

**ПРИБЛИЖЕННЫЕ ПОДХОДЫ К ОПИСАНИЮ ЯДЕРНЫХ РЕАКЦИЙ,
ОСНОВАННЫЕ НА РАЗЛОЖЕНИЯХ ПО ОСЦИЛЛЯТОРНОМУ БАЗИСУ**
**APPROXIMATE APPROACHES BASED ON EXPANSIONS OVER THE OSCILLATOR
BASIS TO DESCRIPTION OF NUCLEAR REACTIONS**

A. С. Соловьев, С. Ю. Игашов
A. S. Solovyev, S. Yu. Igashov

Всероссийский научно-исследовательский институт автоматики имени Н. Л. Духова, Москва, Россия
Dukhov Research Institute of Automatics (VNIIA), Moscow, Russia

Важным классом процессов ядерного синтеза являются реакции радиационного захвата, представляющие значительный интерес особенно для ядерной астрофизики. В настоящей работе обсуждаются теоретические основы микроскопического и полумикроскопического подходов к описанию таких реакций с использованием разложений по базису осцилляторных функций (собственных функций трехмерного гармонического осциллятора), занимающих особое место в теоретической ядерной физике. Первый из них опирается на алгебраическую версию модели резонирующих групп, второй комбинирует алгебраические версии модели резонирующих групп и модели условий ортогональности. Демонстрируется применимость данных подходов.

The important class of nuclear fusion processes is the radiative capture reactions representing significant interest in particular for nuclear astrophysics. In the present work theoretical fundamentals of microscopic and semimicroscopic approaches using expansions over the oscillator functions (eigen functions of three-dimensional harmonic oscillator), that play an important role in theoretical nuclear physics, for description of such reactions are discussed. The former approach is based on the algebraic version of the resonating group model, the latter one combines the algebraic versions of the resonating group model and the orthogonality conditions model. The applicability of the approaches is demonstrated.

Как известно, одной из наиболее последовательных математических реализаций кластерных представлений о структуре ядра и ядерных реакций является модель резонирующих групп (МРГ) [1]. В простейшем одноканальном варианте этой модели полная волновая функция ядерной системы ищется в виде антисимметризованного произведения внутренних волновых функций соответствующих ядер (кластеров) и волновой функции их относительного движения. Разложение волновой функции относительного движения кластеров в ряд по базису осцилляторных функций позволяет записать полную волновую функцию в виде:

$$\Psi = \sum_{J=J_0}^{\infty} \sum_{M=-J}^J \sum_{s_1+s_2}^{J_1+J_2} \sum_{l=|J-s_1|}^{J+s_1} \sum_{v=V_0}^{\infty} C_{J^{\pi} M l s v} \Psi_{J^{\pi} M l s v}, \quad (1)$$

$$\Psi_{J^{\pi} M l s v} = N_{J^{\pi} l s v} A \left\{ \sum_{m+\sigma=M} C_{l m \sigma}^{J M} \left[\phi_{s_1}^{(1)} \phi_{s_2}^{(2)} \right]_{s \sigma} f_{v l m}(\mathbf{q}) \right\}, \quad (2)$$

$$f_{v l m}(\mathbf{q}) = (-1)^{(v-l)/2} \sqrt{\frac{2\Gamma((v-l+2)/2)}{r_0^3 \Gamma((v+l+3)/2)}} \bar{q}^l L_{(v-l)/2}^{(l+1/2)}(\bar{q}^2) \quad (3)$$

$$\exp(-\bar{q}^2/2) Y_{l m}(\theta, \varphi), \quad \bar{q} = q/r_0,$$

где J, l, s, M, m, σ – полный угловой момент, относительный орбитальный момент, каналый спин и их проекции соответственно; π – четность системы; $C_{J^{\pi} M l s v}$ – коэффициенты разложения полной волновой функции системы Ψ по базисным волновым функциям АВМРГ $\Psi_{J^{\pi} M l s v}$; A – оператор антисимметризации по перестановкам всех пар нуклонов; $C_{l m \sigma}^{J M}$ – коэффициенты Клебша–Гордана; $\phi_{s_1}^{(1)}, \phi_{s_2}^{(2)}$ – внутренние трансляционно-инвариантные волновые функции первого (1) и второго (2) кластеров со спинами s_1 и s_2 соответственно, которые считаются фиксированными и обычно выбираются в виде волновых функций нижайших разрешенных принципом Паули состояний трансляционно-инвариантной осцилляторной

