

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВУМЕРНОГО ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕЧЕНИЯ НЕОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

С. Ф. Гаранин, Е. М. Кравец, О. Н. Пронина, А. Л. Стадник

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», г. Саров, Нижегородская область, пр. Мира, 37, 607188, Россия

Ранее нами с помощью двумерных численных расчетов изучалось поведение двумерного вихревого течения неоднородной жидкости в ограниченной области. В данной работе были проведены расчеты на более тонких сетках (с числом ячеек в одном направлении до 6400). Найдено, что в случае неоднородной начальной плотности на активной стадии перестройки течения декременты затухания кинетической энергии пропорциональны квадратному корню из вязкости. Построены корреляционные функции скорости и плотности в инерционном интервале. Все эти данные дают указания на выбор сценария развития двумерной турбулентности неоднородной жидкости.

Введение

Течения жидкости во многих случаях имеют двумерный турбулентный характер. Турбулентность, развивающаяся при расчетах течений с помощью двумерных программ, является одним из примеров двумерной турбулентности. Физическим примером таких течений могут служить течения плазмы перпендикулярно магнитному полю, где магнитное поле препятствует искривлению силовых линий и появлению скоростей вдоль поля. Такого рода течения развиваются в ряде устройств, в том числе в плазменной камере системы МАГО [1–3], в которой предварительно нагретая замагниченная плазма, удерживаемая стенками, доводится до термоядерных температур с помощью сжатия лайнером. Течения в камере МАГО могут смывать вещество со стенок, поставляя примеси в плазму, что приводит к ее остыванию из-за излучения на примесях. Поэтому важно понимание, насколько быстро турбулентные течения затухают со временем.

Свойства двумерной турбулентности изучены недостаточно, особенно для случая течений неоднородной жидкости, и результаты исследований этой турбулентности могут повлиять существенно на выводы о физических результатах, получаемых с помощью расчетов. Актуальными здесь являются вопросы о диссипации кинетической энергии в турбулентности и вопросы перемешивания веществ. Если иметь в виду, что свойства двумерной и трехмерной турбулентности значительно отли-

чаются, то описание реальных трехмерных течений с помощью двумерных расчетов вызывает существенные вопросы, чтобы ответить на которые, нужно знать свойства двумерной турбулентности, особенно для течений неоднородной жидкости.

В среде с неоднородной плотностью не сохраняется завихренность $\text{rot } \vec{v}$, которая сохраняется для двумерных течений идеальной однородной жидкости [4], а, следовательно, теряют силу аргументы Крэйчнана [5], полученные для двумерной турбулентности, о невозможности потока энергии от больших масштабов к малым. Возможно, при неоднородной начальной плотности время затухания будет определяться гидродинамическими временами и не будет стремиться к бесконечности при стремлении вязкости к нулю. Если это так, то в случае двумерной рэлей-тейлоровской турбулентности, в противоположность утверждениям Черткова [6], будет существовать поток кинетической энергии к малым масштабам. Это означает, что в двумерной рэлей-тейлоровской турбулентности, так же как и в трехмерной, при сколь угодно малой вязкости не будет сохраняться сумма кинетической и потенциальной энергий. Однако, несмотря на то, что завихренность в неоднородной жидкости не сохраняется, нельзя исключить, что кинетическая энергия в двумерной турбулентности неоднородной жидкости при сколь угодно малой вязкости все же будет сохраняться, а диссипация кинетической энергии может оказаться пропорциональной, например, квадратному корню из

вязкости, что предсказывает Чертков [6]*, основываясь на сценарии теплопроводностной диссипации Обухова [4].

Исследование скейлингов координатных зависимостей корреляционных функций (например, плотности и скорости) в инерционном интервале также может дать существенную информацию о свойствах турбулентности и сценариев ее развития.

