

МЕХАНИЗМ УСИЛЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ В КАНАЛЕ ЛИДЕРА МОЛНИИ, СПОСОБНЫЙ ОТВЕЧАТЬ ЗА ГЕНЕРАЦИЮ УБЕГАЮЩИХ ЭЛЕКТРОНОВ

Л. П. Бабич, Е. И. Бочков, И. М. Куцык

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ»,
пр. Мира, 37, Саров, Нижегородская область, 607188, Россия

Анализируется возможность усиления электрического поля в лидере молнии до уровня, допускающего убегание электронов низких энергий. Распространение волны ионизации в преионизованном газе позволяет преодолеть ограничение на напряженность поля, накладываемое поперечным расширением фронта стримера. Численным моделированием демонстрируется, что на заключительной стадии формирования новой ступени лидера в каналах стримерной зоны перед новой ступенью возможна генерация поля с напряженностью, достаточной для убегания электронов и, следовательно, для генерации импульсов рентгеновского и гамма излучений, наблюдавшихся в корреляции со ступенями лидера.

Введение

В корреляции с искусственными и природными молниями неоднократно наблюдались вспышки рентгеновского и гамма излучений [1–5] с длительностью ~ 1 мкс и энергией фотонов до ~ 1 МэВ. Наиболее вероятным механизмом, способным объяснить вспышки является тормозное излучение электронов, ускоряющихся (убегающих) до высоких энергий в сильных электрических полях («high-field runaway» [6]). Явление убегания в плотных газах почти полвека изучается в экспериментах с лабораторными разрядами (см. [7–11] и цитированную литературу), начиная с пионерских экспериментов [12–15] и анализа явления с учетом поля пространственного заряда [16]. Первые оценки скорости этого процесса, выполненные более полвека назад [17], уточнены численным моделированием [18, 19]. Однако проблема механизма генерации в канале молнии поля с напряженностью, достаточной для генерации интенсивных потоков убегающих электронов (УЭ) остается нерешенной.

В работе [19] предполагается, что сильное поле возникает в результате присоединения к лидеру очередной ступени, когда заряд головки лидера быстро перемещается на новый конец лидера, причем время жизни сильного поля определяется временем формирования стримерной короны, выравнивающей распределение поля. Авторы анализируют возможность убегания электронов на фронте стримера короны и дальнейшее ускорение вдали от фронта. Этот подход получил развитие в

работе [20]. Но рентгеновское излучение, а значит и УЭ, генерируются ступенчатым лидером не во время формирования стримерной короны, а через ~ 0.1 – 1 мкс после электромагнитного импульса, обусловленного развитием новой ступени [5].

В работе [21] выполнена оценка числа УЭ на фронте волны ионизации (ВИ), согласно которой одной ступенью лидера генерируется $\sim 3 \cdot 10^{12}$ УЭ. В это число существенный вклад дают процессы лавинного размножения УЭ в области головки лидера размером ~ 10 см. Для напряженности поля $E \sim 200$ кВ/см авторы используют сильно завышенную оценку характерной длины размножения УЭ $l_e \sim 1$ см. Так, согласно результатам численного моделирования лавины УЭ методом Монте-Карло $l_e = 16$ см при $E = 218$ кВ/см [22–24]. Размножение УЭ может иметь место на больших расстояниях от головки лидера в сравнительно слабых полях. При потенциале головки лидера $U_L = 20$ МВ усиление лавины оценивается сверху величиной $\exp(U_L / \langle \epsilon_{re} \rangle) \approx 17$, где $\langle \epsilon_{re} \rangle \approx 7$ МэВ – средняя энергия УЭ в лавине [22–25].

В настоящей работе численным моделированием демонстрируется, что после контакта стримерных зон первичного отрицательного лидера и встречного вторичного лидера и последующего старта новой ступени лидера молнии в каналах стримерной зоны перед ее фронтом возможна генерация поля с напряженностью, достаточной для генерации УЭ и, в конечном итоге, генерации импульсов излучения рентгеновского и гамма диапазонов, наблюдавшихся в корреляции со ступенями лидера [1–5] (см. численный анализ [26]).

