bc} \Delta\varepsilon_{bc}; \\ \sigma_{cc}^{n+1*} &= \sigma_{cc}^n + E_{cc} \Delta\varepsilon_{cc}; & \sigma_{ca}^{n+1*} &= \sigma_{ca}^n + 2G_{ca} \Delta\varepsilon_{ca}. \end{aligned}$$

Далее для каждой компоненты тензора напряжений проверяется, не превысило ли ее значение максимально допустимое. И если превысило, т. е. $|\sigma_{ij}^{n+1}| > \sigma_{ij}(1-V)$, то компоненты тензора напряжений пересчитываются следующим образом: $\sigma_{ij}^{n+1} =$

$$= \sigma_{ij}(1-V) \sigma_{ij}^{n+1*} / \left| \sigma_{ij}^{n+1*} \right|.$$

Величина $\sigma_{ij}(1-V)$ определяется из заданных кривых.

Давление для пористого материала определяется следующим образом:

$$p^{n+1} = \left(\sigma_{aa}^{n+1} + \sigma_{bb}^{n+1} + \sigma_{cc}^{n+1} \right) / 3.$$

Если вещество полностью сжалось, то его поведение описывается как идеальное упругопластическое. Согласно закону Гука (3) вычисляются компоненты девиатора тензора напряжений s_{ij} в упругой области. Если условие текучести Мизеса (1) нарушается, то компоненты s_{ij} пересчитываются по формуле (2), где σ_y – предел текучести для сжатого вещества, является константой модели.

Давление вычисляется следующим образом:

$$p^{n+1} = p^n - K \operatorname{div}(\vec{u}),$$

где K – объемный модуль, \vec{u} – вектор скорости.

Модель хрупкого материала Джонсона–Холмквиста

Модель пластического разрушения Джонсона–Холмквиста является аналогом модели MAT_JOHNSON_HOLMQUIST_CERAMICS пакета LS-DYNA [2, 3, 7, 8]. Она используется для моделирования керамики, стекла, и других хрупких материалов.

Эта модель описывает поведение материала следующим образом. Сначала материал ведет себя как упругий. При переходе в пластическую область начинает накапливаться поврежденность. Поврежденность вычисляется в зависимости от параметра поврежденности и уровня накопленной пластической деформации. Таким образом, поведение материала определяется неповрежденной кривой, поврежденной кривой, а также величиной параметра поврежденности. При разгрузке материал ведет себя как упругий до момента хрупкого разрушения, после чего происходит мгновенное разрушение.

Рассмотрим данную модель подробнее. Основные уравнения модели следующие:

1. На первом этапе вычисляются компоненты девиатора тензора напряжений s_{ij} согласно закону Гука (3) и скорость деформации $\dot{\varepsilon}$.

2. Далее вычисляется давление p следующим образом.

Пока материал не начал разрушаться, т. е. параметр поврежденности $D = 0$, давление определяется как: $p = k_1\mu + k_2\mu^2 + k_3\mu^3$, где k_1, k_2, k_3 – константы.

При разгрузке материала это уравнение превращается в следующее: $p = k_1\mu$.

Когда начинает накапливаться поврежденность, т. е. $D > 0$, добавляется приращение давления ΔP : $p^{n+1} = k_1\mu + k_2\mu^2 + k_3\mu^3 + \Delta P^n$.

Увеличение давления при накоплении поврежденности связано с тем, что часть упругой энергии β превращается в гидростатическую потенциальную энергию (давление):

$$\Delta P^n = -k_1\mu + \sqrt{\left(k_1\mu + \Delta P^{n-1}\right)^2 + 2\beta k_1 \Delta U},$$

$$\Delta U = \frac{(\sigma_{\text{упр}})^2 - (\sigma)^2}{12G},$$

где $\sigma_{\text{упр}} = \sqrt{3/2 s_{ij} s_{ij}}$ – эффективное напряжение в упругой области, σ – эффективное напряжение в пластической области.

Приращение давления ΔP меняется от 0 при параметре поврежденности $D = 0$ до ΔP_{max} при $D = 1$.

