ПОДХОД К ПОВЫШЕНИЮ ТОЧНОСТИ МНОГОГРУППОВОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ

THE METHOD FOR RISE IN ACCURACY OF THE MULTIGROUP METHOD FOR HANDLING THE FREQUENCY VARIABLE IN THE NONSTATIONARY KINETIC EQUATION OF RADIATION TRANSFER

И. В. Попов
Ivan V. Popov

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», г. Саров, Нижегородская область, пр. Мира, 37, 607188, Россия

Представлен вид кинетического уравнения переноса излучения, который в многогрупповом приближении является асимптотически точным в предельных случаях оптически толстого, оптически тонкого веществ и состояния локального термодинамического равновесия излучения с веществом вне зависимости от вводимого числа групп.

The form of multigroup method for handling the frequency variable in the nonstationary kinetic equation of radiation transfer is proposed. This form is exact in the limiting cases of optically thin, optically thick and local thermodynamic equilibrium no matter how many groups they are.

Численному решению системы уравнений, описывающей нестационарный перенос спектрального излучения в кинетическом приближении и взаимодействие его с веществом посвящено немало работ (см., например, [1,2] и ссылки в них).

Одной из наиболее сложных проблем в этой задаче является интегрирование по спектру уравнения переноса излучения. Трудности связаны с тем, что оптические свойства вещества зависят сложным образом от частоты излучения – коэффициенты поглощения излучения содержат большое количество резонансных линий, порогов фотоионизации. Прямое спектральное численное решение уравнения переноса требует в ряде случаев, особенно при решении задачи в многомерном пространстве, много вычислительных ресурсов. Разработаны методы, которые позволяют достаточно экономично рассчитывать интегральные по спектру характеристики излучения. Эти методы либо созданы для решения определенных физических задач [3,4], либо требуют того или иного спектрального расчета уравнения переноса [5,6], либо – лебеговское осреднение уравнения переноса [7,8,9], – обладая достаточной универсальностью и экономичностью численного счета, требует специального вида преобразования и усреднения по спектру коэффициентов поглощения и системы уравнений переноса излучения.

Еще одним методом интегрирования по спектру системы уравнений переноса излучения является многогрупповое приближение [2] весь спектр частот разбивается на конечное число интервалов – групп, – внутри каждой группы коэффициенты поглощения и рассеяния усредняются с некоторой спектральной весовой функцией; при этом если в группе спектр искомой интенсивности излучения близок к профилю весовой функции, то найденное решение по многогрупповому методу будет обладать достаточной точностью. Несмотря на то, что многогрупповое приближение в решении ряда задач уступает в точности вышеуказанным методам, оно в настоящее время широко используется в практических расчетах, как по причине своей простоты реализации, так и благодаря тому, что созданы большое количество баз данных многогрупповых среднепланковских и среднеросселандовых коэффициентов поглощения и рассеяния.

Отметим четыре подхода к многогрупповому приближению, которые могут дать достаточную для многих прикладных задач точность вычисления без использования спектральных расчетов, требующих большого машинного времени и моделей, описанных выше. Первый, и очевидный, состоит в достаточно подробном разбиении всего спектра на группы с учетом возможной немонотонности коэффициента поглощения. В этом случае можно гарантировать независимость последнего от весовой функции. Этот подход в ряде случаев будет требовать излишне большого количества групп и машинного времени вычисления задачи. Второй подход является следствием первого и основан на анализе поведений коэффициента поглощения и самой задачи в целом [2, с. 49], в результате исследователь выбирает границы групп, а, следовательно, и их количество, так, чтобы разбить весь спектр на оптически толстые, тонкие области, а также на области, где способ усреднения не играет роли из-за слабой зависимости оптических свойств вещества от спектра. Этот подход требует большой квалификации исследователя. Третий подход [10] основан на представлении коэффициентов поглощения в виде некоторых функций, которые при очень малых оптических толщинах вещества совпадают с групповым среднепланковским коэффициентом поглощения, а с увеличением оптической толщины плавно стремятся к росселандову среднему для очень больших оптических толщин. Существенным недостатком такого подхода является несколько искусственное введение указанных функций, которые к тому же требуют подбора их коэффициентов, характеризующих скорость перехода оптически тонких сред к толстым, с использованием, вообще говоря, спектральных расчетов. Четвертый, физически обоснованный, подход [11] часто используется при решении системы уравнений спектрального переноса излучения в многогрупповых диффузионном и P1-приближениях. Этот подход использует в уравнении для плотности излучения групповой среднепланковский коэффициент поглощения, а в уравнении для потока – групповой среднеросселандовский коэффициент. В этом случае модель является асимптотически точной в предельных случаях оптически толстого, оптически тонкого вещества, состояния локального термодинамического равновесия (ЛТР) излучения с веществом вне зависимости от вводимого числа групп. Такая модель является предпочтительней, чем подходы 1–3, но применить ее напрямую к уравнению переноса излучения в кинетическом приближении нельзя, потому что в это уравнение оптические коэффициенты входят один раз; при этом поток и плотность излучения являются не независимыми переменными, а рассчитываются по найденным интенсивностям.

