

МЕТОДИКА С-007 ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ СОВМЕСТНОГО ПЕРЕНОСА НЕЙТРОНОВ, ЭЛЕКТРОНОВ, ПОЗИТРОНОВ И ГАММА-КВАНТОВ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО

А. Г. Малькин, В. И. Рослов, А. Н. Залялов, А. В. Горбунов, Е. Н. Донской

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», г. Саров Нижегородской обл.

Введение

Для решения методом Монте-Карло систем связанных линейных уравнений переноса нейтронов, гамма-квантов, электронов и позитронов в математическом отделении ВНИИЭФ в 2007 году создана методика С-007. Она объединяет возможности двух основных методик предыдущего поколения – методики С-95 [1] и методики ЭЛИЗА [2]. Возможность моделировать рождение и перенос частиц всех четырех типов позволяет получить одно из главных новых качеств, которым обладает расчет, выполненный по методике С-007.

С-007 – многоцелевая методика. Она используется для решения различных задач переноса нейтронов и других ионизирующих излучений. Расчеты полей излучений и защиты от излучений; расчеты критических параметров систем ($K_{эфф}$ и временной постоянной размножения нейтронов), в частности, параметров критических сборок; расчеты различных задач физики реакторов, в том числе, расчеты параметров импульсных исследовательских реакторов; расчеты задач, связанных с ядерной безопасностью; расчеты характеристик ускорителей электронов, выбор и оптимизация их мишеней; расчеты тока, заряда и поглощенной энергии в детекторах ионизирующих излучений при их облучении; обеспечение расчетами стадии разработки детекторов; расчеты функции отклика сцинтилляционных детекторов – это далеко не полный перечень расчетов, выполняемых с помощью этой методики.

Для решения перечисленных и других типов задач методика предоставляет широкие возможности детального описания сложной трехмерной геометрии систем. Методика позволяет использовать различные системы данных о сечениях реакций взаимодействия частиц с веществом, иначе говоря – различные системы констант переноса для моделирования траекторий частиц. В стандартном варианте для решения спектрального линейного интегро-дифференциального кинетического уравнения используются константы переноса с непрерывной зависимостью от энергии частиц. Для нейтронных задач методика позволяет работать с уравнением переноса в групповом приближении и использовать системы групповых констант переноса нейтронов.

Для описания постановки задачи и выбора конкретной схемы моделирования траекторий частиц (выбора тактики счета задачи) используется язык

задания, разработанный для методики С-95. В течение многих лет этот язык хорошо зарекомендовал себя и ныне просто дополнен с учетом возможностей новой методики.

Для реализации методики использован язык ФОРТРАН-90, а для выполнения параллельных вычислений на многопроцессорных ЭВМ – библиотека MPI.

Ниже дается представление о математической модели, в рамках которой задаются исходные данные задачи, и описаны некоторые особенности алгоритмов решения задач.

1. Геометрия

Геометрия задачи нередко представляет собой объект, который может быть разбит на части, обладающие определенной симметрией (например, осевой, сферической и т. п.). Такие части геометрии можно проще описать, если использовать присущие им геометрические особенности, а затем определенным образом скомпоновать отдельные подобъекты в единое целое. Такой подход к описанию геометрии позволяет уменьшить количество используемых символов во входной информации, и, кроме того, упрощаются алгоритмы и уменьшаются затраты времени ЭВМ на моделирование траекторий в тех частях системы, которые обладают геометрической простотой.

Основным объектом в задании геометрических данных является геометрический блок, который представляет собой совокупность областей, ограниченных поверхностями определенного типа. Различаются блоки следующих типов: плоский, сферический, осесимметричный, цилиндрический и трехмерный. Блоки последнего из указанных типов (в отличие от первых четырех) могут не обладать никаким видом пространственной симметрии, из чего и произошло название типа.