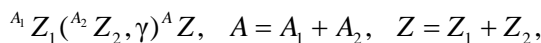
модели оболочек; $f_{\nu m}(\mathbf{q})$ – нормированные осцилляторные функции [2]; ν, ν_0 – число осцилляторных квантов и его минимальное допустимое значение; r_0 – осцилляторный радиус; Γ – гамма-функция; $L_n^{(\beta)}$ – обобщенные полиномы Лагерра; Y_{lm} – сферические функции; $\mathbf{q} = (q, \theta, \varphi)$ – вектор Якоби [1], характеризующий относительное расстояние между кластерами. Следует отметить, что базис осцилляторных функций занимает выделенное место в теоретической ядерной физике и характеризуется многочисленными приложениями [2]. Это во многом обусловлено тем, что достаточно хорошо изучены трансформационные свойства этих функций при переходе от одного набора координат Якоби к другому, они допускают выделение движения общего центра масс, наконец, их интегралы перекрытия вычисляются аналитически. Реализация МРГ, основанная на разложении по базису осцилляторных функций, именуется алгебраической версией МРГ (АВМРГ) [3]. Несмотря на то, что МРГ и АВМРГ физически и математически эквивалентны друг другу, численная реализация АВМРГ значительно проще, поскольку неизвестными являются коэффициенты разложения полной волновой функции (1) по базису АВМРГ (2), удовлетворяющие системе линейных алгебраических уравнений [3]

$$\sum_{s=|s_1-s_2|}^{s_1+s_2} \sum_{l=|j-s|}^{j+s} \sum_{\nu=\nu_0} \left(\langle J^{\pi} M \tilde{l} \tilde{s} \tilde{\nu} | H | J^{\pi} M l s \nu \rangle - E \delta_{ss} \delta_{ll} \delta_{\nu\nu} \right) C_{J^{\pi} M l s \nu} = 0, \tilde{\nu} = \nu_0, \nu_0 + 2, \dots, \quad (4)$$

в которой H, E – гамильтониан и полная энергия ядерной системы. В МРГ, в свою очередь, приходится иметь дело со сложным интегродифференциальным уравнением (в случае многоканальной МРГ – с системой уравнений) для нахождения неизвестной функции (функций) относительного движения кластеров [1]. Приближенным вариантом АВМРГ является алгебраическая версия модели условий ортогональности (АВМУО) [4], в основе которой лежит пренебрежение обменными членами, обусловленными перестановкой пространственных и спин-изоспиновых координат нуклонов из разных кластеров вследствие антисимметризации полной волновой функции ядерной системы, в матричных элементах кулоновского и ядерного потенциалов. Отбрасывание этих обменных членов значительно упрощает вычисления и с физической точки зре-

ния отвечает пренебрежению соответствующими обменными эффектами, обусловленными принципом Паули, во взаимодействии кластеров. В то же время обменные члены в матричных элементах оператора кинетической энергии и всех других операторов рассматриваемой системы, а также обменное ядро учитываются точно.

Важным классом реакций ядерного синтеза являются реакции радиационного захвата, которые схематично обозначаются следующим образом:



где A_1, A_2, A, Z_1, Z_2, Z – массовые числа и числа протонов сталкивающихся ядер и ядра, образующегося в результате их слияния, соответственно. Реакции радиационного захвата представляют значительный интерес для ядерной астрофизики [5, 5]. Сечения этих реакций недоступны для надежных экспериментальных измерений в области низких энергий. Наиболее обоснованным и перспективным способом их определения являются теоретические расчеты в рамках микроскопических подходов, которые используют полностью антисимметризованные трансляционно-инвариантные волновые функции, зависящие от пространственных и спин-изоспиновых координат всех нуклонов ядерной системы. С физической точки зрения такие подходы описывают динамику всех нуклонов ядерной системы, точно учитывают принцип запрета Паули и правильно трактуют движение общего центра масс. Яркими примерами реакций радиационного захвата, которые играют очень важную роль в ядерной астрофизике, служат зеркальные реакции ${}^3\text{H}(\alpha, \gamma){}^7\text{Li}$ и ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$ (см. [5–8] и цитированную там литературу). Наряду с экспериментальными измерениями в области низких и средних энергий, теоретические расчеты сечений этих реакций также сталкиваются с определенными трудностями, в связи с чем интерес к ним не угасает и по сей день.

В длинноволновом приближении парциальное сечение реакции радиационного захвата имеет вид [9]:

$$\sigma_{i \rightarrow f}(E_{\text{ц.м.}}, \Lambda I) = \frac{8\pi(I+1)}{(2s_1+1)(2s_2+1)(2l_i+1)\hbar I((2I+1)!)^2} \left(\frac{E_\gamma}{\hbar c} \right)^{2I+1} \left| \langle J_f^{\pi_f} \| M_I^\Lambda \| J_i^{\pi_i} l_i s_i \rangle \right|^2. \quad (5)$$

Здесь $s_1, s_2, E_{\text{ц.м.}}$ – спины сталкивающихся ядер и энергия их относительного движения; E_γ, I – энер-