Цель данной работы – предложить вид кинетического уравнения переноса излучения, который в многогрупповом приближении является асимптотически точным в предельных случаях оптически толстого, оптически тонкого вещества и состояния ЛТР излучения с веществом вне зависимости от вводимого числа групп.

Нестационарный перенос спектрального излучения и взаимодействие его с веществом описывается системой интегро-дифференциальных уравнений [1, 11]

$$\frac{1}{c}\frac{\partial I_\varepsilon}{\partial t}+\vec{\Omega}\nabla I_\varepsilon = J_\varepsilon^{em}-\kappa_\varepsilon^{tot} I_\varepsilon +$$
$$+\int_0^\infty \int_{(4\pi)} \varepsilon(\varepsilon')^{-1}\sigma_{\varepsilon'} K\left(t,\vec{r};\varepsilon'\to\varepsilon;\vec{\Omega}'\to\vec{\Omega}\right)\times$$
$$\times I_{\varepsilon'}\left(t,\vec{r},\vec{\Omega}'\right)d\vec{\Omega}'d\varepsilon'; \qquad (1)$$

$$\frac{d}{dt}E=-\frac{1}{\rho}\int_0^\infty\int_{(4\pi)}\left(J_\varepsilon^{em}-\kappa_\varepsilon I_\varepsilon\right)d\vec{\Omega}d\varepsilon . \qquad (2)$$

Здесь t – время, c – скорость света; $k_B\varepsilon = h\nu$ – энергия фотона, h – постоянная Планка, k_B – постоянная Больцмана; ν – частота излучения; $I_\varepsilon\left(t,\vec{r},\vec{\Omega}\right)$ – спектральная интенсивность энергии излучения в направлении единичного вектора $\vec{\Omega}$ из данной точки $\vec{r}$; $\kappa_\varepsilon^{tot}=\kappa_\varepsilon+\sigma_\varepsilon$; исправленные на вынужденное излучение спектральные коэффициент поглощения κ_ε, рассеяния σ_ε и излучательная способность J_ε^{em} являются известными функциями температуры $T\left(t,\vec{r}\right)$ и плотности вещества $\rho\left(t,\vec{r}\right)$; $K\left(t,\vec{r};\varepsilon'\to\varepsilon;\vec{\Omega}'\to\vec{\Omega}\right)d\varepsilon d\vec{\Omega}$ – вероятность рассеяния из состояния ε', $\vec{\Omega}'$ в состояние с ε, $\vec{\Omega}$, $\int_0^\infty\int_{(4\pi)} K\left(t,\vec{r};\varepsilon'\to\varepsilon;\vec{\Omega}'\to\vec{\Omega}\right)d\vec{\Omega}d\varepsilon=1$; $E\left(t,\vec{r}\right)$ – удельная внутренняя энергия вещества.

В условиях ЛТР $J_\varepsilon^{em}\left(t,\vec{r}\right)=\kappa_\varepsilon\left(t,\vec{r}\right)I_\varepsilon^P\left(t,\vec{r}\right)$, где $I_\varepsilon^P\left(t,\vec{r}\right)=\sigma_0\varepsilon^3\left(\exp\left(\varepsilon/T\left(t,\vec{r}\right)\right)-1\right)^{-1}$ – спектральная интенсивность равновесного излучения, $\sigma_0=2k_B^4c^{-2}h^{-3}$.