Блоки рассматриваются как независимые «строительные» элементы. Правильно размещенные друг относительно друга они составляют требуемую геометрию. В качестве исходного вместилища рассматривается мировое пространство (пустота), обладающее лишь системой координат (его можно рассматривать как всегда существующий блок 0-го уровня вложенности). В нем размещаются блоки (1-й уровень вложенности), которые, в свою очередь, могут содержать в себе другие блоки (2-й уровень), и так далее. Глубина вложений блоков, вообще говоря, не ограничена.

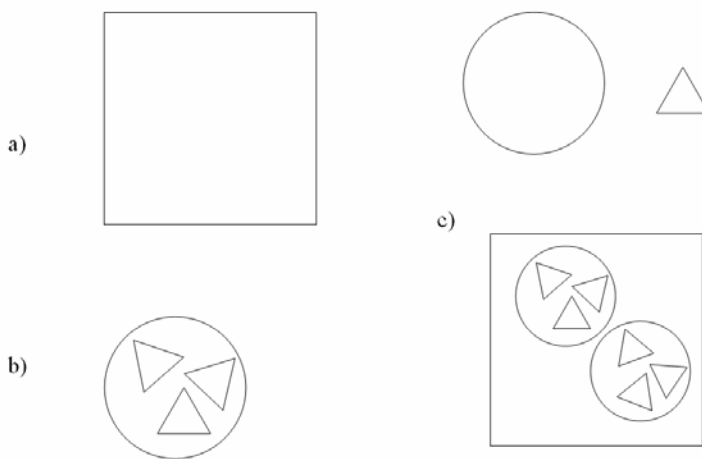


Иллюстрация возможностей построения геометрии посредством вложений

На рисунке схематично изображена геометрия, полученная из трех различных блоков (а): квадрат изображает блок 1 (внутренняя структура блоков не имеет значения), круг – блок 2 и треугольник – блок 3. На б представлен результат вложения 3-х экземпляров блока 3 в блок 2, причем каждое вложение имеет свою ориентацию. Наконец, фрагмент с показывает, что представляет собой геометрия в окончательном виде после 2-кратного вложения блока 2 в блок 1: блок 2 автоматически «тащит» с собой все, что в него было вложено.

Правильно заданная геометрия должна подчиняться требованию, чтобы размещенные блоки не пересекались между собой и не выходили за пределы блока-вместителя. Соблюдение этих условий является наиболее трудным при описании сложных геометрических объектов, так как надежные способы выполнения необходимой проверки не известны. Поэтому приходится особенно внимательно задавать информацию о размещении блоков, а тестирование геометрических данных осуществлять, главным образом, визуально с помощью графической программы вывода сечений заданной геометрии произвольными плоскостями. Окончательное тестирование производится во время счета задачи, так как в алгоритм моделирования траекторий частиц введена проверка на соответствие такой фазовой координаты частицы, как номер области в блоке, фактическому пространственному положению частицы. Это позволяет вовремя остановить счет задачи с неверно заданной геометрией и внести необходимые изменения в постановку задачи.

2. Составы областей и константное обеспечение расчетов

Масса и изотопный состав каждой обладающей постоянной плотностью вещества области геометрического блока задаются на входном языке одним из следующих способов:

- заданием ядерных концентраций в единицах $10^{24}/\text{см}^3$;
- заданием плотности и молекулярной формулы вещества в области;
- заданием плотности и весовых соотношений компонент вещества с описанием молекулярной формулы каждой из составляющих компонент вещества.

С заданием состава области связано понятие энергии «тепловых» нейтронов в области. В методике С-007 реализованы три модели расчета нейтронов, достигших в процессе блуждания в рассматриваемой области этой «тепловой» энергии.

Две первые модели служат для описания переноса нейтронов, термализовавшихся в данной области. В первой модели нейтрон, достигший тепловой энергии, в процессе дальнейшего блуждания в области имеет постоянную энергию и скорость, соответствующую тепловой энергии.

Вторая модель более аккуратно описывает процесс термализации и распространения термализовавшихся нейтронов. В модели свободного газа заданная «температура тепловых» является температурой в максвелловском распределении скоростей ядер вещества. Способ моделирования термализованных нейтронов в этой модели описан далее в параграфе 5 «Особенности моделирования траекторий различных частиц».