гия испускаемого фотона и его мультипольность; M_{μ}^{Λ} – электромагнитный мультипольный оператор [9, 10]. Таким образом, для вычисления сечения (5) необходимо знать выражение для приведенных матричных элементов оператора M_{μ}^{Λ} . Эти матричные элементы в рамках АВМРГ выражаются через сумму произведений приведенных матричных элементов данного оператора в базисе АВМРГ (2) и коэффициентов разложения волновых функций входного и выходного каналов в ряд по базису АВМРГ. Методика расчета матричных элементов электромагнитных мультипольных операторов на базисных функциях АВМРГ детально изложена в нашей работе [10]. Коэффициенты разложения находятся из системы уравнений (4), для решения которой требуются матричные элементы гамильтониана. Эти матричные элементы также могут быть вычислены на основе методики из [10]. Следует отметить, что суммированием выражения (5) по всем возможным значениям квантовых чисел входного и выходного каналов нетрудно получить полное сечение радиационного захвата.

Сечение радиационного захвата, как и любой другой реакции с заряженными частицами, экспоненциально быстро падает по величине с уменьшением энергии в подбарьерной области энергий (астрофизически низкие и средние энергии). В связи с этим более удобной для расчетов величины является астрофизический S -фактор, из которого явно выделена экспоненциальная малость, обусловленная проникаемостью кулоновского барьера:

$$S(E_{\text{ц.м.}}) = E_{\text{ц.м.}} \sigma(E_{\text{ц.м.}}) \exp\left(\sqrt{E_G / E_{\text{ц.м.}}}\right), \quad (6)$$

$$E_G = 2mc^2 \left(\frac{\pi e^2 Z_1 Z_2}{\hbar c} \right)^2 \frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2}, \quad (7)$$

где E_G – энергия Гамова сталкивающихся ядер; m – масса нуклона.

На рис.1 и 2 кривыми изображены результаты теоретических расчетов астрофизических S -факторов реакций ${}^3\text{H}(\alpha, \gamma){}^7\text{Li}$ и ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$ соответственно, а символами – экспериментальные данные (см. [5–8] и приведенные там ссылки). Сплошные линии соответствуют расчету в рамках микроскопического подхода [11–13], основанного на АВМРГ. Пунктирные линии получены на основе полумикроскопического подхода, комбинирующего АВМРГ и АВМУО. В данном подходе АВМУО применяется для упрощенного нахождения волновой функции непрерывного спектра сталкивающихся ядер ${}^4\text{He} + {}^3\text{H}$ и ${}^4\text{He} + {}^3\text{He}$. Для

описания ядерного взаимодействия нуклонов во всех расчетах использовался модифицированный потенциал Хазегавы–Нагаты [14] со значением интенсивности майорановских центральных обменных сил $g_{\text{ц}} = 1,035$. Осцилляторный радиус r_0 в базисных волновых функциях АВМРГ был положен равным 1,22 фм. Как видно из рис. 1, расчетные кривые для астрофизического S -фактора реакции ${}^3\text{H}(\alpha, \gamma){}^7\text{Li}$ находятся в хорошем согласии друг с другом и с одними из наиболее поздних экспериментальных данных [7] (заполненные кружки) по этой реакции, которые к тому же считаются и наиболее надежными. Расчетные кривые для астрофизического S -фактора реакции ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$, изображенные на рис. 2, также находятся в хорошем друг с другом и с представленными современными экспериментальными данными.

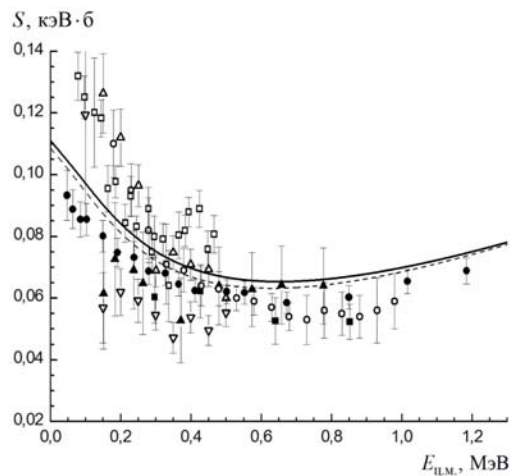


Рис. 1. Астрофизический S -фактор реакции ${}^3\text{H}(\alpha, \gamma){}^7\text{Li}$ (пояснения см. в тексте)