Система уравнений (1–2) дополняется соответствующими начальными $I_\varepsilon\left(t=t_0,\vec{r},\vec{\Omega}\right)= =I_\varepsilon^0\left(\vec{r},\vec{\Omega}\right)$, $E\left(t=t_0,\vec{r}\right)=E_0\left(\vec{r}\right)$ и граничным, например, для выпуклой области D в R^3 $I_\varepsilon\left(t,\partial D,\vec{\Omega}\right)=I_\varepsilon^*\left(t,\partial D,\vec{\Omega}\right)$ при $\left(\vec{\Omega},\vec{n}\right)<0$ и $\vec{r}\in\partial D$, условиями [2]. Здесь $\vec{n}$ – вектор внешней нормали к границе ∂D области D; $I_\varepsilon^*\left(t,\partial D,\vec{\Omega}\right)$ – известная функция, описывающая приход извне в область D излучения. Требуется определить спектральную интенсивность излучения и внутреннюю энергию вещества для $t>t_0$.

Нулевой и первый моменты интенсивности по угловым направлениям характеризуют теплообмен излучением [12]:

$$U_\varepsilon\left(t,\vec{r}\right)=c^{-1}\int\limits_{(4\pi)} I_\varepsilon\left(t,\vec{r},\vec{\Omega}\right)d\vec{\Omega}, \tag{3}$$

$$\vec{S}_\varepsilon\left(t,\vec{r}\right)=\int\limits_{(4\pi)} I_\varepsilon\left(t,\vec{r},\vec{\Omega}\right)\vec{\Omega}d\vec{\Omega}, \tag{4}$$

где $U_\varepsilon\left(t,\vec{r}\right)$, $\vec{S}_\varepsilon\left(t,\vec{r}\right)$ – соответственно спектральные объемная плотность и поток излучения.

Сформулируем ограничения на угловые направления $K\left(t,\vec{r};\varepsilon'\to\varepsilon;\vec{\Omega}'\to\vec{\Omega}\right)$ и J_ε^{em}:

$$K\left(\vec{\Omega}'\to\vec{\Omega}\right)=K\left(-\vec{\Omega}'\to\vec{\Omega}\right)=$$
$$=K\left(\vec{\Omega}'\to-\vec{\Omega}\right)=K\left(-\vec{\Omega}'\to-\vec{\Omega}\right), \tag{5}$$

$$J_\varepsilon^{em}\left(t,\vec{r},\vec{\Omega}\right)=J_\varepsilon^{em}\left(t,\vec{r},-\vec{\Omega}\right). \tag{6}$$

В работах [13,14] описан способ записи уравнения кинетики (1) в самосопряженной форме для случая стационарных задач. Симметризация стационарного кинетического уравнения по угловым направлениям достигается введением двух независимых переменных $u_\varepsilon\left(t,\vec{r},\vec{\Omega}\right)$, $s_\varepsilon\left(t,\vec{r},\vec{\Omega}\right)$, через которые затем записывается само уравнение в новом виде, а именно:

$$u_\varepsilon\left(t,\vec{r},\vec{\Omega}\right)=1/2\left(I_\varepsilon^+ + I_\varepsilon^-\right), \tag{7}$$

$$s_\varepsilon\left(t,\vec{r},\vec{\Omega}\right)=1/2\left(I_\varepsilon^+ - I_\varepsilon^-\right); \tag{8}$$

где $I_\varepsilon^+=I_\varepsilon\left(t,\vec{r},\vec{\Omega}\right)$ и $I_\varepsilon^-=I_\varepsilon\left(t,\vec{r},-\vec{\Omega}\right)$ означают интенсивность излучения квантов, летящих соответственно по и против направления вектора $\vec{\Omega}$.