Для изучения свойств двумерной турбулентности широко используются численные методы. Однако в литературе при этом представлены, в основном, спектральные методы, применимые только к случаю однородной жидкости. В то же время для исследований двумерной турбулентности как однородной, так и неоднородной жидкости можно использовать эйлеровы гидродинамические программы, например программу ЭГАК [7]. В этой программе введена физическая вязкость, а имеющиеся возможности для параллельного счета могут позволить разрешать разные пространственные масштабы, в том числе вязкий масштаб и инерционный интервал. Предварительные численные расчеты [8] показывают, что в турбулентных задачах с физической вязкостью можно добиться точности, достаточной для проведения численных исследований.

В работе [8] нами были проведены двумерные численные расчеты вихревого течения жидкости. Рассмотрение поведения двумерного течения проводилось на примере поведения вихря в квадратной области. Предполагалось, что жидкость близка к несжимаемой (малы числа Маха), а вязкость ее мала (большие числа Рейнольдса). Рассмотрение проводилось для существенно неоднородной плотности, когда перепад начальной плотности составлял десять раз. Изучалось влияние вязкости на эволюцию течения и диссипацию энергии, для чего были проведены расчеты с разными значениями вязкости (числа Рейнольдса).

В настоящей работе проведены расчеты с более тонкими сетками, а также найдены корреляционные функции скорости и плотности и сделана

попытка найти скейлинги этих величин в инерционном интервале.

1. Постановка задачи

Рассматривалась эволюция кругового вихря в квадратной области $-3 < x < 3$, $-3 < y < 3$. В веществе задавалась азимутальная скорость, зависящая от радиуса по закону

$$v_{\phi} = C \begin{cases} r & \text{при } 0 < r < 1, \\ 2 - r & \text{при } 1 < r < 2, \\ 0 & \text{при } r > 2 \end{cases}$$

(радиус r и азимутальная скорость v_{ϕ} отсчитываются от центра области). В области $r < 2$, в которой начальная скорость не равна нулю, плотность вещества ρ_1 задавалась в 10 раз меньшая, чем плотность в остальной области ρ_2 , средняя плотность по области считалась равной 1. Начальное распределение скорости и плотности представлено на рис. 1. Уравнение состояния – идеальный газ с $\gamma = 2$. Начальное давление во всей области задавалось постоянным и равным 3,125. Константа C полагалась равной $C = 2,64$, так, чтобы начальная кинетическая энергия во всей области E_k составляла около 2 % от внутренней E_m , и тогда турбулентное течение можно рассматривать как течение несжимаемой жидкости. Границы области считались жесткими и идеально скользящими.

Размерности длины, скорости и плотности были определены начальными условиями задачи. Размерности всех остальных величин, используемых в расчетах, выражались через них.

Заданное распределение скорости неустойчиво при $1 < r < 2$, и его двумерная эволюция будет приводить к турбулентности.

Расчеты проводились с помощью газодинамической методики комплекса ЭГАК с учетом физической вязкости. В газодинамической постановке задача инвариантна относительно поворотов на угол $\pi/2$ и поэтому можно было бы рассчитывать задачу только для четверти области. Но для того, чтобы создать возможно более полный набор возмущений, мы несколько смещали (на величину 0,1) вихрь по координате y , что нарушало симметрию задачи, и поэтому надо было считать задачу во всей области. В расчетах использовалась

* Чертков [6] рассматривает случай рэлей-тейлоровской неустойчивости, когда в системе с неоднородной плотностью имеется ускорение g . В нашем случае турбулентности в ограниченном объеме роль характерного ускорения, способствующего перемешиванию на активной турбулентной стадии, может играть v^2/L (v – скорость, а L – характерный размер системы).

