МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

MULTIPARAMETER SOLUTIONS OF THE PARABOLIC EQUATION

В. Н. Робук
V. N. Robuk

Объединённый институт ядерных исследований
Joint institute for nuclear research

Рассмотрена возможность расширения понятия фундаментального решения линейного однородного параболического уравнения с постоянными коэффициентами.

A possibility for extension of the conception of the fundamental solution to a linear homogenous parabolic equation with constant coefficients is considered.

I. Введение. Многопараметрическое решение в 1+1 измерении

Рассмотрим параболическое уравнение в 1+1 измерении:

$$\hat{L}U = 0 \Rightarrow \left\{ \hat{L} = \frac{1}{2} a \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial t} \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1}{2} a \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial U}{\partial t} = 0 \tag{1}$$

здесь коэффициент a – произвольная комплексная величина (определяется из свойств моделируемого объекта и/или процесса).

1. Очевидно, что умножение любого решения этого уравнения на произвольное комплексное число l приведёт к решению этого же уравнения:

$$\frac{1}{2} a \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial U}{\partial t} = 0 \Rightarrow \{ lU = V \} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1}{2} a \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \tag{2}$$

Это оказывается возможным потому, что операция умножения на константу l и операции дифференцирования по x и по t коммутируют между собой.

2. В силу тех же обстоятельств, а именно $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial t \partial x}$, дифференцирование любого решения уравнения (1) по x приводит к решению этого же уравнения

$$\frac{1}{2} a \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial U}{\partial t} = 0 \Rightarrow \left\{ \frac{\partial U}{\partial x} = V \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1}{2} a \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \tag{3}$$

Оператор, переводящий любое решение исходного уравнения в какое-либо, вообще говоря, другое решение этого же уравнения принято называть оператором симметрии (ОС), [1].

3. Вопрос: А если поступить наоборот? Пусть V известное решение уравнения (1). Построим новое решение U исходного уравнения (1) по формуле

$$\frac{1}{2} a \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial U}{\partial t} = 0 \Leftarrow \left\{ \frac{\partial U}{\partial x} = V \right\} \Leftarrow \\ \Leftarrow \frac{1}{2} a \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \tag{4}$$

Здесь и далее везде будем рассматривать простейший частный случай $V = 0$. Тогда

$$V = 0 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \Rightarrow U = f(t) \tag{5}$$

Произвольная функция $f(t)$ возникает, как константа интегрирования по x. Для того, чтобы $U = f(t)$ было ещё и решением исходного уравнения (1) подставим выражение (5) для U в исходное уравнение (1) и определимся с функцией $f(t)$

$$\frac{1}{2}a\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}-\frac{\partial U}{\partial t}=0 \;\Rightarrow\; \{U=f(t)\} \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{\partial f(t)}{\partial t}=0 \;\Rightarrow\; f(t)=C-const \qquad (6)$$

В итоге мы из решения исходного уравнения $V=0$ получили новое решение этого же уравнения $U=C$. Фактически, мы решили совместную систему уравнений:

$$V=0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \frac{\partial U}{\partial x}=0 \\ \frac{1}{2}a\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}-\frac{\partial U}{\partial t}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow U=C-const \qquad (7)$$

Совместность этой системы уравнений гарантирована тем, что операторы дифференцирования по x и оператор $\hat{L}$ коммутируют.

4. Линейный принцип суперпозиции позволяет нам использовать, в качестве нового ОС, линейную комбинацию двух очевидных ОС (оператор дифференцирования по x и оператор умножения на 1 – тождественное преобразование),:

$$\frac{1}{2}a\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}-\frac{\partial U}{\partial t}=0 \Rightarrow \left\{\frac{\partial U}{\partial x}+qU=V\right\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}a\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}-\frac{\partial V}{\partial t}=0 \qquad (8)$$

В этой линейной комбинации коэффициент при производной выбран равным единице, поскольку предполагаем, что этот коэффициент не равен нулю, а иначе – вернёмся к результату пункта 1. Далее, аналогично пункту 3, опять рассмотрим частный случай $V=0$:

$$V=0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \frac{\partial U}{\partial x}+qU=0 \\ \frac{1}{2}a\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}-\frac{\partial U}{\partial t}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow U=\exp\left(\tfrac{1}{2}aq^2t-qx\right) \qquad (9)$$

Здесь можно положить $q=\xi+i\nu$, тогда при, $\mathrm{Im}\,a=0$, $\xi=0$, и получить решение $U=\exp\left(-\tfrac{1}{2}a\nu^2t-i\nu x\right)$. Это открывает путь к Фурье-анализу.