В [15,16] переменные (7, 8) использовались для записи нестационарного кинетического уравнения. В этом случае, с учетом ограничений (5, 6), запишем (1, 2) в виде

$$c^{-1}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}+\vec{\Omega}\nabla s_\varepsilon=J_\varepsilon^{em}-\kappa_\varepsilon^{tot}u_\varepsilon+$$
$$+2\int\limits_0^\infty\int\limits_{(2\pi)}\varepsilon\left(\varepsilon'\right)^{-1}\sigma_{\varepsilon'}K\left(t,\vec{r};\varepsilon'\to\varepsilon;\vec{\Omega}'\to\vec{\Omega}\right)\times$$
$$\times u_{\varepsilon'}\left(t,\vec{r},\vec{\Omega}'\right)d\vec{\Omega}'d\varepsilon'; \tag{9}$$

$$c^{-1}\frac{\partial s_\varepsilon}{\partial t}+\vec{\Omega}\nabla u_\varepsilon=-\kappa_\varepsilon^{tot}s_\varepsilon; \tag{10}$$

$$\rho\frac{d}{dt}E=-2\int\limits_0^\infty\int\limits_{(2\pi)}\left(J_\varepsilon^{em}-\kappa_\varepsilon u_\varepsilon\right)d\vec{\Omega}d\varepsilon. \tag{11}$$

Система уравнений (9–11) дополняется начальными $u_\varepsilon\left(t=t_0,\vec{r},\vec{\Omega}\right)=\frac{1}{2}\left(I_\varepsilon^0\left(\vec{r},\vec{\Omega}\right)+I_\varepsilon^0\left(\vec{r},-\vec{\Omega}\right)\right)$, $s_\varepsilon\left(t=t_0,\vec{r},\vec{\Omega}\right)=\frac{1}{2}\left(I_\varepsilon^0\left(\vec{r},\vec{\Omega}\right)-I_\varepsilon^0\left(\vec{r},-\vec{\Omega}\right)\right)$, $E\left(t=t_0,\vec{r}\right)=E_0\left(\vec{r}\right)$ и граничными, $u_\varepsilon\left(t,\partial D,\vec{\Omega}\right)+s_\varepsilon\left(t,\partial D,\vec{\Omega}\right)=I_\varepsilon^*\left(t,\partial D,\vec{\Omega}\right)$ при $\left(\vec{\Omega},\vec{n}\right)<0$ и $u_\varepsilon\left(t,\partial D,\vec{\Omega}\right)-s_\varepsilon\left(t,\partial D,\vec{\Omega}\right)=I_\varepsilon^*\left(t,\partial D,-\vec{\Omega}\right)$ при $\left(\vec{\Omega},\vec{n}\right)>0$, $\vec{r}\in\partial D$, условиями, которые получаются преобразованием соответствующих начальных и граничных условий к системе (1, 2).

$U_\varepsilon\left(t,\vec{r}\right)$ и $\vec{S}_\varepsilon\left(t,\vec{r}\right)$ (3, 4) записываются в новых переменных (7, 8) в виде

$$U_\varepsilon\left(t,\vec{r}\right)=2c^{-1}\int\limits_{(2\pi)} u_\varepsilon\left(t,\vec{r},\vec{\Omega}\right)d\vec{\Omega}, \tag{12}$$

$$\vec{S}_\varepsilon\left(t,\vec{r}\right)=2\int\limits_{(2\pi)} s_\varepsilon\left(t,\vec{r},\vec{\Omega}\right)\vec{\Omega}d\vec{\Omega}. \tag{13}$$

Из (12,13) видно, что $u_\varepsilon\left(t,\vec{r},\vec{\Omega}\right)$, $s_\varepsilon\left(t,\vec{r},\vec{\Omega}\right)$ характеризуют соответственно только спектральные плотность и поток излучения. Система (9–11) является точным следствием кинетического уравнения (1–2) при предположениях (5, 6).

Применим процедуру многогруппового приближения [11] к (9–11) для случая ЛТР.

Разобьём весь спектральный диапазон излучения на конечное число G энергетических интервалов (групп) $\left[\varepsilon_g,\varepsilon_{g+1}\right]$ шириной $\Delta\varepsilon_g=\varepsilon_{g+1}-\varepsilon_g$,