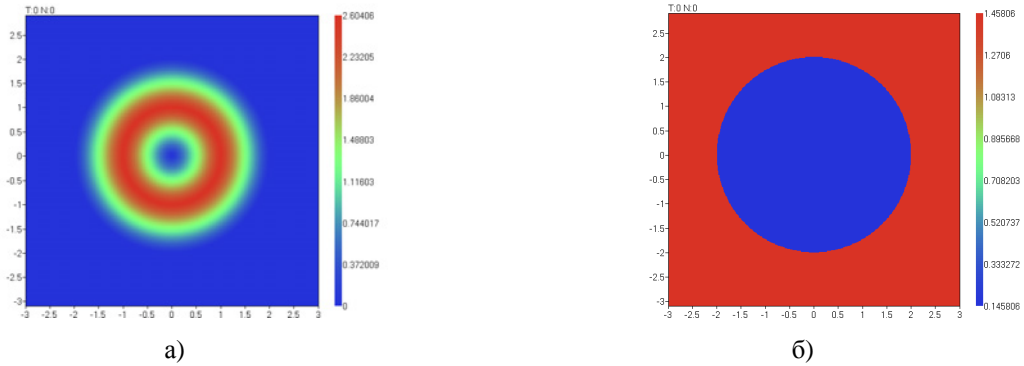


Рис. 1. Начальное распределение скорости (а) и плотности (б) в расчетах

прямоугольная эйлера (т. е. фиксированная пространственная) сетка.

Основным диссипативным процессом в расчетах была физическая вязкость, которая варьировалась в разных расчетах.

2. Сохранение полной энергии

Погрешности проводимых расчетов можно оценить, определив дисбаланс полной энергии. Для надежности расчетов необходимо, чтобы погрешности, которые сказываются на изменении кинетической энергии, были невелики по сравнению с самим изменением кинетической энергии.

Нами был вычислен относительный дисбаланс полной энергии в зависимости от времени

$$\delta E(t) = \frac{E(t=0) - E(t)}{E_k(t=0)},$$

где E – полная энергия системы, равная сумме кинетической и внутренней энергий:

$$E = E_k + E_{in}.$$

Расчеты показали, что дисбаланс уменьшается примерно пропорционально квадрату разрешения сетки. Таким образом, можно надеяться, что в представленных расчетах мы имеем аппроксимацию второго порядка.

В расчете с вязкостью $\eta = 2,5 \cdot 10^{-5}$ и сеткой 1600×1600 дисбаланс составил $\delta E = 0,35\%$ на момент времени $t = 500$. В расчете с вязкостью $\eta = 10^{-4}$ и самой тонкой сеткой, 6400×6400 , получается самый маленький дисбаланс к этому же

моменту времени – $\delta E(t = 500) = 0,0035\%$. Таким образом, во всех рассматриваемых расчетах полная энергия сохраняется достаточно хорошо, и с этой точки зрения они могут использоваться для исследования свойств турбулентности при соответствующих числах Рейнольдса.

3. Результаты расчетов

На рис. 2 приведено пространственное распределение плотности вещества и модуля скорости, полученное в расчете с сеткой 6400×6400 , с величиной динамической вязкости $\eta = 2,5 \cdot 10^{-5}$ (эффективное число Рейнольдса $Re \sim 10^4$), на различные моменты времени.

Рис. 2 показывает, что неустойчивое вихревое течение в двумерном случае распадается из-за развития неустойчивости, однако в противоположность хаотическому турбулентному течению в дальнейшем в области формируется квазистационарное течение с одним или двумя крупными вихрями. В этом течении имеются небольшие маломасштабные возмущения, которые, однако, не приводят к распаду вихрей, и их рост насыщается, по-видимому, из-за нелинейных эффектов. Сами же вихри со временем медленно смещаются по рассматриваемой области и медленно теряют энергию. Это кажется удивительным. Образно говоря, картина развития событий такова, как если бы стакан при падении разбился, а затем сложился вновь, но несколько другой формы.

Сравнение расчетов с разными сетками показывает, что при дроблении сетки в течении появляется больше мелкомасштабных возмущений.