5. Для уравнения (1) известен ещё один ОС, см. [1], а именно:

$$\hat{S}=at\frac{\partial}{\partial x}+x \qquad (10)$$

Оператор $\hat{L}$ и оператор $\hat{S}$ коммутируют, тогда

$$\frac{1}{2}a\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}-\frac{\partial U}{\partial t}=0 \Rightarrow \left\{\hat{S}U=at\frac{\partial U}{\partial x}+xU=V\right\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}a\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}-\frac{\partial V}{\partial t}=0 \qquad (11)$$

и можно действовать по прежней схеме:

$$V=0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} at\frac{\partial U}{\partial x}+xU=0 \\ \frac{1}{2}a\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}-\frac{\partial U}{\partial t}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow U=\frac{C}{\sqrt{t}}\exp\left(-\frac{x^2}{2at}\right) \qquad (12)$$

Решение (12) в математической литературе принято называть фундаментальным, см. [1]. Трансляция по $x\to x+\xi$ при $\mathrm{Im}\,\xi=0$ в фундаментальном решении и объявление свободного параметра С функцией от ξ, приводит к известной формуле Пуассона (при $\mathrm{Im}\,a=0,\ a>0$):

$$U=\frac{1}{\sqrt{t}}\int_{-\infty}^{+\infty}C(\xi)\exp\left(-\frac{(x+\xi)^2}{2at}\right)d\xi \qquad (13)$$

6. Составляем линейную комбинацию трёх ОС: $\hat{S},\frac{\partial}{\partial x},1$

$$\tfrac{1}{2}a\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}-\frac{\partial U}{\partial t}=0 \Rightarrow \left\{\hat{S}U+l\frac{\partial U}{\partial x}+qU=V\right\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \tfrac{1}{2}a\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}-\frac{\partial V}{\partial t}=0 \quad . \qquad (14)$$

С заменой $l\to al$ получаем многопараметрическое решение:

$$V=0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \hat{S}U+l\frac{\partial U}{\partial x}+qU=0 \\ \tfrac{1}{2}a\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}-\frac{\partial U}{\partial t}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow U=\frac{C}{\sqrt{(t+l)}}\exp\left(-\frac{(x+q)^2}{2a(t+l)}\right) \qquad (15)$$

При этом переменные x и t остаются, как им и положено, действительными, а произвольные параметры С, a, q, l могут быть и комплексными. В случае уравнения Шрёдингера, частный вариант решения (15) используется в [3].

7. Уравнение Шрёдингера: $a = i\alpha,\ \alpha = \dfrac{\hbar}{m} > 0.$

Положим $l = \tau + i\eta,\ \ q = \xi + iv,\ \ C = \rho_0 \exp(i\phi_0)$, тогда

$$U = \frac{C}{\sqrt{t+l}} \exp\left(-\frac{(x+q)^2}{2a(t+l)}\right) = \\ = \rho_0 \exp(i\phi)(t+\tau+i\eta)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{(x+\xi+iv)^2}{2i\alpha(t+\tau+i\eta)}\right) \quad (16)$$