3. Следующим этапом находится кривая, описывающая поведение неповрежденного материала:

$\sigma_i^* = A(P^* + T^*)^N (1 + C \ln \dot{\varepsilon}^*)$, где * означает, что величина нормализована, т. е. $P^* = P/P_{\text{HEL}}$, $T^* = T/P_{\text{HEL}}$, $\dot{\varepsilon}^* = \dot{\varepsilon}/\varepsilon_0$, $\sigma^* = \sigma/\sigma_{\text{HEL}}$ (справедливо для $\sigma_{\text{упр}}, \sigma_i, \sigma_f, \sigma$), $\sigma_{\text{HEL}} = \frac{3}{2}(HEL - P_{\text{HEL}})$. $A, C, N, T, \varepsilon_0, HEL, P_{\text{HEL}}$ – константы.

Если достигли кривой σ_i , т. е. $\sigma_{\text{упр}}^* \geq \sigma_i^*$, начинается накапливаться повреждение $D^{n+1} = \sum \Delta \varepsilon_p / \varepsilon_f^p$ за счет приращения пластической деформации $\Delta \varepsilon_p$:

$$\Delta \varepsilon_p = \frac{\sigma_{\text{упр}}^{n+1} - \left(\sigma_i^{n+1} - D^n (\sigma_i^{n+1} - \sigma_f^{n+1})\right)}{3G},$$

где $\sigma_f^* = B(P^*)^M (1 + C \ln \dot{\varepsilon}^*) \leq \text{SFMAX}$ – кривая, описывающая поведение поврежденного материала; B, M, C, SFMAX – константы. Если значение σ_f^* превышает величину SFMAX, то полагается $\sigma_f^* = \text{SFMAX}$. $\varepsilon_f^p = D_1(P^* + T^*)^{D_2}$ – пластическая

деформация разрушения; D_1, D_2 – константы. Параметр D_1 управляет скоростью накопления повреждений. Если он задается равным нулю, полное разрушение происходит за один счетный шаг, то есть мгновенно.

Зная параметр поврежденности D , кривые σ_i^* и σ_f^* , можно найти кривую, описывающую поведение материала: $\sigma^{*n+1} = \sigma_i^{*n+1} - D^{n+1}(\sigma_i^{*n+1} - \sigma_f^{*n+1})$.

Величина параметра поврежденности меняется от 0 до 1. Если параметр поврежденности достиг значения $D = 1$, вещество разрушено, и поведение материала описывается кривой σ_f^* .

4. Пересчитываются напряжения $s_{ij}^{n+1} = s_{ij} \sigma / \sigma_{\text{упр}}$.

Модели разрушения

Существует два вопроса, связанных с реализацией моделей разрушения:

- 1) выбор критерия разрушения,
- 2) определение поведения разрушенного материала и материала с повреждениями.

Критериев разрушения существует достаточно много, многие из них реализованы в пакете ЛЭГАК-ДК. Это к примеру, критерий по давлению, по полному напряжению, по деформации, по скорости деформации, по пластической деформации, по компоненте сдвиговой деформации, по энергии и так далее.

Поведение разрушенного материала в настоящее время определяется в пакете ЛЭГАК-ДК следующим способом. Если в элементе срабатывает заданный критерий, то элемент выбрасывается из расчета. Это моделирование схоже с образованием трещины в этом элементе.

Результаты тестовых расчетов

Плоская ударная волна

Начальная геометрия задачи приведена на рис. 1.

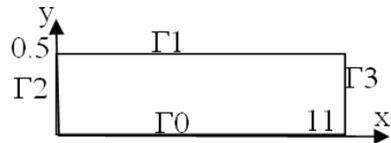


Рис. 1. Начальная геометрия задачи о плоской ударной волне

Начальные условия: $p_0 = 0$ ГПа, $\rho_0 = 1$ г/см³, $e_0 = 0$ кДж/г, $u_0 = 0$ км/с.
 $G = 15$ ГПа, $Y = 1$ ГПа.

Уравнение состояния: $p = (\gamma - 1)\rho e$, $\gamma = 3$.