Третья модель носит название «без досчета тепловых». Она задается с помощью соответствующей тактики в области и означает, что по достижении нейтроном в процессе блуждания в рассматриваемой области энергии, меньшей «тепловой», происходит обрыв траектории («гибель нейтрона по энергии»). Эта модель используется при сравнении расчетных результатов с данными экспериментов, использующих пороговые датчики для измерений. Модель позволяет эффективно проводить расчеты методических и тестовых задач.

Для моделирования переноса нейтронов возможно использование следующих библиотек данных о сечениях: собственной библиотеки С-60 (описана

в работе [3]), библиотеки БАС-78 [4], а также библиотек ENDL-82 [5], ENDF/B-V[6], ENDF/B-VI [7], ENDF/B-VII [8].

Для моделирования процессов γ -образования используется библиотека NJMC, основанная на разработанных в РФЯЦ-ВНИИЭФ данных по сечениям γ -образования для быстрых нейтронов и на библиотеках ENDL-82 и JENDL-3 для нейтронов с низкими энергиями, а также библиотеки γ -образования, основанные на указанных выше библиотеках для переноса нейтронов [5–8].

Для переноса гамма-квантов используется библиотека РИФ, сформированная на основе данных Сторма и Исраэля [9] и Вайгеля [10], а также библиотека EPDL97 [11].

Фотонейтронные данные сформированы на основе данных [12] и собраны в библиотеку FN.

Данные о нейтронно-ядерных реакциях, приводящих к образованию нестабильных изотопов, собраны в библиотеке активационных изотопов ACTIV. В настоящее время эта библиотека содержит сечения для 56 каналов активации на 31 изотопе и характеристики образующихся при этом 39 нестабильных изотопов.

Для переноса заряженных частиц – электронов и позитронов, используются данные библиотеки EEDL [13] и данные многочисленных литературных источников.

Для расчета релаксации атомных оболочек используются данные библиотеки EADL [14].

3. Источники частиц

Источник определяет значения стартовых параметров траекторий частиц. При решении связанных уравнений переноса источником вторичных частиц может быть один из каналов соответствующей реакции взаимодействия частицы с веществом среды. Естественно, в таком ветвящемся процессе стартовые параметры вторичных частиц определяются данными о сечениях реакций. По сути именно такой источник вторичных частиц определяет связь уравнений переноса различных типов частиц.

Другим видом является так называемый «независимый источник», то есть источник, задаваемый независимо от решения уравнений переноса. Стартовые параметры траектории частицы, выпущенной из независимого источника, определяются заданием пространственного, энергетического, углового и временного распределений. Входной язык методики С-007 предоставляет широкие возможности задания этих распределений для независимого источника – от дискретных распределений, в частности, δ -распределений, до задания кусочно-непрерывных по фазовым координатам распределений с помощью таблиц и формул (изотропное или ламбертовское распределение по направлениям полета, максвелловское распределение по энергии и т. п.). Допускается

заданием нескольких таких источников с указанием их «долей» и «веса» испускаемых частиц. Выбор «долей» и «весов» для каждого источника определяется постановкой физической задачи и может варьироваться для повышения эффективности счета задачи в соответствии с априорной оценкой или по результатам прикидочных расчетов. Заметим, что методика позволяет в одном расчете получать результаты отдельно для каждого независимого источника. Это обеспечивается линейностью задачи и возможностью распределения рассчитываемых результатов (рассчитываемых функционалов) по номеру источника.

4. Рассчитываемые функционалы

Общий вид функционалов, рассчитываемых в методике С-007, следующий

$$\Psi(\Delta\vec{r}, \Delta\vec{E}, \Delta t) = \int_{\Delta\vec{r}} \int_{\Delta\vec{E}} \int_{\Delta t} \psi(\vec{r}, \vec{E}) f(\vec{r}, \vec{E}, t) d\vec{r} d\vec{E} dt.$$