Механизм генерации убегающих электронов лидером молнии

Для эффективной генерации УЭ при нормальных условиях требуются поля с напряженностью E не менее 240 кВ/см [18, 19]. Механизм генерации таких полей в канале или окрестности молнии неясен. Согласно оценкам [27], E в головке лидера не превосходит 50 кВ/см, а в самом канале еще меньше. Известно, что сильное поле существует в головке стримеров, составляющих чехол лидера, но в работе [28] показано, что максимальное значение E на фронте стримера не превышает ~ 150 кВ/см, так как при бóльших E скорость ионизации вдоль и поперек направления распространения канала становятся близкими. В результате канал расширяется, что ведет к ослаблению поля. Этот вывод подтверждается численным моделированием [20]. В работах [19, 20] предполагалось, что в момент расщепления стримера E в его головке может увеличиваться до $\sim 10 \cdot E_{th}$, где $E_{th} \approx 30$ кВ/(см·атм.) – порог пробоя сухого воздуха. Однако не ясно, как долго может существовать столь сильное поле. Кроме того, рентгеновское излучение длинного искрового разряда регистрируется не на стадии формирования стримерной короны, а в момент контакта положительных и отрицательных стримеров [29].

Ограничение на величину E можно преодолеть, предположив, что ВИ распространяется уже

по предварительно ионизованному каналу. Известно, что лидер молнии распространяется ступенчатым образом [27, 30, 31]. В книге [27] описана следующая схема распространения отрицательного лабораторного лидера, полученная на основании фоторазвертки процесса. Лидер медленно движется вместе со своей стримерной короной. На границе короны формируется вытянутое вдоль вектора поля плазменное образование, от концов которого стартуют стримеры в направлениях к и от головки лидера. В некий момент времени от этого образования стартует, так называемый, объемный лидер (рис. 1а), положительная головка которого быстро движется навстречу старому лидеру. После контакта отрицательной стримерной короны старого лидера с положительной короной объемного лидера начинается развитие новой ступени. В процессе перераспределения зарядов потенциал старого лидера U_L переносится к объемному лидеру (рис. 1б). Скачок потенциала в теле объемного лидера должен приводить к тому, что вдоль каналов его отрицательной стримерной короны, стартует новая ВИ (рис. 1с), которая распространяется в преионизованном канале. Поскольку скорость ВИ обратно пропорциональна логарифму от концентрации электронов перед фронтом ВИ [27], то скорость расширения фронта в радиальном направлении существенно меньше продольной скорости ВИ; в результате напряженность поля на фронте может достигать необходимых для генерации УЭ значений ~ 240 кВ/см.

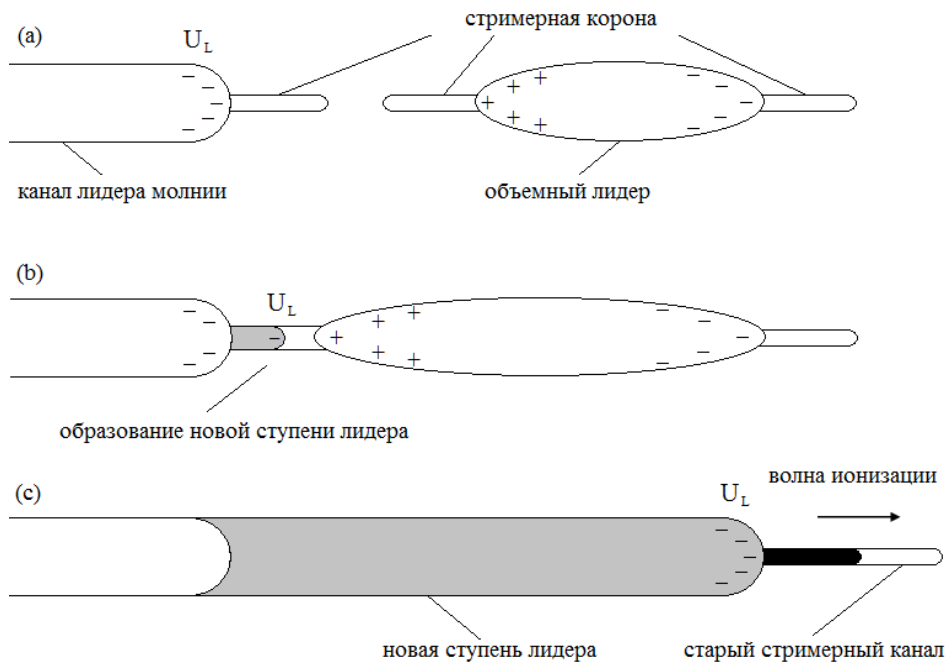


Рис. 1. Схема генерации поля с напряженностью, необходимой для убегания электронов на фронте лидера молнии