Граничные условия: границы Г0, Г1, Г3 – жесткие стенки, на границе Г2 задавалось постоянное граничное давление $p = 5$ ГПа. Счетная область $\{0 \leq x \leq 11 \text{ см}, 0 \leq y \leq 0,5 \text{ см}\}$ разбивалась на 550 столбцов по оси x и 10 строк по оси y . Расчеты проводились по методике ЛЭГАК-ДК (схема LS-DYNA и схема ЛЭГАК).

На рис. 2 приведены профили скорости на момент времени $t = 20$ мкс и аналитическое решение. Как видно из рисунка, результаты, полученные по методике ЛЭГАК-ДК по схемам LS-DYNA и ЛЭГАК совпадают и близки к аналитическому решению.

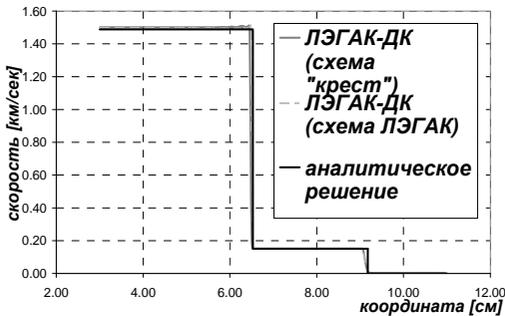


Рис. 2. Профили скорости

Радиальные колебания цилиндрической упругой оболочки

Рассматривается цилиндрическая оболочка. В начальный момент в оболочке задается радиальная скорость $u_0 = 0,1$ км/с. Далее элементы оболочки совершают одномерные окружные колебания. Для этой задачи имеется аналитическое решение, полученное в оболочечном приближении.

Период упругих окружных колебаний в аналитическом решении находится по формуле:

$$T = 2\pi R_0 / \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}} \quad (7)$$

и не зависит от толщины оболочки. Здесь E – модуль Юнга материала, ν – коэффициент Пуассона, R_0 – радиус срединной поверхности.

Полагалось $E = 210$ ГПа, $R_0 = 61,5$ см, $\rho = 7,8$ г/см³, $\nu = 0,3$. Толщина $h = 3$ см.

Начальная геометрия задачи представлена на рис. 3. Расчеты проводились в идеально упругой постановке.

На границах Г0, Г1 задавалась свободная поверхность, на границах Г2, Г3 – жесткая стенка. Счетная область разбивалась на 4 строки по оси Y и 133 столбца по оси X .

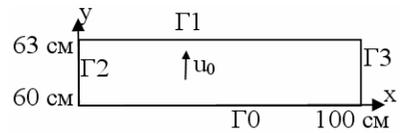


Рис. 3. Начальная геометрия задачи о радиальных колебаниях цилиндрической упругой оболочки

На рис. 4 приведено решение, полученное по методике ЛЭГАК-ДК. Период колебаний совпадает с точным решением [8].

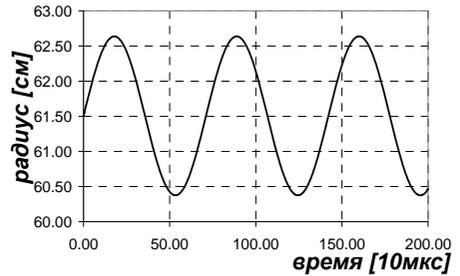


Рис. 4. Зависимость изменения радиуса срединной поверхности от времени

Расчеты проводились до момента времени $t = 800$ (10 мкс). На рис. 4 для наглядности результаты приведены до момента времени $t = 200$ (10 мкс). С течением времени амплитуда и период колебаний в численном решении остаются строго постоянными.

Стержень Тейлора

Для тестирования модели пластичности Джонсона–Кука реализованной в пакете программ ЛЭГАК-ДК была выбрана постановка из статьи [9].

Рассматривается задача о столкновении деформируемого цилиндрического стержня с жесткой неподвижной преградой при заданной начальной скорости соударения u_0 .