Здесь $f(\vec{r}, \vec{E}, t)$ – решение линейного нестационарного уравнения переноса, то есть плотность частиц на единицу объема фазового пространства в данный момент времени, фазовый объем $\Delta x = (\Delta\vec{r}, \Delta\vec{E})$ – некоторое подмножество фазового пространства, \vec{r} – пространственные координаты частицы, $\vec{E} = (E, \vec{\omega})$, E – энергия, $\vec{\omega}$ – единичный вектор направления движения частицы, а $\psi(\cdot)$ есть функция, которая определяется физическим смыслом вычисляемой величины. Если ввести следующие обозначения:

$\vec{v} = v\vec{\omega}$, где v – модуль скорости частицы,

Σ – макроскопическое сечение,

Σ_a – сечение поглощения энергии,

то функция ψ принимает один из видов, представленных в таблице.

Вид функции ψ

ψ	Рассчитываемый функционал
v	Поток
$E v$	Поток энергии
\vec{v}	Ток
$E \vec{v}$	Ток энергии
Σv	Число столкновений
$E \Sigma_a v$	Поглощенная энергия
I	Плотность частиц
E	Плотность энергии

Фазовый объем, для которого ведется расчет значений функционала, в методике С-007 иначе называется детектором. Используются следующие типы детекторов: объемный, поверхностный, точечный по пространству и точечный по времени (для расчета

значения функционала в момент времени t). Расчет функционала с использованием метода Монте–Карло происходит следующим образом [15]. Моделируется некоторое количество траекторий марковского процесса, связанного с уравнением переноса частиц, и в точках этих траекторий, принадлежащих детектору, то есть принадлежащих либо части объема данной области, либо участку данной поверхности, либо данной точке, вычисляются вклады в рассчитываемый результат. Среднее арифметическое сумм этих вкладов на множестве моделируемых траекторий и будет оценкой рассчитываемого функционала.

Оценка методом Монте–Карло величины вклада в рассчитываемый функционал для различных детекторов может быть получена различными способами. Перечислим эти способы и выпишем формулы для вычисления величины соответствующего вклада:

1) Оценка по пробегу (объемный детектор)

$$w \frac{\Psi(\cdot)}{v} l,$$

где w – весовая функция (вес) частицы, она может меняться либо на траектории частицы, либо в точках столкновений в зависимости от используемой методики построения траектории (дерева траекторий); l – длина отрезка траектории внутри детектора либо между двумя последовательными точками столкновений, либо между точкой столкновения и точкой пересечения траектории с границей детектора, либо между двумя точками пересечения траектории с границей детектора.

2) Оценка по столкновениям (объемный детектор)

$$w \frac{\Psi(\cdot)}{\Sigma v}.$$

3) Оценка по пересечениям (поверхностный детектор)

$$w \frac{\Psi(\cdot)}{v|\mu|},$$

где μ – косинус угла между направлением полета частицы и нормалью к пересекаемой поверхности.

4) Оценка по достижению заданного значения времени

$$w \Psi(\cdot).$$

5) Оценка потока в точке (точечный детектор)

$$w \frac{\Psi(\cdot)}{v}.$$

Удобным способом описания детекторов конкретных результатов является расширение фазового пространства. К координатам фазового пространства, кроме переменных (\vec{r}, \vec{E}) , относятся величины, связанные либо с источниками частиц: номер источника, энергия источника; величины, либо связанные с историей жизни частицы: номер столкновения, тип

частицы и многие другие. Заметим, что в расчетах с использованием метода Монте–Карло расширение фазового пространства не влияет на эффективность расчетов, что является одним из преимуществ использования данного метода. При вычислении конкретного функционала выделение области фазового пространства производится с помощью некоторых наборов $\{\alpha_j\}$, называемых параметрами. Основную часть используемых параметров составляют координаты физического фазового пространства (\vec{r}, \vec{E}) и величины, определяемые как функции от этих координат. Это, например, декартовы координаты x, y, z , радиус-вектор $R = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$ и $\mu = (z-z_0)/R$ – косинус угла в некоторой сферической системе координат, угол между направлением полета частицы и нормалью к поверхности, которую эта частица пересекает, энергия частицы и ряд других.