$g=\overline{1,G}$. При этом $\varepsilon_1=0$, $\varepsilon_{G+1}=\infty$. Проинтегрируем (9–11) по ε в пределах каждой группы g и поделим на ее ширину, получим:

$$c^{-1}\frac{\partial u_g}{\partial t}+\vec{\Omega}\nabla s_g=\kappa_g^P I_g^P-\tilde{\kappa}_g^{tot}u_g+$$
$$+2\sum_{g'=1}^{G}\int_{(2\pi)}\sigma_{g'\to g}\left(\vec{\Omega}'\to\vec{\Omega}\right)u_{g'}\left(t,\vec{r},\vec{\Omega}'\right)\Delta\varepsilon_{g'}d\vec{\Omega}'; \quad (14)$$

$$c^{-1}\frac{\partial s_g}{\partial t}+\vec{\Omega}\nabla u_g=-\tilde{\tilde{\kappa}}_g^{tot}s_g; \quad (15)$$

$$\rho\frac{d}{dt}E=-2\sum_{g=1}^{G}\int_{(2\pi)}\left(\kappa_g^P I_g^P-\tilde{\kappa}_g u_g\right)d\vec{\Omega}\Delta\varepsilon_g. \quad (16)$$

Здесь u_g, s_g, I_g^P – средние значения соответственно u_ε, s_ε, I_ε^P в группе g, которые вводятся как $u_g\Delta\varepsilon_g=\int_{\varepsilon_g}^{\varepsilon_{g+1}}u_\varepsilon d\varepsilon$, $s_g\Delta\varepsilon_g=\int_{\varepsilon_g}^{\varepsilon_{g+1}}s_\varepsilon d\varepsilon$, $I_g^P\Delta\varepsilon_g=\int_{\varepsilon_g}^{\varepsilon_{g+1}}I_\varepsilon^P d\varepsilon$; κ_g^P – групповой среднепланковский коэффициент поглощения излучения:

$$\kappa_g^P=\int_{\varepsilon_g}^{\varepsilon_{g+1}}\kappa_\varepsilon I_\varepsilon^P d\varepsilon\left(\int_{\varepsilon_g}^{\varepsilon_{g+1}}I_\varepsilon^P d\varepsilon\right)^{-1}; \quad (17)$$

средние коэффициенты поглощения и рассеяния, усредненные с неравновесными функциями интенсивности излучения u_g и s_g имеют вид

$$\tilde{\kappa}_g^{tot}\left(\vec{\Omega}\right)=\int_{\varepsilon_g}^{\varepsilon_{g+1}}\kappa_\varepsilon^{tot}u_\varepsilon d\varepsilon\left(\int_{\varepsilon_g}^{\varepsilon_{g+1}}u_\varepsilon d\varepsilon\right)^{-1}, \quad (18)$$

$$\tilde{\kappa}_g\left(\vec{\Omega}\right)=\int_{\varepsilon_g}^{\varepsilon_{g+1}}\kappa_\varepsilon u_\varepsilon d\varepsilon\left(\int_{\varepsilon_g}^{\varepsilon_{g+1}}u_\varepsilon d\varepsilon\right)^{-1}, \quad (19)$$

$$\tilde{\tilde{\kappa}}_g^{tot}\left(\vec{\Omega}\right)=\int_{\varepsilon_g}^{\varepsilon_{g+1}}\kappa_\varepsilon^{tot}s_\varepsilon d\varepsilon\left(\int_{\varepsilon_g}^{\varepsilon_{g+1}}s_\varepsilon d\varepsilon\right)^{-1}, \quad (20)$$

$$\sigma_{g'\to g}\left(\vec{\Omega}'\to\vec{\Omega}\right)=$$
$$=\int_{\varepsilon_g}^{\varepsilon_{g+1}}d\varepsilon\int_{\varepsilon_{g'}}^{\varepsilon_{g'+1}}\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\sigma_{\varepsilon'}K\left(t,\vec{r};\varepsilon'\to\varepsilon;\vec{\Omega}'\to\vec{\Omega}\right)u_{\varepsilon'}\left(t,\vec{r},\vec{\Omega}'\right)\times$$
$$\times d\varepsilon'\left(\Delta\varepsilon_g\int_{\varepsilon_{g'}}^{\varepsilon_{g'+1}}u_{\varepsilon'}\left(t,\vec{r},\vec{\Omega}'\right)d\varepsilon'\right)^{-1}. \quad (21)$$

Соответствующим образом преобразуются граничные и начальные условия исходной системы (9–11).