Сравнение расчетов с разными значениями вязкости показывает, что при меньшей вязкости начальный вихрь дробится сильнее, и течение яв-

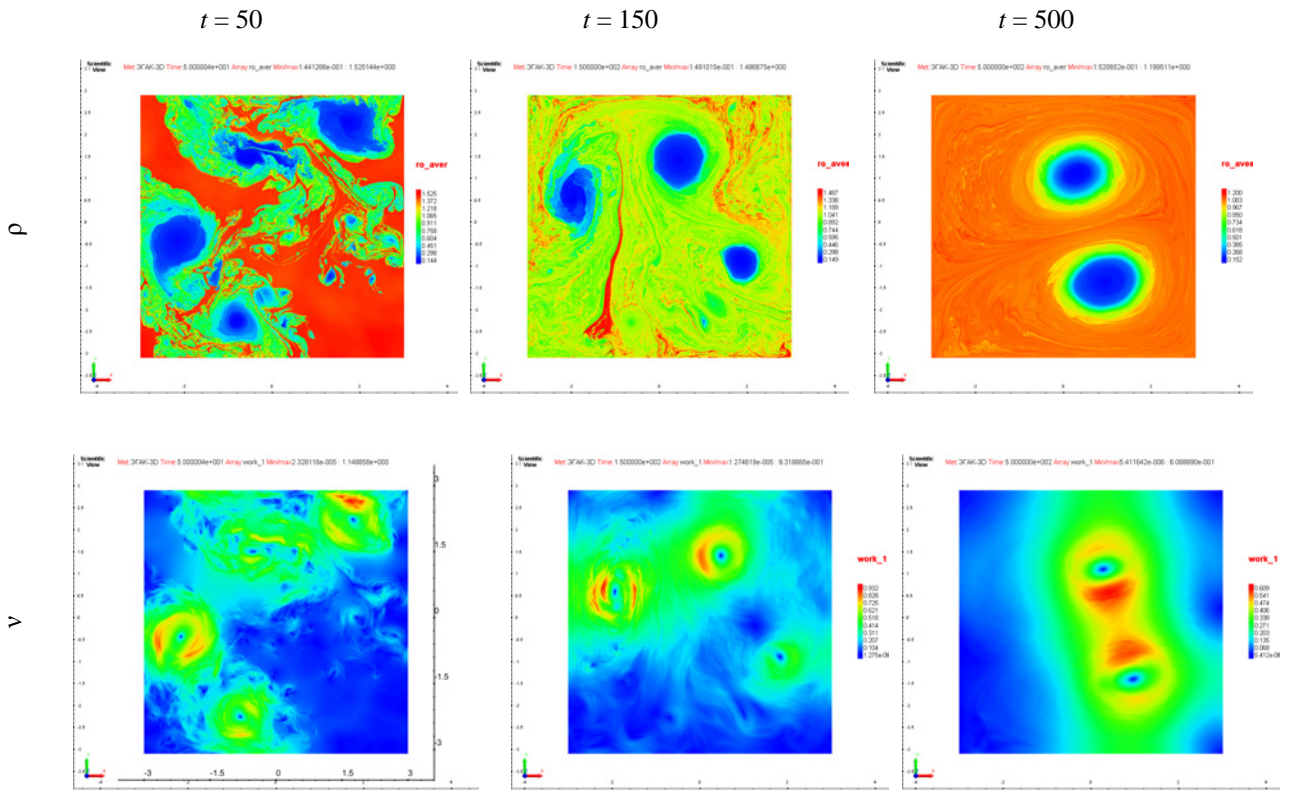


Рис. 2. Пространственное распределение плотности вещества и модуля скорости, полученные в расчете с вязкостью $\eta = 2,5 \cdot 10^{-5}$ и сеткой 6400×6400 на моменты времени $t = 50, 150$ и 500

ляется более хаотичным, чем в случае большей вязкости. Кроме того, при меньшей вязкости перемешивание вещества происходит быстрее.

Для относительно устойчивых вихрей, образующихся в квазистационарной фазе, в значительной части расстояний r от их центров выполняется условие устойчивости [4]

$$v_{\varphi} \frac{d(\rho v_{\varphi} r)}{dr} > 0,$$

где v_{φ} – азимутальная относительно центра вихря скорость (можно доказать, что для всех расстояний выполнение этого условия невозможно). Выполнение этого условия для значительной части расстояний, по-видимому, способствует квазистационарности картины эволюции вихря.

На рис. 3 и 4 представлена зависимость кинетической энергии системы от времени в расчетах с вязкостью $\eta = 2,5 \cdot 10^{-5}$ и $\eta = 10^{-4}$ соответственно и различным числом узлов сетки.