Математическая формулировка задачи

В данной работе мы моделируем распространение вторичной ВИ вдоль старых отрицательных стримерных каналов, исходящих из головки объемного лидера (см. рис. 1с). Полагаем, что скачок потенциала на фронте объемного лидера приводит к возникновению в области головки объемного лидера электрического поля с напряженностью 50 кВ/см. Размер стримерной зоны лидеров лабораторных разрядов ~ 1 м [27]. В лидерах молнии стримерная зона, скорее всего, простирается на десятки метров. Поскольку современная вычислительная техника позволяет моделировать стримеры длиной несколько сантиметров, ограничимся исследованием начальной стадии распространения ВИ. Задача решается в цилиндрической системе координат (z, ρ) в следующей постановке. В области с размерами $L_0 \times R_0$ задано стационарное, однородное электрическое поле с напряженностью $\vec{E}_{\text{ext}}(\vec{r}) = -E_0 \cdot \vec{e}_z$. В начальный момент времени существует проводящий канал длиной L_0 , в котором большая часть электронов прилипла к молекулам кислорода. Численно моделируется развитие канала и находится число электронов, перешедших в режим убегания.

Кинетика электронов низких энергий (e), положительных (p) и отрицательных (n) ионов в разряде описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_e}{\partial t} + \text{div}(n_e \vec{v}_e - D_e \vec{\nabla} n_e) &= \\ &= (v_{\text{ion}} - v_{\text{att}}) \cdot n_e - \beta_{ep} \cdot n_e \cdot n_p + S_{ph}, \\ \frac{\partial n_p}{\partial t} + \text{div} n_p \vec{v}_p &= \\ &= v_{\text{ion}} \cdot n_e - \beta_{ep} \cdot n_e \cdot n_p - \beta_{pn} \cdot n_p \cdot n_n + S_{ph}, \\ \frac{\partial n_n}{\partial t} + \text{div} n_n \vec{v}_n &= v_{\text{att}} \cdot n_e - \beta_{pn} \cdot n_p \cdot n_n, \end{aligned} \quad (1)$$

где n_e , n_p , n_n – концентрации; $\vec{v}_e = -\mu_e \vec{E}$, $\vec{v}_p = \mu_p \vec{E}$, $\vec{v}_n = -\mu_n \vec{E}$ – скорости дрейфа, μ_e и $\mu_{p,n}$ – подвижности электронов и ионов; D_e – коэффициент диффузии электронов; v_{ion} – частота ионизации молекул воздуха электронами низких энергий; β_{ep} и β_{pn} – коэффициенты рекомбинации электронов с положительными ионами и по-

ложительных и отрицательных ионов; $v_{\text{att}} = k_{\text{diss}} N_{\text{O}_2} + k_{\text{thr}} N^2$ – частота прилипания электронов к молекулам кислорода; k_{diss} и k_{thr} – коэффициенты диссоциативного и трех-частичного прилипания N и N_{O_2} – локальные концентрации воздуха и молекул кислорода на z ; $v_{\text{att}} S_{ph}$ – источник фотоионизации.

Начальные концентрации заряженных частиц в старом стримерном канале:

$$\begin{aligned} n_e^{\text{ch}}(z, \rho) &= n_e^{\text{ch},a} \cdot \exp(-\rho^2/l_p^2), \\ n_p^{\text{ch}}(z, \rho) &= n_e^{\text{ch}}(z, \rho) + n_p^{\text{ch},a} \cdot \exp(-\rho^2/l_p^2), \\ n_n^{\text{ch}}(z, \rho) &= n_p^{\text{ch}}(z, \rho) - n_e^{\text{ch}}(z, \rho), \end{aligned} \quad (2)$$

где $n_p^{\text{ch},a}$ и $n_e^{\text{ch},a}$ – концентрации на оси симметрии канала.