Уравнения (14–16) записаны в самом общем случае многогруппового приближения. Их решение сопряжено с рядом трудностей [11], а именно, необходимо вычислить входящие в (14–16) коэффициенты $\tilde{\kappa}_g^{tot}$, $\tilde{\tilde{\kappa}}_g^{tot}$, $\tilde{\kappa}_g$, $\sigma_{g'\to g}$ через интенсивности u_ε, s_ε, которые сами необходимо найти из решения системы (9–11). Кроме этого, $\tilde{\kappa}_g^{tot}$, $\tilde{\tilde{\kappa}}_g^{tot}$, $\tilde{\kappa}_g$ зависят от угловых направлений $\vec{\Omega}$ из-за угловой зависимости интенсивностей u_ε, s_ε.

Положим далее ряд упрощений для вычисления (18–21). Что касается спектрального коэффициента σ_ε и вероятности $K\left(\varepsilon'\to\varepsilon;\vec{\Omega}'\to\vec{\Omega}\right)$ рассеяния, то это достаточно гладкие функции энергии квантов, поэтому вид функций, с которыми производится усреднение этих коэффициентов, не так важен [11]. Пусть, например,

$$\sigma_{g'\to g}\left(\vec{\Omega}'\to\vec{\Omega}\right)\approx\sigma_{g'\to g}^P\left(\vec{\Omega}'\to\vec{\Omega}\right)=$$
$$=\int_{\varepsilon_g}^{\varepsilon_{g+1}}d\varepsilon\int_{\varepsilon_{g'}}^{\varepsilon_{g'+1}}\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\sigma_{\varepsilon'}K\left(t,\vec{r};\varepsilon'\to\varepsilon;\vec{\Omega}'\to\vec{\Omega}\right)\times$$
$$\times I_{\varepsilon'}^P d\varepsilon'\left(\Delta\varepsilon_g\int_{\varepsilon_{g'}}^{\varepsilon_{g'+1}}I_{\varepsilon'}^P d\varepsilon'\right)^{-1}. \quad (22)$$

Коэффициент поглощения излучения κ_ε содержит большое количество резонансных линий и порогов фотоионизации, что делает интенсивности u_ε, s_ε сложными функциями энергетического спектра в группе. В общем случае для вычисления коэффициентов (18–20) следует воспользоваться подходами, описанными во введении, либо воспользоваться следующим приближением. В качестве $\tilde{\kappa}_g$ и $\tilde{\kappa}_g^{tot}$ возьмем соответственно среднепланковский коэффициент поглощения (17), т. е. $\tilde{\kappa}_g\left(\vec{\Omega}\right)\approx\kappa_g^P$, и

$$\tilde{\kappa}_g^{tot}\left(\vec{\Omega}\right)\approx\kappa_g^{tot,P}=\int_{\varepsilon_g}^{\varepsilon_{g+1}}\kappa_\varepsilon^{tot}I_\varepsilon^P d\varepsilon\left(\int_{\varepsilon_g}^{\varepsilon_{g+1}}I_\varepsilon^P d\varepsilon\right)^{-1}; \quad (23)$$

в качестве $\tilde{\tilde{\kappa}}_g^{tot}$ положим групповой среднеросселандовский коэффициент поглощения:

$$\tilde{\tilde{\kappa}}_g^{tot}\left(\vec{\Omega}\right) \approx \kappa_g^{tot,R} = \int\limits_{\varepsilon_g}^{\varepsilon_{g+1}} \partial_T I_\varepsilon^P d\varepsilon \left(\int\limits_{\varepsilon_g}^{\varepsilon_{g+1}} \left(\kappa_\varepsilon^{tot}\right)^{-1} \partial_T I_\varepsilon^P d\varepsilon \right)^{-1} \quad (24)$$

В результате систему (14–16) можно записать:

$$c^{-1}\frac{\partial u_g}{\partial t} + \vec{\Omega}\nabla s_g = \kappa_g^P I_g^P - \kappa_g^{tot,\mathrm{P}} u_g +$$
$$+ 2\sum_{g'=1}^{G} \int\limits_{(2\pi)} \sigma_{g'\to g}^P \left(\vec{\Omega}' \to \vec{\Omega}\right) u_{g'}\left(t,\vec{r},\vec{\Omega}'\right)\Delta\varepsilon_{g'} d\vec{\Omega}'; \quad (25)$$

$$c^{-1}\frac{\partial s_g}{\partial t} + \vec{\Omega}\nabla u_g = -\kappa_g^{tot,R} s_g; \quad (26)$$

$$\frac{d}{dt}E = -2\rho^{-1}\sum_{g=1}^{G} \int\limits_{(2\pi)} \left(\kappa_g^P I_g^P - \kappa_g^P u_g\right) d\vec{\Omega}\Delta\varepsilon_g. \quad (27)$$

Рассмотрим несколько частных случаев системы (25–27).