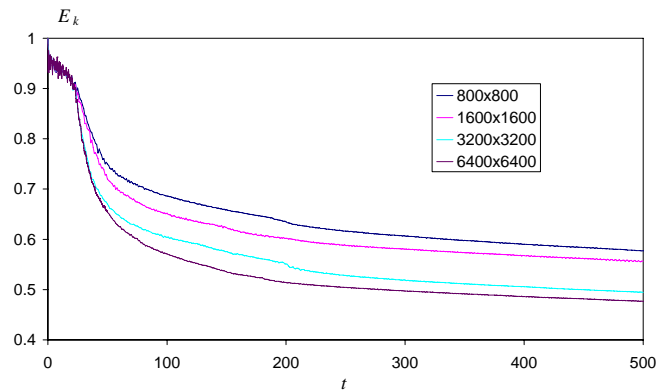


Рис. 3. Зависимость кинетической энергии системы E_k от времени в расчетах с вязкостью $\eta = 2,5 \cdot 10^{-5}$ и различным числом узлов сетки (E_k измерена в единицах начального значения)

Рис. 3 показывает, что, в соответствии с ожидаемым, кинетическая энергия двумерного турбулентного течения с большим числом Рейнольдса ($Re \sim 10^4$) спадает достаточно медленно. Основной вклад в спад кинетической энергии вносится в течение активной турбулентной фазы перестройки течения, а на квазистационарной фазе спад

величины E_k относительно невелик. Полный спад кинетической энергии системы, полученный к $t=500$, монотонно возрастает при дроблении сетки.

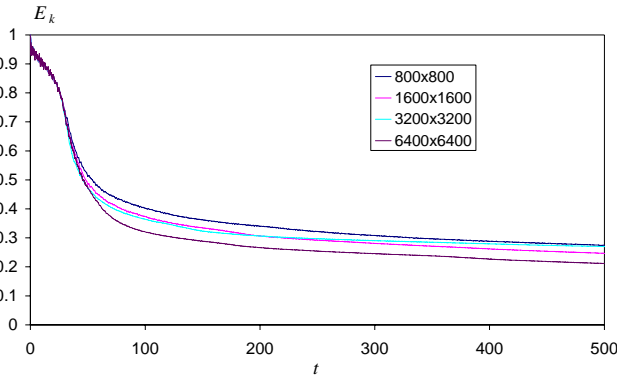


Рис. 4. Зависимость кинетической энергии системы E_k от времени в расчетах с вязкостью $\eta = 10^{-4}$ и различным числом узлов сетки (E_k измерена в единицах начального значения)

Сравнение рис. 3 и 4 показывает, что при увеличении вязкости кинетическая энергия спадает быстрее. В отличие от случая $\eta = 2,5 \cdot 10^{-5}$, полный спад кинетической энергии системы меняется немонотонно в зависимости от разрешения сетки: величина $E_k(t=500)$ в расчете 3200x3200 оказывается между ее значениями в расчетах 800x800 и 1600x1600, а для сетки 6400x6400 значение $E_k(t=500)$ минимально. Возможно, более медленное затухание кинетической энергии в расчете 3200x3200 объясняется тем, что турбулентная динамика течения в этом расчете отличается от других расчетов. На квазистационарной стадии в этом расчете все течение достаточно быстро собирается в один крупный вихрь, который до конца счета задачи медленно колеблется внутри заданной области.

4. Корреляционные функции скорости и плотности

Используя результаты расчетов, мы пытались найти инерционный интервал [4, 9], т. е. область масштабов, достаточно большую, чтобы для нее было несущественно влияние вязкости (масштабы, большие области диссипаций), но в то же время много меньшую максимальных масштабов течения (где сосредоточена основная доля кинетической энергии). В этом интервале корреляционные

функции скорости $(\delta v_l)^2$ и плотности $(\delta \rho_l)^2$ второго порядка должны степенным образом зависеть от масштаба l , в то же время существенно отличаться от зависимостей вязкого масштаба интервала, где $(\delta v_l)^2$ и $(\delta \rho_l)^2$ пропорциональны l^2 . Вопрос, однако, заключается в том, удастся ли для рассматриваемых расчетов уйти достаточно далеко от вязких масштабов и характерных масштабов течения, чтобы обнаружить инерционный интервал?