Для удобства произведём трансляцию $x+\xi \to x, t+\tau \to t,$ (параметры ξ и τ при необходимости всегда можно восстановить) и введём переобозначение $v = \eta\upsilon$. Тогда разбиение функции (16) на действительную и мнимую часть $U = U_1 + iU_2$ будет выглядеть так

$$U_1 = \rho_0 \frac{\exp\left(-\frac{\eta\upsilon^2}{2\alpha}\right)}{\left(t^2+\eta^2\right)^{\frac{1}{4}}} \exp\left(\frac{\eta(x-\upsilon t)^2}{2\alpha\left(t^2+\eta^2\right)}\right) \times \\ \times \cos\left(\frac{\left(x^2-\eta^2\upsilon^2\right)t + 2\upsilon\eta^2 x}{2\alpha\left(t^2+\eta^2\right)} - \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\eta}{t}\right) + \phi_0\right) \quad (17)$$

$$U_2 = \rho_0 \frac{\exp\left(-\frac{\eta\upsilon^2}{2\alpha}\right)}{\left(t^2+\eta^2\right)^{\frac{1}{4}}} \exp\left(\frac{\eta(x-\upsilon t)^2}{2\alpha\left(t^2+\eta^2\right)}\right) \times \\ \times \sin\left(\frac{\left(x^2-\eta^2\upsilon^2\right)t + 2\upsilon\eta^2 x}{2\alpha\left(t^2+\eta^2\right)} - \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\eta}{t}\right) + \phi_0\right) \quad (18)$$

Квадрат модуля комплексной функции $U = U_1 + iU_2$:

$$\rho^2 = UU^* = U_1^2 + U_2^2 = \\ = 2\rho_0^2 \frac{\exp\left(-\frac{\eta\upsilon^2}{\alpha}\right)}{\left(t^2+\eta^2\right)^{\frac{1}{2}}} \exp\left(\frac{\eta(x-\upsilon t)^2}{\alpha\left(t^2+\eta^2\right)}\right). \quad (19)$$

Для локализации величины ρ в пространстве необходимо ввести ограничение: $\eta < 0$. Теперь интеграл ρ^2 по всему одномерному пространству $(-\infty < x < +\infty)$ будет равен константе. А если специальным образом выбрать свободный параметр $\rho_0^2 = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{|\eta|}{\alpha\pi}} \exp\left(\dfrac{\eta\upsilon^2}{\alpha}\right)$, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho^2 dx = 1 \quad (20)$$

В интервале $-|\eta| << t << |\eta|$ локализация ρ^2 будет максимальной и квазистабильной.

8. **Уравнение тепломассопереноса:** $\operatorname{Im} a = 0, \operatorname{Re} a > 0.$

Положим $l = \tau + i\eta, q = \xi + i\eta, C = \rho_0 \exp(i\phi_0)$ и $x+\xi \to x, t+\tau \to t$, тогда

$$U = \rho_0 \exp(i\phi_0)(t+i\eta)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{(x+iv)^2}{2a(t+i\eta)}\right). \quad (21)$$

Разбиение функции (21) на действительную и мнимую часть даёт два решения, но, за счёт произвольной фазы ϕ_0, это можно записать в виде одного решения:

$$U = \rho_0\left(t^2+\eta^2\right)^{-\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{t\left(x^2-v^2\right)+2vx\eta}{2a\left(t^2+\eta^2\right)}\right) \times \\ \times \cos\left(\frac{v^2\eta + 2tvx - x^2\eta}{2a\left(t^2+\eta^2\right)} + \frac{1}{2}\arctan\frac{\eta}{t} + \phi_0\right) \quad (22)$$

В частном случае, при $\nu = 0$, (для упрощения положим $\eta = \rho_0 = a = 1, \phi_0 = 0$) получаем

$$U = \left(t^2+1\right)^{-\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{tx^2}{2\left(t^2+1\right)}\right) \times \\ \times \cos\left(\frac{x^2}{2\left(t^2+1\right)} - \frac{1}{2}\arctan\frac{1}{t}\right). \quad (23)$$

В интервале времени $0 < t < 1$ решение (23) возрастает. При $t >> 1$ реализуется известный сценарий: $U \sim \dfrac{1}{\sqrt{t}} \exp\left(-\dfrac{x^2}{2at}\right)$.

9. Вопрос: а зачем нужны ОС? Можно в фундаментальном решении (12) осуществить трансляцию по x и t на действительные величины $x \to x+q,\ \ t \to t+l$, затем объявить q и l комплексными. Получим тот же самый результат! Однако не будем спешить с выводами.