Для старта ВИ в начальный момент времени задается облако нейтральной плазмы с центром в начале координат ($z_m = 0$):

$$\begin{aligned} n_e^{\text{in}}(z, \rho) &= n_m \cdot \exp(-(z - z_m)^2/l_z^2) \cdot \exp(-\rho^2/l_p^2), \\ n_p^{\text{in}}(z, \rho) &= n_e^{\text{in}}(z, \rho), \\ n_n^{\text{in}}(z, \rho) &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Объединяя (2) и (3), получаем начальные условия для системы (1):

$$\begin{aligned} n_e(z, \rho, 0) &= n_e^{\text{ch}}(z, \rho) + n_e^{\text{in}}(z, \rho), \\ n_p(z, \rho, 0) &= n_p^{\text{ch}}(z, \rho) + n_p^{\text{in}}(z, \rho), \\ n_n(z, \rho, 0) &= n_n^{\text{ch}}(z, \rho) + n_n^{\text{in}}(z, \rho). \end{aligned} \quad (4)$$

Система (1) замыкается уравнениями для самосогласованного электрического поля:

$$\begin{aligned} \Delta \Phi_{\text{int}} &= -\frac{\rho_q}{\epsilon_0}, \\ \vec{E} &= -\vec{\nabla} \Phi_{\text{int}} + \vec{E}_{\text{ext}}, \end{aligned} \quad (5)$$

где Φ_{int} – потенциал поля пространственного заряда, возникающего за счет нарушения нейтральности плазмы, $\rho_q = e \cdot (n_p - n_n - n_e)$, ϵ_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума, e – элементарный заряд.

На границе расчетной области потенциал

$$\Phi_{\text{int}}(\vec{r}_{\text{bound}}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_p} \frac{\rho_q(\vec{r}') \cdot dV'}{|\vec{r}_{\text{bound}} - \vec{r}'|} \quad (6)$$

вычисляется интегрированием по области с объемом V_p , в которой $|\rho_q| \geq 0,001 \cdot |\rho_q|^{\max}$, где $|\rho_q|^{\max}$ – максимальное значение модуля плотности заряда [32].

Для расчета источника фотоионизации S_{ph} используется модель, предложенная в работе [33] и развитая далее в работе [32]. В данной модели расчет интеграла из классической модели [34] заменяется решением трех уравнений Гельмгольца.

Число электронов $N_{re}(t)$, перешедших в режим убегания к моменту времени t :

$$N_{re}(t) = \int_0^t \int_{V_{sim}} v_{run}(E(z, \rho, t')) \cdot n_e(z, \rho, t') \cdot dV' \cdot dt' \quad (7)$$

где V_{sim} – объем области моделирования, $v_{run}(E)$ – частота перехода тепловых электронов в режим убегания, вычисленная методом Монте-Карло в работе [18] для различных значений пороговой энергии убегания $\varepsilon_{th,run}$ в диапазоне $E = 240\text{--}400$ кВ/см при 1 атм.

Вычисления выполнены для $P = 1$ атм., парциального давления кислорода 0,2 атм., $L_0 = 4$ см, $R_0 = 4$ мм, $E_0 = 50$ кВ/см; $l_z = l_p = 0,5$ мм. Величина $n_e^{ch,a}$ варьируется. Значения величины $n_p^{ch,a}$ определяются из решения системы (1) без учета потоковых членов. Полагалось, что $n_p(t=0) = 10^{20} \text{ м}^{-3}$; расчеты велись до момента времени \tilde{t} , когда $n_e(\tilde{t}) = n_e^{ch,a}$. Согласно расчетам $\tilde{t} \approx 1$ мкс, $n_p^{ch,a} = n_p(\tilde{t}) \approx 5 \cdot 10^{17} \text{ м}^{-3}$. Использованы те же, что и в работе [35], зависимости μ_e , $\mu_{p,n}$, D_e , v_{ion} , β_{ep} , β_{pn} , k_{diss} , k_{thr} от E и P и данные [33, 36], необходимые для вычисления S_{ph} . Число УЭ $N_{re}(t)$ вычисляется для $\varepsilon_{th,run} = 8$ кэВ, для $v_{run}(E)$ использованы данные работы [18].