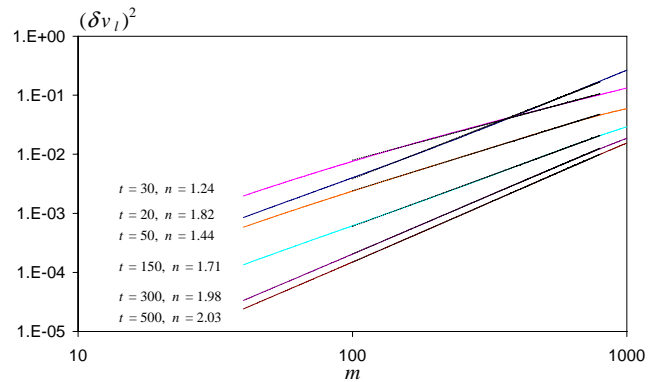


Рис. 5. Корреляционная функция скорости в расчетах с вязкостью $\eta = 2,5 \cdot 10^{-5}$ и сеткой 6400x6400 на различные моменты времени

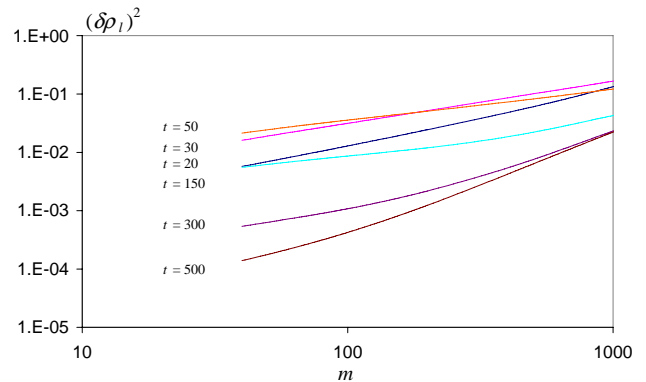


Рис. 6. Корреляционная функция плотности в расчетах с вязкостью $\eta = 2,5 \cdot 10^{-5}$ и сеткой 6400x6400 на различные моменты времени

На рис. 5 и 6 представлены корреляционные функции скорости и плотности для различных моментов времени в интервале $1 \ll m \ll N$, где m – размер области, измеренный количеством счетных ячеек, N – число ячеек вдоль одной из осей. Пунктирными линиями на рис. 5 показаны линии тренда $(\delta v_l)^2 \sim l^n$ с указанием показателя степени n на соответствующие моменты времени ($l = m h$, h – размер счетной ячейки, $m = 2, 3 \dots N - 1$).

Для сценария Колмогорова – Обухова [4] индекс n в зависимости корреляционной функции скорости от l $(\delta v_l)^2 \sim l^n$ в инерционном интервале должен быть равен $n_v = 2/3$ и он должен быть равен индексу n_p для корреляционной функции плотности. Для феноменологических зависимостей Черткова [6] эти индексы должны быть следующими: $n_v = 6/5$, $n_p = 2/5$. Рис. 5 и 6 для большей части времен не соответствуют этим скейлингам. Лишь во времена активной стадии турбулентности скейлинги становятся несколько похожими на зависимости [6]: для $t = 50$ $n_v = 1.44$, $n_p = 0.53$.