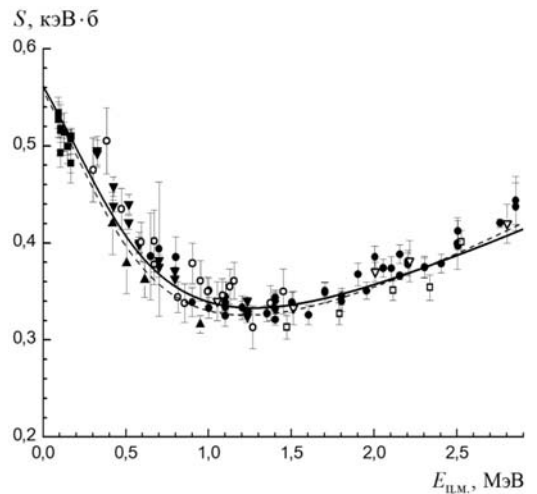


Рис. 2. Астрофизический S -фактор реакции ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$ (пояснения см. в тексте)

Таким образом, согласие теоретических кривых с экспериментальными данными для рассмотренных реакций демонстрирует применимость предложенных подходов для описания радиационного захвата при низких и средних энергиях. Кроме того, согласие расчетных кривых друг с другом позволяет утверждать, что влияние обменных эффектов (характеризующихся обменными членами в матричных элементах потенциала взаимодействия, которыми пренебрегают в рамках АВМО) во взаимодействии сталкивающихся ядер на протекание их радиационного захвата оказывается незначительным. Данное свойство может быть положено в основу дальнейшего использования предложенного комбинированного полумикроскопического подхода, упрощающего вычисления, поскольку расчеты в рамках полностью микроскопических подходов становятся либо очень трудоемкими, либо вовсе нереализуемыми при переходе к ядерным реакциям с достаточно тяжелыми ядрами и пренебрежение обменными слагаемыми в матричных элементах оператора взаимодействия становится просто необходимым для реализации расчетов.

Список литературы

1. Вильдермут К., Тан Я. Единая теория ядра. М.: Мир, 1980.
2. Moshinsky M., Smirnov Yu.F. The harmonic oscillator in modern physics. Amsterdam: Harwood Academic Publishers, 1996.
3. Филиппов Г. Ф., Охрименко И. П. О возможности использования осцилляторного базиса для решения задач непрерывного спектра // Ядерная физика. 1980. Т. 32. С. 932–939.
4. Игашов С. Ю., Смирнов Ю. Ф., Чувильский Ю. М. Об учете несобственных запрещенных состояний в задаче взаимодействия составных частиц // Известия РАН. Серия физическая. 2009. Т. 73. С. 798–801.

5. Adelberger E.G., García A., Robertson R.G.H. et al. Solar fusion cross sections. II. The pp chain and CNO cycles // Reviews of Modern Physics. 2011. Vol. 83. P. 195–245.

6. Xu Y., Takahashi K., Goriely S. et al. NACRE II: an update of the NACRE compilation of charged-particle-induced thermonuclear reaction rates for nuclei with mass number $A < 16$ // Nuclear Physics A. 2013. Vol. 918. P. 61–169.

7. Brune C.R., Kavanagh R.W. and Rolfs C. ${}^3\text{H}(\alpha, \gamma){}^7\text{Li}$ reaction at low energies // Physical Review C. 1994. Vol. 50. P. 2205–2218.

8. Carmona-Gallardo M., Rojas A., Borge M.J.G. et al. ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$ cross section measured using complementary techniques // Europhysics Journal. Web of Conferences. 2014. Vol. 66. P. 07003(1–4).

9. Blatt J.M., Weisskopf V.F. Theoretical nuclear physics. New York: Springer, 1979.

10. Соловьев А. С., Игашов С. Ю. Матричные элементы электромагнитных операторов на базисных функциях алгебраической версии метода резонирующих групп // Ядерная физика и инжиниринг. 2013. Т. 4. С. 989–994.

11. Соловьев А. С., Игашов С. Ю., Чувильский Ю. М. Исследование реакции радиационного захвата $t + \alpha \rightarrow {}^7\text{Li} + \gamma$ в рамках алгебраической версии метода резонирующих групп // Известия РАН. Серия физическая. 2014. Т. 78. С. 621–626.

12. Соловьев А. С., Игашов С. Ю., Чувильский Ю. М. Микроскопическая интерпретация результатов новых измерений реакции ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$ // Ядерная физика. 2014. Т. 77. С. 1525–1527.

13. Solov'yev A.S., Igashov S.Yu. and Tchuvil'sky Yu.M. Treatment of the mirror ${}^3\text{H}(\alpha, \gamma){}^7\text{Li}$ and ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$ reactions in the algebraic version of the resonating group model // Journal of Physics: Conference Series. 2014. Vol. 569. P. 012020(1–5).

14. Kanada H., Kaneko T., Nagata S. and Nomoto M. Microscopic study of nucleon- ${}^4\text{He}$ scattering and effective nuclear potentials // Progress of Theoretical Physics. 1979. Vol. 61. P. 1327–1341.