Результаты и анализ

Задача решается для $n_e^{ch,a} = 10^{13}, 10^{14}, 10^{15} \text{ м}^{-3}$ методом конечных разностей [37, 38]. Моделирование прекращается в момент времени $t_{zf=3\text{cm}}$, когда максимум напряженности на фронте ВИ E_f оказывался в точке $z_f = 3$ см. Результаты приведены в табл. 1, где v_f – скорость фронта ВИ в мо-

мент $t_{zf=3\text{cm}}$, k_{re} – число УЭ на единицу длины, рожденных ВИ на участке от 2,9 до 3,0 см:

$$k_{re} = \frac{N_{re}(t_{zf=3\text{cm}}) - N_{re}(t_{zf=2.9\text{cm}})}{1 \text{ мм}} \quad (9)$$

Таблица 1

Результаты расчетов

$n_e^{ch,a}, \text{ м}^{-3}$	$t_{zf=3\text{cm}}, \text{ нс}$	$E_f, \text{ кВ/см}$	$v_f, \text{ м/с}$	$k_{re}, 1/\text{м}$
10^{13}	3.5	284	$2 \cdot 10^7$	$8 \cdot 10^8$
10^{14}	3.3	252	$3 \cdot 10^7$	$2 \cdot 10^7$
10^{15}	3.1	202	$3 \cdot 10^7$	$3 \cdot 10^4$

На рис. 2 иллюстрируются распределения E и n_e вдоль оси разряда для $n_e^{ch,a} = 10^{13}$ в зависимости от времени. Видно, что при $n_e^{ch,a} = 10^{13}, 10^{14} \text{ м}^{-3}$ достигаются значения E , превышающие величину 240 кВ/см, необходимую согласно [18] для эффективной генерации УЭ: на единицу длины генерируется $\sim 10^7\text{--}10^9$ электронов с энергией, большей $\varepsilon_{th,run} = 8$ кэВ.

Оценим число УЭ, генерируемых ступенью лидера. Согласно [27] вокруг головки лидера с потенциалом $U_L = 1,5$ МВ в стримерной зоне радиусом $R_s \approx 1,5$ м развиваются $N_s \approx 1,2 \cdot 10^5$ стримеров. Время жизни стримера $t_{life} \sim R/v_{s,min} \sim 10$ мкс, где $v_{s,min} \sim 10^5$ м/с – минимальная скорость стримера [27]. Только в каналах «молодых» стримеров длиной $l_s = v_{s,min} \cdot \tilde{t} \approx 10$ см концентрация электронов достаточна для старта новой ВИ. Следовательно, в головке лидера генерируется порядка $N_{re} \approx l_s \cdot k_{re}(\tilde{t}/t_{life}) \cdot N_s \approx 10^{12}$ УЭ. Здесь $(\tilde{t}/t_{life}) \approx 0,1$ – доля стримеров, по которым проходит ВИ. Поскольку потенциал лидера молнии, скорее всего, значительно выше, чем 1,5 МВ, то число УЭ существенно больше. Заметим, что для воспроизведения зарегистрированной энергии рентгеновского излучения [4], требуется генерация одной ступенью лидера порядка $10^{10} - 4 \cdot 10^{11}$ УЭ высоких энергий [26].

Заключение

Исследована возможность усиления электрического поля на фронте лидера молнии до уровня, необходимого для убегания электронов низких

энергий. Анализ основан на представлении о волне ионизации, распространяющейся в преионизованной области перед фронтом лидера, что позволяет преодолеть ограничение напряженности поля, обусловленное поперечным расширением фронта лидера. Выполнено численное моделирование развития волны ионизации с учетом дрейфового движения электронов низких энергий, положительных и отрицательных ионов в самосогласованном электрическом поле, диффузии электронов, ионизации молекул воздуха электронным ударом, рекомбинации зарядов, прилипания электронов к молекулам кислорода и фотоионизации. Согласно результатам расчетов с начальным пространственным распределением электронов с характерным размером ~ 500 мкм и максимальными значениями концентрации 10^{13} и 10^{14} м $^{-3}$ генерируется поле с напряженностью, достаточной для убегания электронов и, следовательно, для генерации вспышек излучения рентгеновского и гамма диапазонов, наблюдавшихся на поверхности земли в корреляции со ступенями лидера [4]. Число убегающих электронов (N_{re}), генерируемое в головке лидера, оценивается величиной $N_{re} \sim 10^{12}$, близкой к числу УЭ, необходимому для воспроизведения зарегистрированной в [4] энергии рентгеновского излучения [26]. Предсказывается, что число УЭ, генерируемое разрядом молнии, намного превышает 10^{12} .