Таблица 1

Величина n_p , полученная в расчетах с различными сетками на различные моменты времени.

t	$\eta = 2,5 \cdot 10^{-5}$, 1600×1600	$\eta = 10^{-4}$, 1600×1600	$\eta = 10^{-4}$, 3200×3200	$\eta = 2,5 \cdot 10^{-5}$, 6400×6400
20	0,97	0,95	0,91	0,99
30	0,78	0,80	0,75	0,72
50	0,62–0,77	0,71	0,63	0,53
150	0,76	0,66	0,49	0,5–0,9
300	1,0–1,5	0,65	0,55	1,0–1,6
500	1,7	0,96–1,3	0,5–0,7	1,5–1,8

В табл. 1 представлена величина n_p , полученная в расчетах с вязкостью $\eta = 2,5 \cdot 10^{-5}$ и сеткой 6400×6400, а также в работе [8]. В тех случаях, когда отклонение величины $(\delta \rho_l)^2$ от линии тренда $(\delta \rho_l)^2 \sim l^n$ было значительным, указан диапазон значений степени n .

Из табл. 1 видно, что при дроблении сетки величина n_p для активной стадии турбулентности ($t = 30, 50$), в целом, уменьшается. Таким образом, возможно, что в расчетах на более тонких сетках индекс n_p будет стремиться к значениям Черткова [6].

5. Обсуждение полученных скейлингов

Зависимость от вязкости в скорости диссипации энергии

$$\frac{d \ln E_k}{dt} \sim \eta^k$$

определяется коэффициентом [8]

$$k = \frac{3n_v - 2}{n_v + 2}, \quad (1)$$

причем $k = 1$ соответствует сценарию двумерной турбулентности однородной жидкости, $k = 0$ –

сценарию Колмогорова–Обухова, а $k = 0.5$ – предсказанию Черткова.

Используя рис. 3 и 4, мы сравнили декременты спада кинетической энергии для значений вязкости $\eta = 2,5 \cdot 10^{-5}$ и $\eta = 10^{-4}$. В таблице 2 приведены величины k , полученные для активной стадии турбулентного течения, соответствующей интервалу времени $20 < t < 100$, а также для более спокойной стадии квазистационарного вихря, соответствующей интервалу времени $200 < t < 500$.

Таблица 2

Величина k , полученная для различных интервалов времени в расчетах с разными сетками

сетка t	800×800	1600×1600	3200×3200	6400×6400
20 < t < 100	0.674	0.632	0.510	0.518
200 < t < 500	0.593	0.745	0.103	0.796

Сравнение численных расчетов с разными значениями вязкости (табл. 2, сетка 6400×6400) дает для активной стадии турбулентности величину $k = 0,52$, близкую к предсказанию Черткова. Если взять $n_v = 1,4$, что характерно для активной стадии турбулентности (рис. 5), по формуле (1) получим $k = 0,65$, что несколько больше коэффициента из табл. 2, и является промежуточным значением между скейлингом Черткова $k = 0,5$ и скейлингом для двумерной турбулентности однородной жидкости $k = 1$. Однако, учитывая скейлинги плотности на активной стадии $n_p = 0,5–0,7$, которые отличаются от скейлинга Черткова $n_p = 0,4$ в противоположную сторону от скейлинга турбулентности для двумерной турбулентности однородной жидкости [10] $n_p = 0$ и являются промежуточными между скейлингом Черткова и скейлингом Обухова $n_p = 2/3$, можно думать, что для активной стадии мы имеем указание на сценарий Черткова.

Полученные в расчете 6400×6400 корреляционные функции скорости для квазистационарной стадии течения дают значение $n_v \approx 2$, соответствующее сценарию двумерной турбулентности однородной жидкости, однако корреляционные функции плотности не позволили выделить инерционный интервал и достаточно точно определить n_p для этой стадии. Хотя величина k для квазистационарной стадии, по-видимому, возрастает при дроблении сетки (табл. 2), пока нельзя определить, к какому значению она стремится. Поэтому надо

признать, что проведенные расчеты не дают никаких указаний на реализацию на квазистационарной стадии течения каких-либо известных турбулентных сценариев. Можно предположить, что на этой стадии наши численные расчеты еще недостаточно точны для получения инерционных интервалов и расчета вязких диссипаций.

Заключение

На основании проведенных расчетов можно сделать следующие выводы об основных особенностях двумерных турбулентных течений неоднородной жидкости в ограниченной области:

Двумерное течение в ограниченной области, будучи неустойчивым, со временем начинает разрушаться за счет роста возмущений, и приобретает сложный турбулентный вид, однако в дальнейшем превращается в один или два вихря, которые, хотя и несколько искажаются возникающими возмущениями, в целом сохраняют форму. В таком виде течение существует квазистационарно, постепенно теряя энергию из-за вязких диссипаций.