II. Многопараметрическое решение в 1+2 измерении

Исходное уравнение:

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{1}{2}a_1\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{1}{2}a_2\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \tag{24}$$

где a_1, a_2 – произвольно заданные, в общем случае, комплексные коэффициенты (определяются из свойств моделируемого объекта и/или процесса).

Следуя логике предыдущего раздела, из полного набора порождающих ОС

$$\hat{S}_{01}=a_1 t\frac{\partial}{\partial x}+x,\ \hat{S}_{02}=a_2 t\frac{\partial}{\partial y}+y,$$
$$\hat{S}_1=\frac{\partial}{\partial x},\ \hat{S}_2=\frac{\partial}{\partial y},1, \tag{25}$$

строим две линейных комбинации с различными произвольными коэффициентами и, после упрощений (без ограничения общности), получаем систему двух определяющих уравнений. (Если одна линейная комбинация, то система будет недоопределена относительно производных, если три – переопределена.) Условия совместности этой системы с исходным уравнением выполнены, в силу того, что обе линейных комбинации построены только из ОС Условия совместности определяющих уравнений между собой накладывают ограничения на произвол в выборе коэффициентов. В итоге получаем совместную систему трёх уравнений и соответствующее многопараметрическое решение:

$$\left.\begin{array}{c} a_1(t+l_1)\dfrac{\partial U_2}{\partial x}+p\dfrac{\partial U_2}{\partial y}+(x+q_1)U_2=0\\ p\dfrac{\partial U_2}{\partial x}+a_2(t+l_2)\dfrac{\partial U_2}{\partial y}+(y+q_2)U_2=0\\ \dfrac{1}{2}a_1\dfrac{\partial^2 U_2}{\partial x^2}+\dfrac{1}{2}a_2\dfrac{\partial^2 U_2}{\partial y^2}-\dfrac{\partial U_2}{\partial t}=0\end{array}\right\}\Rightarrow U_2=$$

$$=\frac{C}{\sqrt{K_2}}\exp\left(-\frac{F_2}{2K_2}\right) \tag{25}$$

где

$$F_2=(l_2+ta_2)(x+q_1)^2-2p(x+q_1)(y+q_2)+$$
$$+(l_1+ta_1)(y+q_2)^2 \tag{26}$$

и

$$K_2=a_1a_2t^2+(a_1l_2+a_2l_1)t+\left(l_1l_2-p^2\right) \tag{27}$$

здесь l_1, l_2, p, C, q_1, q_2 – шесть произвольно заданных, вообще говоря, комплексных параметров (12 действительных параметров).

Для облегчения исследования этого решения желательно представить знаменатель K_2 в факторизованном виде $K_2\to(t-\Lambda_1)(t-\Lambda_2)$. С этой целью рассмотрим альтернативный способ получения решения (25) – (27). Попытаемся это сделать с помощью специфического разделения переменных в исходном уравнении (24)

$$\frac{1}{2}a_1\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{1}{2}a_2\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}-\frac{\partial U}{\partial t}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{U=V_1(t,x)V_2(t,y)\}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{2}a_1\dfrac{\partial^2 V_2}{\partial x^2}-\dfrac{\partial V_2}{\partial t}=0\\ \dfrac{1}{2}a_2\dfrac{\partial^2 V_1}{\partial y^2}-\dfrac{\partial V_1}{\partial t}=0\end{cases} \tag{28}$$

Мы можем взять любых два решения двух разных уравнений (28) соответственно и произвести ортогональный поворот в нормированной системе координат:

$$\begin{pmatrix}\dfrac{x}{\sqrt{a_1}}\\ \dfrac{y}{\sqrt{a_2}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\omega & \sin\omega\\ -\sin\omega & \cos\omega\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{X}{\sqrt{a_1}}\\ \dfrac{Y}{\sqrt{a_2}}\end{pmatrix}. \tag{29}$$

Уравнение (24) при этом не изменится, а в решении $U=V_1V_2$ появится новый параметр ω. Трансляции по x, y, t дадут ещё 3 параметра, поскольку переменная t одна и та же в обоих решениях V_1 и V_2. Плюс коэффициент С. И того - 5 параметров мы можем дополнительно «накачать» в решение (28).