Если функционал $\Psi(\cdot)$ необходимо вычислить для нескольких интервалов значений одного и того же параметра, мы называем такой результат дифференциальным и говорим, что задано распределение результата по этому параметру. Каждый из заказанных результатов, естественно, может вычисляться и без распределения по интервалам некоторых параметров, т. е. интегрально по таким параметрам.

Результат может быть распределен по нескольким параметрам и тогда он получается в виде матрицы такого количества измерений, сколько задано параметров, и протяженностью по каждому измерению, равному числу заданных интервалов соответствующего параметра.

5. Особенности моделирования траекторий различных частиц

Моделирование процессов переноса нейтронов и γ -квантов осуществляется с использованием аналоговой схемы [16] и методов повышения эффективности счета (см. ниже) в соответствии с выбранной системой сечений взаимодействия соответствующих частиц с веществом.

Для розыгрыша свободного пробега и выбора вещества, на котором происходит столкновение, используется схема максимальных кусочно-постоянных сечений [3, 17]. Учет теплового движения ядер среды осуществляется двумя способами: либо с учетом химических связей – так называемая модель $S(\alpha, \beta)$, либо в приближении свободного максвелловского газа [18]. При моделировании с учетом химических связей используются сечения взаимодействия и энерго-угловое распределение для заданной температуры.

При использовании модели свободного газа моделирование распространения нейтронов осуществляется на холодных сечениях вещества. Учет

температурного движения ядер заложен в сам алгоритм моделирования, что является очень удобным, так как не требует расчета констант для заданной температуры.

Образование γ -квантов происходит при каждом нейтронном столкновении по всем каналам γ -образования для вещества, на котором произошло столкновение.

Применение метода Монте–Карло к решению задач переноса электронов и позитронов затруднено характерными особенностями, присущими распространению заряженных частиц в веществе. Определяющим процессом взаимодействия электронов и позитронов с веществом является кулоновское взаимодействие. Оно характеризуется большой величиной сечения $\sim 10^{-16} - 10^{-20} \text{ см}^2$ и сильной вытянутостью вперед индикатрисы рассеяния. Поэтому частица испытывает на своем пути такое большое число столкновений, что их прямое моделирование приводит в большинстве случаев к непомерно большим затратам машинного времени. Для борьбы с этой трудностью разработаны различные методы группировки столкновений [19–26]. Получающаяся при этом траектория движения частицы (в [22] ее называют вложенной траекторией) приближенно описывает истинную траекторию.

В методике С-007 для моделирования электронов и позитронов используются две схемы катастрофических столкновений [22] (схемы класса II по классификации Бергера [19]). В этих схемах к катастрофическим относятся столкновения с передачами энергии, большими некоторой пороговой энергии E_{cat} , и углами рассеяния, большими некоторого порогового угла θ_{cat} . Катастрофические столкновения моделируются индивидуально. Моделирование отрезка траектории заряженной частицы между двумя последовательными катастрофическими столкновениями осуществляется с помощью одного из методов группировки столкновений (схемы класса I (I') по классификации Бергера [19]) (обычно без испускания вторичных частиц). Для моделирования некатастрофических столкновений в первой схеме методики С-007 используется метод группировки столкновений, основанный на приближении Фоккера–Планка [26], а во второй схеме – комбинация приближения Фоккера–Планка и непосредственного моделирования малоугловых столкновений. В обеих схемах для повышения точности моделирование траектории заряженных частиц вблизи границы раздела двух сред осуществляется по схеме индивидуальных столкновений, в которой моделируются все столкновения.

В методике С-007 для моделирования электронов и позитронов используется также схема индивидуальных (последовательных) столкновений. Реальная возможность использования схемы индивидуальных столкновений с прямым моделированием всех элементарных процессов взаимодействия электронов (позитронов) с веществом появилась в по-

следнее время в связи с бурным развитием вычислительной техники. Хотя методики, реализующие данную схему, требуют для расчетов довольно много времени, особенно при больших начальных энергиях частиц, результаты расчетов по этим методикам могут использоваться для верификации методик, использующих различные схемы группировки столкновений.