Список литературы

1. Moore C. B., Eack K. B., Aulich G. D., Rison W. Energetic radiation associated with lightning stepped-leaders // *Geophys. Res. Lett.* 2001. V. 28. P. 2141.
2. Dwyer J. R. Energetic radiation produced during rocket-triggered lightning // *Science*. 2003. V. 299. P. 694–697.
3. Dwyer J. R., Rassoul H. K., Al-Dayeh M. et al. A ground level gamma-ray burst observed in association with rocket-triggered lightning // *Geophys. Res. Lett.* 2004. V. 31. L05119.
4. Dwyer J. R., Rassoul H. K., Al-Dayeh M. et al. X-ray bursts associated with leader steps in cloud-to-ground lightning // *Geophys. Res. Lett.* 2005. V. 32. L01803.
5. Howard J., Uman M. A., Dwyer J. R. et al. Co-location of lightning leader x-ray and electric field change sources // *Geophys. Res. Lett.* 2008. V. 35. L13817.
6. Dwyer J. R. Source mechanisms of terrestrial gamma-ray flashes // *J. Geophys. Res.* 2008. V. 113. D10103.
7. Бабич Л. П., Лойко Т. В., Цукерман В. А. Высоковольтный наносекундный разряд в плотных газах при больших перенапряжениях, развивающийся в режиме убегания электронов // *УФН*. 1990. Т. 160. С. 49–82.
8. Babich L. P. Highenergy phenomena in electric discharges in dense gases: theory, experiment and natural phenomena. Futurepast Inc.. Arlington. Virginia. USA. 2003.
9. Бабич Л. П. Анализ нового механизма убегания электронов и рекордных токов убегающих электронов, достигнутых в новых экспериментах с разрядами в плотных газах. *УФН*. 2005. Т. 175. С. 1069–1091.
10. Бабич Л. П., Лойко Т. В. Субнаносекундные импульсы убегающих электронов, генерируемые в атмосфере импульсами высокого напряжения микросекундной длительности // *ДАН*. 2009. Т. 429. С. 35–39.
11. Бабич Л. П., Лойко Т. В., Родигин А. В. Калибровка детекторов ионизирующих излучений с помощью пучка убегающих электронов субнаносекундной длительности, генерируемого разрядом в открытой атмосфере при высоких перенапряжениях // *ПТЭ*. 2014. № 3. С. 21–27.
12. Станкевич Ю. Л., Калинин В. Г. Быстрые электроны и рентгеновское излучение в начальной стадии импульсного искрового разряда // *ДАН СССР*. 1967. Т. 177. С. 72–75.
13. Noggle R. C., Krider E. P., and Wayland J. R. A search for X-rays from helium and air discharges at atmospheric pressure // *J. Appl. Phys.* 1968. V. 39. P. 4746–4748.
14. Тарасова Л. В., Худякова Л. Н. Рентгеновское излучение импульсных разрядов в воздухе // *ЖТФ*. Т. 39. С. 1530.
15. Тарасова Л. В., Худякова Л. Н., Лойко Т. В., Цукерман В. А. Быстрые электроны и рентгеновское излучение наносекундных импульсных разрядов при давлениях 0.1-760 Торр // *ЖТФ*. 1974. Т. 44. С. 564.
16. Бабич Л. П., Станкевич Ю. Л. Критерий перехода от стримерного механизма газового разряда к непрерывному ускорению электронов // *ЖТФ*. 1972. Т. 42. С. 1669–1673.
17. Гуревич А. В. К теории эффекта убегающих электронов // *ЖЭТФ*. 1960. Т. 39. С. 1296–1301.
18. Bakhov I. K., Babich L. P., Kutsyk I. M. Temporal characteristics of runaway electrons in electron-neutral collision dominated plasma of dense

gases. Monte Carlo calculations // IEEE Trans. on Plasma Science. 2000. V. 28. P. 1254–1262.