Оптически толстая среда – $\kappa_\varepsilon^{tot} L \gg 1$, где L – размер объема, окруженного областью с существенно иной температурой, плотностью или составом. В этом случае $\frac{1}{c}\frac{\partial u_g}{\partial t} + \vec{\Omega}\nabla s_g \ll \kappa_g^P I_g^P -$ $-\kappa_g^{tot,\mathrm{P}} u_g + 2\sum_{g'=1}^{G} \int\limits_{(2\pi)} \sigma_{g'\to g}^P \left(\vec{\Omega}' \to \vec{\Omega}\right) u_{g'}\left(t,\vec{r},\vec{\Omega}'\right)\Delta\varepsilon_{g'} d\vec{\Omega}'$ и $u_g \approx I_g^P$, т.е. излучение находится в состоянии локального термодинамического равновесия с веществом. Уравнение (25) можно записать как

$$c^{-1}\partial_t I_g^P + \vec{\Omega}\nabla s_g = 0 \quad (28)$$

При $c\tau\kappa_g^{tot,R} \sim L\kappa_g^{tot,R} \gg 1$ (τ – характерное время изменения интенсивности s_g) в (26) можно пренебречь временно́й производной $\left|c^{-1}\partial_t s_g\right| \ll \left|\kappa_g^{tot,R} s_g\right|$, поэтому $s_g = -\left(\kappa_g^{tot,R}\right)^{-1}\vec{\Omega}\nabla I_g^P$. Подставим последнее выражение в (28), проинтегрируем по угловым направлениям $d\vec{\Omega}$, после умножим слева и справа на ширину спектральной группы g и просуммируем по всем группам; в результате имеем

$$\sum_{g=1}^{G}\Delta\varepsilon_g \int\limits_{(2\pi)} \left[c^{-1}\partial_t I_g^P - \vec{\Omega}\nabla\left(\left(\kappa_g^{tot,R}\right)^{-1}\vec{\Omega}\nabla I_g^P\right)\right] d\vec{\Omega} = \quad ,(29)$$
$$= \partial_t U^R/2 - \nabla\left(8/3\sigma l^{tot,R} T^3 \nabla T\right) = 0$$

где $U^R = 4c^{-1}\sigma T^4$ – интегральная по спектру объемная плотность излучения, $\sigma = \sigma_0 \pi^5/15$ – постоянная Стефана-Больцмана [12], $l^{tot,R} = \sum_{g=1}^{G}\left(\kappa_g^{tot,R}\right)^{-1}\partial_T I_g^P \Delta\varepsilon_g \left(\sum_{g=1}^{G}\partial_T I_g^P\Delta\varepsilon_g\right)^{-1}$ – росселандов пробег. Складывая (29) с (27) получим уравнение лучистой теплопроводности для случая неподвижной среды [2]:

$$\rho\frac{d}{dt}\left(E + 4c^{-1}\rho^{-1}\sigma T^4\right) = \nabla\left(16/3\sigma l^{tot,R} T^3 \nabla T\right) \quad (30)$$

Пусть оптически тонкая среда – $\kappa_\varepsilon^{tot} L' \ll 1$ (L' – характерный размер исследуемого объема) – окружена средой, излучением которой можно пренебречь. В этом случае $\kappa_g^P I_g^P \gg \kappa_g^{tot,\mathrm{P}} u_g -$ $-2\sum_{g'=1}^{G} \int\limits_{(2\pi)} \sigma_{g'\to g}^P \left(\vec{\Omega}' \to \vec{\Omega}\right) u_{g'}\left(t,\vec{r},\vec{\Omega}'\right)\Delta\varepsilon_{g'} d\vec{\Omega}'$, $\left|c^{-1}\partial_t s_g + \vec{\Omega}\nabla u_g\right| \gg \left|\kappa_g^{tot,R} s_g\right|$ и (25–27) можно переписать в виде

$$\vec{\Omega}\nabla s_g = \kappa_g^P I_g^P; \quad (31)$$

$$c^{-1}\partial_t s_g + \vec{\Omega}\nabla u_g = 0; \quad (32)$$

$$\frac{d}{dt}E = -4\pi\rho^{-1}\sum_{g=1}^{G}\kappa_g^P I_g^P \Delta\varepsilon_g. \quad (33)$$