Если выбрать в качестве V_1 и V_2, соответствующие фундаментальные решения, то

$$V_1=\frac{1}{\sqrt{t}}\exp\left(-\frac{x^2}{2a_1t}\right)\leftarrow t\rightarrow V_2=\frac{1}{\sqrt{t}}\exp\left(-\frac{y^2}{2a_2t}\right)$$
$$\Downarrow$$
$$V_1=\frac{1}{\sqrt{t-\Lambda}}\exp\left(-\frac{x^2}{2a_1(t-\Lambda)}\right)\leftarrow(t-\Lambda)\rightarrow V_2=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{t-\Lambda}}\exp\left(-\frac{y^2}{2a_2(t-\Lambda)}\right)$$
$$\Downarrow$$
$$U=V_1V_2=\frac{1}{t-\Lambda}\exp\left(-\frac{a_2x^2+a_1y^2}{2a_1a_2(t-\Lambda)}\right) \tag{30}$$

плюс коэффициент С, плюс 2 трансляции по координатам – всего 4 параметра (поворот (29) в данном случае ничего не даст). Но нам уже известно, что параметров может быть и 6. Куда девался ещё один параметр (помимо угла поворота)? Единственный выход – надо смотреть на многопараметрическое решение в 1+1 измерении (15), полученное через ОС, как на самостоятельное решение никакого отношения к трансляции по t в фундаментальном решении не имеющее. Тогда

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{\sqrt{t-\Lambda_1}}\exp\left(-\frac{x^2}{2a_1(t-\Lambda_1)}\right) \\ V_2 &= \frac{1}{\sqrt{t-\Lambda_2}}\exp\left(-\frac{y^2}{2a_2(t-\Lambda_2)}\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow U = \tag{31}$$

$$= V_1V_2 = \frac{\exp\left(-\dfrac{a_2(t-\Lambda_2)x^2 + a_1(t-\Lambda_1)y^2}{2a_1a_2(t-\Lambda_1)(t-\Lambda_2)}\right)}{\sqrt{(t-\Lambda_1)(t-\Lambda_2)}},$$

плюс коэффициент С, плюс поворот, плюс трансляции по координатам и получаем искомое многопараметрическое решение (6 параметров):

$$U_2 = \frac{C}{\sqrt{(t-\Lambda_1)(t-\Lambda_2)}}\exp\left(-\frac{F_2}{2a_1a_2(t-\Lambda_1)(t-\Lambda_2)}\right) \tag{32}$$

где

$$\begin{aligned} F_2 &= a_2\left(t-\Lambda_1\sin^2\omega-\Lambda_2\cos^2\omega\right)(x+q_1)^2 \\ &\pm\sqrt{a_1}\sqrt{a_2}\,(\Lambda_1-\Lambda_2)(\sin 2\omega)(x+q_1)(y+q_2)+ \\ &+a_1\left(t-\Lambda_1\cos^2\omega-\Lambda_2\sin^2\omega\right)(y+q_2)^2 \end{aligned} \tag{33}$$

Отождествление решения в виде (25)–(27) с (32)–(33) позволяет говорить просто о замене системы параметров: (l_1, l_2, p) $\to$ (Λ_1, Λ_2, ω) по формулам:

$$l_1 = -a_1\left(\Lambda_1\cos^2\omega+\Lambda_2\sin^2\omega\right),$$

$$l_2 = -a_2\left(\Lambda_1\sin^2\omega+\Lambda_2\cos^2\omega\right),$$

$$p = \frac{1}{2}\sqrt{a_1a_2}\,(\Lambda_2-\Lambda_1)\sin 2\omega\ . \tag{35.3}$$

Дальнейшие действия (подбор комплексных корней $\Lambda_1\, и\, \Lambda_2$, выяснение условий на параметры в зависимости от требуемого поведения квадратичной формы F_2 и т. п.) зависят от конкретной математической модели, в которой мы собираемся использовать это решение. В частности заметим, что подбор ограничений на параметры для положительной определённости квадратичной формы и наличие в знаменателе произвольных комплексных параметров позволяет продлить время существования локальной неоднородности в квазистабильном состоянии. С увеличением размерности пространства увеличивается и количество Λ_k и тогда время «жизни» этой неоднородности возрастает. А если ещё учесть, что любые дифференцирования исходного многопараметрического решения по любым переменным, в том числе и любым действительным параметрам приводят к новым многопараметрическим решениям, то получаем на каждом шаге новое локализованное состояние со всё более усложняющейся структурой.