19. Moss G. D., Pasko V. P., Liu N. and Veronis G. Monte Carlo model for analysis of thermal runaway electrons in streamer tips in transient luminous events and streamer zones of lightning leaders // J. Geophys. Res. 2006. V. 111. A02307.

20. Celestin S., and Pasko V. P. Energy and fluxes of thermal runaway electrons produced by exponential growth of streamers during the stepping of lightning leaders and in transient luminous events // J. Geophys. Res. 2011. V. 116. A03315.

21. Gurevich A. V., Zybin K. P., and Medvedev Yu. V. Runaway breakdown in strong electric field as a source of terrestrial gamma flashes and gamma bursts in lightning leader steps // Phys. Lett. A. 2007. V. 361. P. 119–125.

22. Бабич Л. П., Бочков Е. И. Детерминистические методики численного моделирования лавин убегающих электронов высоких энергий // ЖЭТФ. 2011. Т. 139. С. 2568–2578.

23. Куцык И. М., Бабич Л. П., Донской Е. Н., Бочков Е. И. Численный анализ концепции лабораторного эксперимента по демонстрации пробоя на убегающих электронов при нормальных условиях и высоких перенапряжениях // Письма в ЖЭТФ. 2012. Т. 95. С. 712–717.

24. Куцык И. М., Бабич Л. П., Донской Е. Н., Бочков Е. И. Анализ результатов лабораторного эксперимента по наблюдению лавины убегающих электронов в воздухе при высоких перенапряжениях // Физика плазмы. 2012. Т. 38. С. 969–976.

25. Бабич Л. П., Донской Е. Н., Илькаев Р. И., Куцык И. М., Рюссель-Дюпре Р. А. Фундаментальные характеристики лавины релятивистских убегающих электронов в воздухе // Физика плазмы. 2004. Т. 30. С. 666–674.

26. Babich L. P., Kutsyk I. M., Donskoi E. N. and Dwyer J. R. Analysis of the experiment on registration of X-rays from the stepped leader of a cloud-to-ground lightning discharge // J. Geophys. Res. 2013. V. 118. P. 2573–2582.

27. Bazelyan E.M. and Raizer Yu.P. Lightning Physics and Lightning Protection. IOP Publishing. Bristol. 2000.

28. Райзер Ю. П., Симаков А. Н. Чем определяется радиус и максимум поля в головке длинных стимеров? // Физика плазмы. 1998. Т. 24. С. 754.

29. Kochkin P. O., Nguyen C. V., van Deursen A. P. J. and Ebert U. Experimental study of hard X-rays emitted from meter-scale positive discharges in air // J. Phys. D: Appl. Phys. 2012. V. 45. 425202.

30. Uman M. The Lightning Discharge. Dover Publ. Mineola. New York. 2001.

31. Rakov V. A. and Uman M. A. Lightning Physics and Effects. Cambridge Univ. Press. New York. 2003.

32. Bourdon A., Pasko V.P., Liu N. Y. et al. Efficient models for photoionization produced by non-thermal gas discharges in air based on radiative transfer and the Helmholtz equations // Plasma Sources Sci. Technol. 2007. V. 16. P. 656–678.

33. Luque A., Ebert U., Montijn C. and Hundsdoerfer W. Photoionization in negative streamers: Fast computations and two propagation modes // Appl. Phys. Lett. 2007. V. 90. 081501.

34. Железняк М. В., Мнацакян А. Х., Сизых С.В. Фотоионизация смесей азота и кислорода излучением газового разряда // ТВТ. 1982. Т. 20. С. 423–428.

35. Бочков Е. И., Бабич Л. П., Куцык И. М. Численное моделирование узких биполярных импульсов, генерируемых грозowymi разрядами // ЖЭТФ. 2013. Т. 144. вып. 7. С. 205–214.

36. Liu N., and Pasko V. P. Effects of photoionization on propagation and branching of positive and negative streamers in sprites // J. Geophys. Res. 2004. V. 109. A04301.

37. Leonard B. P. The ULTIMATE conservative difference scheme applied to unsteady one-dimensional advection // Appl. Mech. and Eng. 1991. V. 88. P. 17–74.

38. Zalesak S. T. Fully multidimensional flux-corrected transport algorithms for fluids // J. Comp. Phys. 1979. V. 31. P. 335–365.