На стадии перестройки течения, когда оно имеет сложный турбулентный вид, происходит относительно большой спад кинетической энергии и относительно быстрое выравнивание плотности вещества по объему. На квазистационарной стадии плотность выравнивается по объему достаточно медленно, причем минимумы плотности формируются в центрах вихрей. Кинетическая энергия спадает на этой стадии также медленно.

Предварительные результаты свидетельствуют, что на активной стадии перестройки течения декременты затухания кинетической энергии пропорциональны квадратному корню из вязкости, т. е. не соответствуют ни двумерной турбулентности однородной жидкости, для которой они должны были быть пропорциональны вязкости, ни сценарию Колмогорова – Обухова, для которого они должны не зависеть от вязкости. Корневая зависимость от вязкости соответствует предсказанию Черткова [6], основанному на сценарии теплопроводностной диссипации Обухова [5]. На квазистационарной стадии определенных выводов о зависимости декремента затухания кинетической энергии от вязкости сделать не удалось.

Построение корреляционных функций в инерционном интервале для проведенных расчетов дало указание на то, что для активной стадии перестройки течения справедлив феноменологический сценарий Черткова. Для квазистационарной стадии поведения вихревого течения неоднородной

жидкости в ограниченной области получить какие-то определенные указания на феноменологические свойства течений на рассмотренных нами сетках не удалось. Можно предположить, что на этой стадии наши численные расчеты еще недостаточно точны для получения инерционных интервалов и расчета вязких диссипаций.

Список литературы

1. Buyko A. M., Chernyshev V. K., Demidov V. A., Dolin Y. N., Garanin S. F., et al. Investigations of thermonuclear magnetized plasma generation in the magnetic implosion system MAGO // Digest of Technical Papers: Proc. IX IEEE International Pulsed Power Conf. / ed. by Prestwich K. and Baker W. New York: IEEE, 1993. Vol. 1, P. 156–162.
2. Lindemuth I. R., Reinovsky R. E., Chernyshev V. K., Mokhov V.N., et al. Target plasma formation for Magnetic Compression/Magnetized Target Fusion (MAGO/MTF) // Phys. Rev. Lett. 1995. Vol. 75, N 10, P. 1953–1956.
3. Garanin S. F., Mamyshev V. I., Yakubov V. B. The MAGO system: current status // IEEE Trans. Plasma Sci. 2006. Vol. 34, N 5, P. 2273–2278.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
5. Kraichnan R. H. Inertial ranges in two-dimensional turbulence // Phys. Fluids. 1967. Vol. 10, N 7, P. 1417–1423.
6. Chertkov M. Phenomenology of Rayleigh-Taylor Turbulence // Phys. Rev. Lett. 2003. Vol. 91, N 11, P. 115001(1-4).
7. Янилкин Ю. В., Беляев С. П., Городничев А.В. и др. Комплекс программ ЭГАК++ для моделирования на адаптивно-встраиваемой дробной счетной сетке // ВАНТ, сер. ММТФ. 2003. Вып. 1. С. 20–28.
8. Гаранин С. Ф., Кравец Е. М., Пронина О. Н., Стадник А. Л. Двумерное вихревое течение в ограниченной области, «Молодежь в науке»: Сб. докл. 13-й Научно-технической конференции (г. Саров, 28–30 окт. 2014 г.), Саров, С. 49–56, 2015.
9. Фрик П. Г. Турбулентность: походы и модели. М.-Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика», 2010.
10. Гаранин С. Ф., Амеличева О. А., Буренков О. М., Иванова Г. Г., Софронов В. Н. Релаксация двумерного магнитогидродинамического течения поперек магнитного поля (двумерного гидродинамического течения) в ограниченной области // ЖЭТФ, 2003, Т. 124, Вып. 1(7), С. 70–79.