III. Многопараметрическое решение в 1+3 измерении

В случае 1+3 измерения всё аналогично предыдущему разделу. Исходное уравнение:

$$\frac{1}{2}a_1\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{1}{2}a_2\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{1}{2}a_3\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}-\frac{\partial U}{\partial t}=0\,, \tag{36}$$

где a_1, a_2, a_3 – произвольные комплексные коэффициенты (определяются из свойств моделируемого объекта и/или процесса) и l_1, l_2, l_3, p_1, p_2, p_3, C, q_1, q_2, q_3 – <u>десять</u> произвольно заданных, вообще говоря, комплексных параметров. При необходимости – 20 действительных параметров (определяются из условий задачи).

Порождающие операторы симметрии:

$$\hat{S}_{01} = a_1t\frac{\partial}{\partial x}+x,\quad \hat{S}_{02} = a_2t\frac{\partial}{\partial y}+y,\quad \hat{S}_{03} = a_3t\frac{\partial}{\partial z}+z,$$

$$\frac{\partial}{\partial x},\quad \frac{\partial}{\partial y},\quad \frac{\partial}{\partial z},\quad 1. \tag{37}$$

Совместная система определяющих уравнений и решение:

$$\left.\begin{aligned} &(a_1t+l_1)\frac{\partial U_3}{\partial x}+p_3\frac{\partial U_3}{\partial y}+p_2\frac{\partial U_3}{\partial z}+(x+q_1)U_3=0 \\ &p_3\frac{\partial U_3}{\partial x}+(a_2t+l_2)\frac{\partial U_3}{\partial y}+p_1\frac{\partial U_3}{\partial Z}+(y+q_2)U_3=0 \\ &p_2\frac{\partial U_3}{\partial x}+p_1\frac{\partial U_3}{\partial y}+(a_3t+l_3)\frac{\partial U_3}{\partial Z}+(z+q_3)U_3=0 \\ &\tfrac{1}{2}a_1\frac{\partial^2 U_3}{\partial x^2}+\tfrac{1}{2}a_2\frac{\partial^2 U_3}{\partial y^2}+\tfrac{1}{2}a_3\frac{\partial^2 U_3}{\partial z^2}-\frac{\partial U_3}{\partial t}=0 \end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow U_3 = \frac{C}{\sqrt{K_3}}\exp\left(-\frac{F_3}{2K_3}\right), \tag{38}$$

где

$$K_3 = a_1a_2a_3t^3 + \left(l_1a_2a_3 + l_2a_1a_3 + l_3a_1a_2\right)t^2 +$$
$$+\left(\left(l_2l_3 - p_1^2\right)a_1 + \left(l_3l_1 - p_2^2\right)a_2 + \left(l_1l_2 - p_3^2\right)a_3\right)t \quad (39)$$
$$+2p_1p_2p_3 + l_1l_2l_3 - l_1p_1^2 - l_2p_2^2 - l_3p_3^2$$

и

$$F_3 = \left(\left(l_2 + a_2t\right)\left(l_3 + a_3t\right) - p_1^2\right)\left(x + q_1\right)^2 +$$
$$+\left(\left(l_3 + a_3t\right)\left(l_1 + a_1t\right) - p_2^2\right)\left(y + q_2\right)^2$$
$$+\left(\left(l_1 + a_1t\right)\left(l_2 + a_2t\right) - p_3^2\right)\left(z + q_3\right)^2 + \quad (40)$$
$$+2\left(p_1p_2 - p_3\left(l_3 + a_3t\right)\right)\left(x + q_1\right)\left(y + q_2\right)$$
$$+2\left(p_2p_3 - p_1\left(l_1 + a_1t\right)\right)\left(y + q_2\right)\left(z + q_3\right) +$$
$$+2\left(p_3p_1 - p_2\left(l_2 + a_2t\right)\right)\left(z + q_3\right)\left(x + q_1\right)$$