Начальная геометрия счетной области показана на рис. 4. Начальные длина $L_0 = 2,54$ см и диаметр стержня $d = 0,76$ см. В качестве жесткой преграды задается граничное условие – жесткая стенка. Остальные границы – свободные по верхности. В начальный момент в стержне задается скорость $u_0 = 0,221$ км/с. Задавалось уравнение состояния в форме Ми-Грюнайзена с постоянным коэффициентом Грюнайзена. Параметры уравнения состояния и модели сдвиговой прочности представлены в табл. 1.

При разбиении счетной области используется неструктурированная сетка размером 72420 ячеек (рис. 5). При этом по длине счетная область разбивалась на 68 ячеек.

Рис. 6 демонстрирует конечные формы, рассчитанные по методике ЛЭГАК в сравнении с расчетами из работы [9].

Параметры уравнения состояния

Вещество	γ	ρ , г/см ³	c , км/с	n	ν	A , ГПа	B , ГПа	C	n	m	T_m , К	c_v , кДж/г ⁰ К
Железо	2,333	7,89	5,5	3,5	0,27	0,175	0,38	0,06	0,32	0,55	1538	0,000452

Таблица 2

Экспериментальные данные и результаты расчетов

	D_f , см	L_f , см	W_f , см	$\bar{\Delta}$
Эксперимент	1,37	1,98	0,86	–
ЛЭГАК-ДК	1,207	1,96	0,906	0,06
Работа [9]	–	–	–	0,025

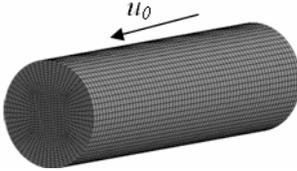


Рис. 5. Начальная геометрия задачи (стержень Тейлора)

$$\bar{\Delta} = \frac{1}{3} \left(\frac{|L_f - L_{\text{exp}}|}{L_{\text{exp}}} + \frac{|D_f - D_{\text{exp}}|}{D_{\text{exp}}} + \frac{|W_f - W_{\text{exp}}|}{W_{\text{exp}}} \right)$$

Обжатие куба

Для тестирования модели хрупкого материала Джонсона–Холмквиста была выбрана постановка из статьи [7].

Начальная геометрия задачи приведена на рис. 7. У куба со сторонами 1 м пять сторон – жесткие стенки, причём нижние узлы жестко закреплены, а к шестой стороне куба (верхней) прикладывается давление $p = 2$ ГПа (рис. 7). Под действием давления куб сначала сжимается до момента времени $t = 0,0676$ мкс, а потом растягивается ($p = -2$ ГПа). Куб рассматривается как один элемент. Было проведено 3 тестовых расчета, в которых варьировались параметры модели. Начальные данные и параметры модели приведены в табл. 3.

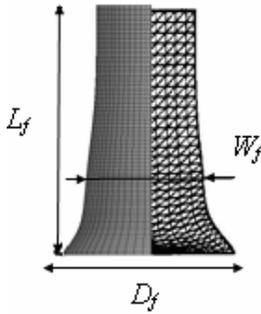


Рис. 6. Результаты расчетов (слева – ЛЭГАК-ДК, справа – результат из работы [9])

В табл. 2 приведены экспериментальные данные конечной формы образца и результаты расчетов, полученные по программе ЛЭГАК-ДК. В работе [9] не даны расчетные значения конечной формы, сравнительные оценки с экспериментом определяются величиной средней ошибки, рассчитываемой по следующей формуле:

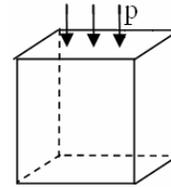


Рис. 7. Начальная постановка задачи обжатия куба

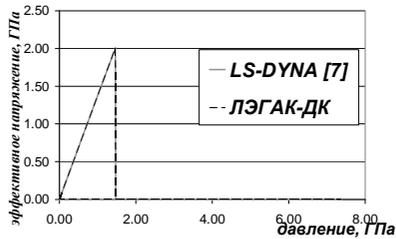
Таблица 3

Константы уравнений

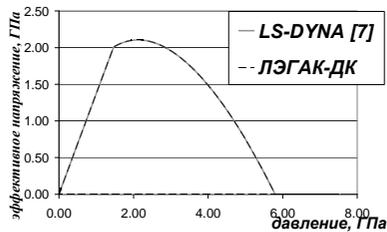
Параметры модели	Расчет 1	Расчет 2	Расчет 3	Параметры модели	Расчет 1	Расчет 2	Расчет 3
ρ , кг/м ³	3700	3700	3700	HEL, ГПа	2,79	2,79	2,79
G , ГПа	90,16	90,16	90,16	PHEL, ГПа	1,46	1,46	1,46
Константы прочности				Константы разрушения			
A	0,93	0,93	0,93	D1	0	0,005	0,005
B	0	0	0,31	D2	0	1	1
C	0	0	0	Константы уравнения состояния			
M	0	0	0,6	K1, ГПа	130,95	130,95	130,95
N	0,6	0,6	0,6	K2, ГПа	0	0	0
EPSI	1	1	1	K3, ГПа	0	0	0
T , ГПа	0,2	0,2	0,2	BETA	1	1	1
SFMAX, ГПа	0	0	0				

При расчете с первым набором констант не возникают пластические деформации, а также после разрушения отсутствуют напряжения. Расчет со вторым набором констант отличается от предыдущего расчета тем, что при повреждении могут возникать пластические деформации. При расчете с третьим набором констант также могут возникать пластические деформации, а, кроме того, могут возникать напряжения в разрушенном материале.

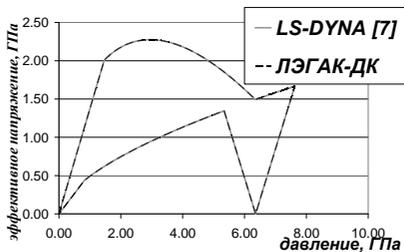
На рис. 8 приведены графики зависимости эффективного напряжения от давления для расчетов 1, 2 и 3. Результаты, полученные по комплексу программ ЛЭГАК-ДК и совпадают с результатами из работы [7], полученными по LS-DYNA.



а



б



в

Рис. 8. Зависимость эффективного напряжения от давления: а – расчет 1; б – расчет 2; в – расчет 3

1. Бахрах С. М., Величко С. В., Спиридонов В. Ф., Авдеев П. А., Артамонов М. В., Бакулина Е. А., Безрукова И. Ю., Борляев В. В., Володина Н. А., Наумов А. О., Огнева Н. Э., Резвова Т. В., Резяпов А. А., Стародубов С. В., Тарадай И. Ю., Тихонова А. П., Циберев К. В., Шанин А. А., Ширшова М. О., Шувалова Е. В. Методика ЛЭГАК-3D расчета трехмерных нестационарных течений многокомпонентной сплошной среды и принципы ее реализации на многопроцессорных ЭВМ с распределенной памятью // Вопросы атомной науки и техники, сер. Математическое моделирование физических процессов, 2004. Вып. 4. С. 41–50.

2. Hallquist J. O. LS-DYNA theoretical manual. Livermore Software Technology Corporation, 2006.

3. Hallquist J. O. LS-DYNA keyword user's manual. Volume 1. Livermore Software Technology Corporation, 2009.

4. Johnson G. R., Cook W. H. A constitutive model and data for metals subjected to large strain, high strain rates and high temperatures 7th Inter. Symposium ballistics. The Hague. The Netherlands. 1985. P. 541–548.

5. Hirth A., Bois P. D., Weimar K. A material model for transversely anisotropic crushable foams in LS-DYNA // 7th International LS-DYNA Users Conference. Material Technology (2). Germany.

6. Tabiei A., Chowdhury M. R. Transient response of a projectile in gun launch simulation using lagrangian and ALE methods // 8th International LS-DYNA Users Conference.

7. Cronin D. S., Bui K., Kaufmann C., McIntosh G., Berstad T. Implementation and validation of the Johnson-Holmquist ceramic material model in LS-DYNA // 4th European LS-DYNA Users Conference. Material 1. Canada.

8. Johnson G. R., Holmquist T. J. An improved computational constitutive model for brittle materials // American Institute of Physics, 1994.

9. Johnson G. R., Holmquist T. J., Evaluation of cylinder-impact test data for constitutive model constants // J App. Phys. Vol. 64, N 8, October 1988, P. 3901–3910.