6. Методы повышения эффективности расчетов

Для повышения эффективности расчетов методом Монте-Карло применяется ряд методов уменьшения дисперсии [1–3, 27]. Одни из них довольно просты, другие весьма нетривиальны. Среди них можно выделить несколько классов.

Методы обрыва траектории относятся к самым простым способам ускорения расчетов. Они позволяют уменьшить количество вычислений за счет прекращения моделирования траектории частицы и применяются, если дальнейшее моделирование траектории не повлияет на вычисляемый результат. Эти методы применяются, в частности, в случаях, когда параметры траектории выходят за пределы определенной части фазового пространства. Например, к таким случаям относятся: гибель частицы по времени, гибель по энергии.

Методы изменения количества ветвей траектории в интересующей нас части пространства. К ним относятся, в первую очередь, расщепление и рулетка, когда в важных областях моделируется большее число траекторий с пропорционально уменьшенным весом, а в несущественных – меньшее число с увеличенным весом. К этим методам относится и весовое окно.

Весовые методы модификации моделирования позволяют увеличить количество вкладов в рассчитываемый результат от одной частицы. Любое случайное событие можно разыгрывать не по физическому, а по произвольному распределению, компенсируя это соответствующим изменением веса частицы. В таких методах, например, производится розыгрыш полета частицы в нужном направлении, или выбор других фазовых координат в желаемом диапазоне. Этот класс методов включает в себя экспоненциальное преобразование, вынужденные столкновения, розыгрыш испускания фотонов нейтронами.

Метод пробных частиц [3], представляет класс наиболее сложных методов уменьшения дисперсии, который применяется при вычислении потока частиц в малый объем пространства.

Литература

1. Кочубей Ю. К., Житник А. К., Артемьева Е. В., Донской Е. Н., Ельцов В. А., Иванов Н. В., Кибкало А. А., Моренко А. И., Моренко Л. З., Огнев С. П.,