Замена параметров $\{l_1, l_2, l_3, p_1, p_2, p_3\} \to$ $\to \{\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \theta, \varphi, \psi\}$ по формулам:

$$l_1 = -a_1\left(k_1^2\Lambda_1 + k_2^2\Lambda_2 + k_3^2\Lambda_3\right),$$
$$p_1 = -\sqrt{a_2a_3}\left(h_1n_1\Lambda_1 + h_2n_2\Lambda_2 + h_3n_3\Lambda_3\right)$$
$$l_2 = -a_2\left(h_1^2\Lambda_1 + h_2^2\Lambda_2 + h_3^2\Lambda_3\right),$$
$$p_2 = -\sqrt{a_1a_3}\left(k_1n_1\Lambda_1 + k_2n_2\Lambda_2 + k_3n_3\Lambda_3\right)$$
$$l_3 = -a_3\left(n_1^2\Lambda_1 + n_2^2\Lambda_2 + n_3^2\Lambda_3\right), \quad (41)$$
$$p_3 = -\sqrt{a_1a_2}\left(h_1k_1\Lambda_1 + h_2k_2\Lambda_2 + h_3k_3\Lambda_3\right)$$

где

$$k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = 1, \quad h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 = 1,$$
$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1;$$

$$k_1^2 + h_1^2 + n_1^2 = 1,\ k_2^2 + h_2^2 + n_2^2 = 1,\ k_3^2 + h_3^2 + n_3^2 = 1;$$

$$k_1h_1 + k_2h_2 + k_3h_3 = 0, \quad n_1h_1 + n_2h_2 + n_3h_3 = 0,$$
$$n_1k_1 + n_2k_2 + n_3k_3 = 0;$$

$$k_1k_2 + h_1h_2 + n_1n_2 = 0, \quad k_1k_3 + h_1h_3 + n_1n_3 = 0,$$

$$k_2k_3 + h_2h_3 + n_2n_3 = 0;$$

Эти соотношения можно реализовать путём следующей параметризации:

$$k_1 = \sin\theta\cos\varphi,\ k_2 = \sin\theta\sin\varphi,\ k_3 = \cos\theta;$$
$$h_1 = \cos\psi\cos\theta\cos\varphi + \sin\psi\sin\varphi,$$
$$h_2 = \cos\psi\cos\theta\sin\varphi - \sin\psi\cos\varphi,$$
$$h_3 = -\cos\psi\sin\theta;$$
$$n_1 = \sin\psi\cos\theta\cos\varphi - \cos\psi\sin\varphi,$$
$$n_2 = \cos\psi\cos\varphi + \sin\psi\cos\theta\sin\varphi,$$
$$n_3 = -\sin\psi\sin\theta;$$

Решение U_3 в новой системе параметров:

$$U_3 = \frac{C}{\sqrt{\left(t-\Lambda_1\right)\left(t-\Lambda_2\right)\left(t-\Lambda_3\right)}}\times$$
$$\times\exp\left(-\frac{F_3}{2a_1a_2a_3\left(t-\Lambda_1\right)\left(t-\Lambda_2\right)\left(t-\Lambda_3\right)}\right) \quad (42)$$

где

$$F_3 = a_2a_3H_{11}X^2 + a_1a_3H_{22}Y^2 + a_1a_2H_{33}Z^2 +$$
$$+ 2a_3\sqrt{a_1a_2}H_{12}XY + 2a_2\sqrt{a_1a_3}H_{13}XZ + \quad (43)$$
$$+ 2a_1\sqrt{a_2a_3}H_{23}YZ$$

здесь

$$H_{11} = t^2 - \left(\left(k_2^2 + k_3^2\right)\Lambda_1 + \left(k_1^2 + k_3^2\right)\Lambda_2 + \left(k_1^2 + k_2^2\right)\Lambda_3\right)t +$$
$$+ \Lambda_2\Lambda_3k_1^2 + \Lambda_1\Lambda_3k_2^2 + \Lambda_1\Lambda_2k_3^2,$$
$$H_{22} = t^2 - \left(\left(h_2^2 + h_3^2\right)\Lambda_1 + \left(h_1^2 + h_3^2\right)\Lambda_2 + \left(h_1^2 + h_2^2\right)\Lambda_3\right)t +$$
$$+\left(\Lambda_2\Lambda_3h_1^2 + \Lambda_1\Lambda_3h_2^2 + \Lambda_1\Lambda_2h_3^2\right),$$
$$H_{33} = t^2 - \left(\left(n_2^2 + n_3^2\right)\Lambda_1 + \left(n_1^2 + n_3^2\right)\Lambda_2 + \left(n_1^2 + n_2^2\right)\Lambda_3\right)t +$$
$$+\left(\Lambda_2\Lambda_3n_1^2 + \Lambda_1\Lambda_3n_2^2 + \Lambda_1\Lambda_2n_3^2\right),$$
$$H_{12} = \left(h_1k_1\Lambda_1 + h_2k_2\Lambda_2 + h_3k_3\Lambda_3\right)t +$$
$$+\left(\Lambda_2\Lambda_3h_1k_1 + \Lambda_1\Lambda_3h_2k_2 + \Lambda_1\Lambda_2h_3k_3\right),$$
$$H_{13} = \left(k_1n_1\Lambda_1 + k_2n_2\Lambda_2 + k_3n_3\Lambda_3\right)t +$$
$$+\left(\Lambda_2\Lambda_3k_1n_1 + \Lambda_1\Lambda_3k_2n_2 + \Lambda_1\Lambda_2k_3n_3\right),$$
$$H_{23} = \left(h_1n_1\Lambda_1 + h_2n_2\Lambda_2 + h_3n_3\Lambda_3\right)t +$$
$$+\left(\Lambda_2\Lambda_3h_1n_1 + \Lambda_1\Lambda_3h_2n_2 + \Lambda_1\Lambda_2h_3n_3\right).$$

Знаменатель упростился, а числитель F_3 стал громоздким. Особенно это станет заметно для параболического уравнения в 1+N измерении. Формально не представляет проблемы написать многопараметрическое решение в 1+N измерении, однако при больших размерностях пространства $(N \geq 4)$ получаются очень громоздкие выражения. Задачу построения и анализа многопараметрического решения можно конечно упростить. Например, исключить из рассмотрения параметры поворота. Но это только для изучения одного решения. Да и то с потерей общности, поскольку комплексификацию углов поворота исключить обратным поворотом не удастся. А если нам понадобиться сумма двух таких решений, каждое со своим набором параметров, то тогда и без комплексификации ничего не получится. По всей видимости, на практике необходимо параллельно использовать обе системы параметров.

IV. Заключение

Приведенные в настоящем сообщении многопараметрические решения (15), (38)–(40) и (25)–(27) это состоявшийся математический факт. Вопросы интерпретации этого факта в рамках той или иной физической теории, вопросы имплементации этого факта в разработке методов математического моделирования и т. п. затронуты во Введении весьма поверхностно и фрагментарно, поскольку Введение многофункционально. В первую очередь надо было объяснить логику построения многопараметрических решений с помощью ОС и необходимость наличия дополнительных параметров.

Основной вывод обозначен в Разделе II и состоит в том, что фундаментальное решение есть частный случай многопараметрического, но многопараметрическое решение не есть простое обобщение фундаментального путём «накачки» параметров в последнее.

Автор искренне признателен С. В. Михайлову за неоценимую помощь в работе.

Список литературы

1. Willard Miller Jr. Symmetry and Separation of Variables, Addison-Wesley Publishing Company, 1977. Миллер У. мл., Симметрия и разделение переменных: Пер. на русский: М.: МИР, 1981.

2. Полянин А. Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики / М.: Физико-математическая литература, 2001.

3. Siegfried Flugge, Practical Quntum Mechanics, I, SPRINGER-VERLAG, 1971. Флюгге З. Задачи по квантовой механике: Русский перевод / т. I, М.: МИР, 1974.