Уравнение (31) проинтегрируем по угловым направлениям $d\vec{\Omega}$, после умножим слева и справа на ширину спектральной группы g и просуммируем по всем группам, в результате получим [2]

$$\nabla\vec{S} = 4\sigma\kappa^P T^4, \quad (34)$$

$$\rho\frac{d}{dt}E = -4\sigma\kappa^P T^4. \quad (35)$$

Здесь $\vec{S}$ – интегральный по спектру поток излучения, $\kappa^P = \sum_{g=1}^{G}\kappa_g^P I_g^P \Delta\varepsilon_g \Big/ \sum_{g=1}^{G} I_g^P \Delta\varepsilon_g$ – коэффициент поглощения, осредненный по Планку.

Выражения (31–35) характеризуют состояние оптически тонкой системы – излучение практически беспрепятственно покидает объем $(L')^3$. В общем случае выражения (34, 35) могут быть неверными, если на границе интенсивность существенна [10].

Таким образом, представленный вид кинетического уравнения переноса излучения (25–27) дает асимптотически точные решения кинетического уравнения (9–11) в предельных случаях оптически тонкой, толстой среды и состояния ЛТР излучения с веществом вне зависимости от числа вводимых групп.

Автор выражает благодарность проф. Жмайло В. А. и Гнутову А. С. за плодотворные обсуждения.

Список литературы

1. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. М.: Наука. 1980. Суржиков С. Т. Тепловое излучение газов и плазмы М.: Изд-во МГТУ им. Баумана, 2004.

2. Четверушкин Б. Н. Математическое моделирование задач динамики излучающего газа. М.: Наука, 1985.

3. Гольдин В. Я., Четверушкин Б. Н. Эффективный метод решения уравнения переноса излучения в низкотемпературной плазме // ДАН СССР. 1970. Т. 195. № 2. С. 315–317

4. Четверушкин Б. Н. Численное решение спектральной задачи о прогреве падающим извне излучением вещества // Ж. прикладной механики и технической физики. 1971. № 2. С. 48–53

5. Немчинов И. В. Об осредненных уравнениях переноса излучения и их использовании при решении газодинамических задач // Прикладная математика и механика, 1970, Т. 34, N 4, С. 706–721.

6. Голубь А. П. Численный метод решения уравнений переноса излучения в одномерных задачах радиационной газовой динамики // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1983. Т. 23. № 1. С. 142–151

7. Шильков А. В. Метод лебеговского осреднения уравнения переноса частиц в среде. // Препринт Ин. прикл. матем. им. М. В. Келдыша АН СССР. 1987. № 100.

8. Цветкова И. Л., Шильков А. В. Осреднение уравнения переноса в резонансно поглощающей среде // Математическое моделирование, 1989. Т. 1, N 1, С. 91–100.

9. Shilkov A. V. Generalized multigroup approximation and lebesgue averaging method in particle transport problems // Transport Theory and Statistical Physics. 1994. Vol. 23. No 6. P. 781–814.

10. Сэмпсон Д. Уравнения переноса энергии и количества движения в газах с учетом излучения. М.: Мир, 1969.

11. Pomraning G. C. The equations of radiation hydrodynamics. N. Y.: Pergamon Press, 1973.

12. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука. 1966.

13. Владимиров В. С. Математические задачи односкоростной теории переноса частиц // Труды мат. института им. В. А. Стеклова (МИАН СССР). Т. 61. М.: Изд-во АН СССР. 1961. С. 3–158

14. Агошков В. И., Марчук Г. И. Введение в проекционно-сеточные методы. М.: Наука. 1981.

15. Mihala D., Weaver R. Time-Dependent Radiative Transfer with Automatic Flux Limiting. // Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer. 1982. Vol. 28. No. 3. P. 213–222.