- Ронжин А. Б., Рослов В. И., Семенова Т. В., Субботин А. Н., Трущина Е. Л. Программа C-95. Моделирование совместного переноса нейтронов и гамма-квантов методом Монте-Карло // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2000. Вып. 3. С. 49–52.
2. Донской Е. Н. Методика и программа ЭЛИЗА для решения методом Монте-Карло задач совместного переноса гамма-излучения, электронов и позитронов. Вторая версия // VI Междотраслевая конференция по радиационной стойкости: Сборник докладов (г. Саров, 14–20 октября 2002 г.). Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ. 2003. С. 93–99.
3. Донской Е. Н., Ельцов В. А., Житник А. К., Иванов Н. В., Кочубей Ю. К., Моренко А. И., Моренко Л. З., Рослов В. И., Ронжин А. Б., Субботин А. Н. Метод Монте-Карло во ВНИИЭФ // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1993. Вып. 2. С. 61–64.
4. Vasilyev A. P., Kuropatenko E. S., Lutov V. D., Orlov A. I. Nuclear Data Library – BAS. The history of development and validation for criticality safety calculation // ICNC 95. Proceeding of the International Conference of Nuclear Criticality Safety / Albuquerque, New Mexico, USA. September 17–21. 1995 P. 2.56–2.60.
5. Howerton R. J., Cullen D. E., Haight R. C., MacGregor M. H., Perkins S. T., Plechaty E. F. The LLL Evaluated Nuclear Data Library (ENDL): Evaluation Techniques, Reaction Index, and Descriptions of Individual Reactions // LLNL Report UCRL-50400. Vol. 15. Part A. Sept. 1975.
6. Kinsey R. Data Formats and Procedures for Evaluated Nuclear Data File, ENDF // Brookhaven National Laboratory Report BNL-NCS-50496 (ENDF 102), 2nd Edition (ENDF/B-V). Oct. 1979.
7. McLane V., Dunford C. L., Rose P. F. ENDF-102. Data formats and procedures for the evaluated nuclear data file ENDF-6 // Upton, N.Y. 11973: National Nuclear Data Center Brookhaven National Laboratory, 1997.
8. Chadwick M. B., Oblozinsky P., Herman M. et al. ENDF/B-VII.0: Next Generation Evaluated Nuclear Data Library for Nuclear Science and Technology // Nuclear Data Sheets. V. 107. N 12. 2006. P. 2931–3060.
9. Storm E., Israel H. I. Photon Cross Sections from 1 keV to 100 MeV for Elements $Z = 1$ to $Z = 100$ // Nucl. Data Tables. 1970. Vol. A7. P. 565–681.
10. Veigele W. J. Photon Cross Sections from 0.1 keV to 1 MeV for Elements $Z = 1$ to $Z = 94$ // Atomic Data Tables. 1973. Vol. 5. P. 51–111.
11. Cullen D. E., Hubbell J. H., Kissel L. EPDL97: the Evaluated Photon Data Library, '97 Version // Lawrence Livermore National Laboratory. Report UCRL-50400. Vol. 6. Rev. 5. Sept. 1997.
12. Библиотека фотонейтронных данных (<http://www-nds.iaea.org/photoneuclear>).
13. Cullen D. E., Perkins S. T., Seltzer S. M. Tables and Graphs of Electron Interaction Cross Sections Derived from the LLNL Evaluated Electron Data Library (EEDL), $Z = 1–100$ // Lawrence Livermore National Laboratory. Report UCRL-50400. Vol. 31. November 1991.
14. Perkins S. T. et al. Tables and Graphs of Atomic Subshell and Relaxation Data Derived from the LLNL Evaluated Atomic Data Library (EADL) // Lawrence Livermore National Laboratory. Report UCRL-50400. Vol. 30. 1991.
15. Кочубей Ю. К. Статистическое моделирование кинетических процессов. Саров. 2004.
16. Бусленко Н. П., Голенко Д. И., Соболев И. М., Срагович В. Г., Шрейдер Ю. А. Метод статистических испытаний (метод Монте-Карло). СМБ. М.: Физматгиз, 1962.
17. Ермаков С. М., Михайлов Г. А. Статистическое моделирование. М.: Наука, 1982.
18. Иванов А. Н., Иванов Н. В. Учет теплового движения атомов среды при решении задач переноса нейтронов методом Монте-Карло // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2003. Вып. 4. С. 25–32.
19. Berger M. J. Monte Carlo Calculation of the Penetration and Diffusion of Fast Charged Particles // Methods in computational physics. New York–London: Academic Press. 1963. Vol. 1. P. 135–215.
20. Аккерман А. Ф., Никитушев Ю. М., Ботвин В. А. Решение методом Монте-Карло задач переноса быстрых электронов в веществе. Алма-Ата: Наука, 1972.
21. Баранов В. Ф. Дозиметрия электронного излучения. М.: Атомиздат, 1974.
22. Кольчужкин А. М., Учайкин В. В. Введение в теорию прохождения частиц через вещество. М.: Атомиздат, 1978.
23. Аккерман А. Ф., Грудский М. Я., Смирнов В. В. Вторичное излучение из твердых тел под действием гамма-квантов. М.: Энергоатомиздат, 1986.
24. Аккерман А. Ф. Моделирование траекторий заряженных частиц в веществе. М.: Энергоатомиздат, 1991.
25. Bielajew A. F. Fundamentals of the Monte Carlo method for Neutral and Charged Particle Transport. Michigan, USA: The University of Michigan, 2000.
26. Иванов Н. В., Кочубей Ю. К. Применение приближения Фоккера-Планка для решения методом Монте-Карло задач переноса быстрых электронов // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики. 1982. Вып. 1(9). С. 18–23.
27. Артемьева Е. В., Баканов В. В., Донской Е. Н., Ельцов В. А., Житник А. К., Залялов А. Н., Иванов Н. В., Огнев С. П., Ронжин А. Б., Рослов В. И., Семенова Т. В. Моделирование совместного переноса нейтронов и гамма-квантов методом Монте-Карло // Труды РФЯЦ-ВНИИЭФ. 2008. Вып. 13. С. 40–49. Саров. ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ».