3D ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ ВИХРЕВОГО КОЛЬЦА ПРИ ВСПЛЫВАНИИ ТЕРМИКА В АТМОСФЕРЕ

О. Г. Синькова, В. П. Стаценко,
Ю. В. Янилкин

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», г. Саров, Нижегородская область, пр. Мира, 37, 607188, Россия
RFNC-VNIIEF

Ключевые слова: плавучий объём, гравитационное поле, вихревое кольцо, турбулентность, численное моделирование.

Численно исследуется образование вихревого кольца при всплывании атмосферного термика (нагретого лёгкого объёма) в поле тяжести Земли. 3D расчеты проводились по коду ЭГАК [3].

Результаты расчетов сравниваются с решениями приближённой аналитической теории формирования и движения плавучего вихревого кольца, апробированной известными экспериментальными данными.

В данной работе описывается решение задачи о превращении в вихревое кольцо лёгкого (нагретого) облака при его всплывании в более тяжёлой (холодной) атмосфере. Частным примером такой задачи является подъём облака воздушного ядерного взрыва или взрыва горючего газа. В этом случае после ухода ударной волны на значительное расстояние от точки взрыва на месте взрыва остаётся шар горячего воздуха (облако взрыва). Облако начинает всплывать и превращается в вихревое кольцо. За несколько секунд облако достигает максимальной скорости подъёма, затем скорость постепенно уменьшается. В начале подъёма облако деформируется, принимая грибообразную форму, а затем превращается в тор. На начальной стадии на границе облака развивается турбулентность, вызванная гравитационной и сдвиговой неустойчивостями; на стадии вихревого кольца возникающее циркуляционное течение подавляет турбулентность.

Впервые численное моделирование такой задачи было выполнено с помощью 2D методики МЕДУЗА [1] в статье [2]. Исследовалась довольно ранняя стадия, когда вихревое кольцо только образовалось, был предложен механизм его образования, приведён теоретический анализ движения вихревого кольца.

В данной работе 3D расчеты проводились в рамках кода ЭГАК[3]. При этом численное моделирование указанной задачи было выполнено до значительно бóльших относительных (приведённых к безразмерному виду) моментов времени, нежели в работе [2].

В Приложении предложена модель образования и движения вихревых колец в поле тяжести, не содержащая (в отличие от предыдущих моделей) каких-либо эмпирических коэффициентов. Модель основывается на результатах двумерных газодинамических расчетов и известных аналитических исследованиях круговых вихрей.

Результаты численных 3D расчетов сравниваются с указанной теоретической моделью.

1. Постановка 3D расчётовEquation Section 1 Equation Section 1 Equation Section 1

Геометрия (рис. 1) – параллелепипед с ребрами: $0 < x < X = 500$, $0 < y < Y = 500$, $0 < z < Z = 600$, заполненный идеальным газом с плотностью – $\rho_a = 1{,}25$ г/см^3 и $\gamma = 1{,}4$. В параллелепипед была вписана сфера Ω_0 с центром ($X/2, Y/2, Z/3$), радиусом $R_0 = 100$, плотностью $\rho_0 = 0{,}125$ кг/м^3 и $\gamma = 1{,}4$. На верхней грани $z = z_v = 600$ задавалось давление $P_0 = 1$ атм, внутри параллелепипеда давление распределялось по закону: $P = P_0 - \rho_0 \cdot g \cdot (z_v - z)$, где $g = 9{,}8$ м/с^2. Счетная сетка (NI = 500, NJ = 500, NK = 600) . На всех границах условие – жесткая стенка. Задача считалась на 1658 процессорах.

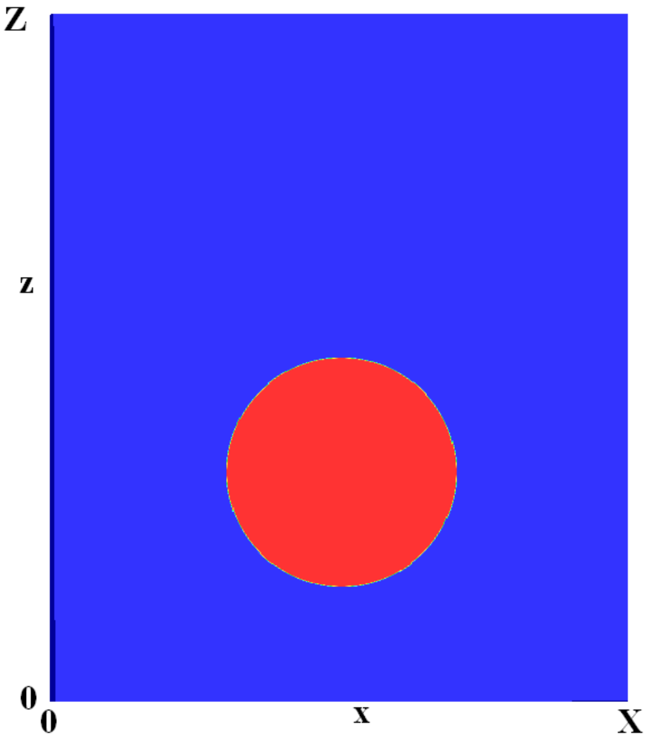


Рис. 1. Начальная геометрия системы

Ускорение тяжести $|\vec{g}|=1$ во всех вариантах расчётов:

$$g_z = -1; \quad g = |\vec{g}| = 1.$$

Величина $\xi \equiv \dfrac{\Delta}{R_0}$, характеризующая степень несжимаемости, в данной задаче равна ξ=102. Здесь $\Delta \equiv \dfrac{P_0}{\rho_a g}$ – параметр неоднородности атмосферы.

2. Результаты расчётов – общая картина

2.1. Начальная стадия образования вихревого кольца

Результаты расчетов представлены на рис. 2–4 в виде изоповерхностей объемных долей вещества термика при рассмотрении сбоку, снизу и сверху на несколько моментов времени. Здесь геометрические размеры приведены к безразмерному виду с помощью масштаба R_0, а моменты времени t приведены к безразмерному виду τ с помощью соотношения

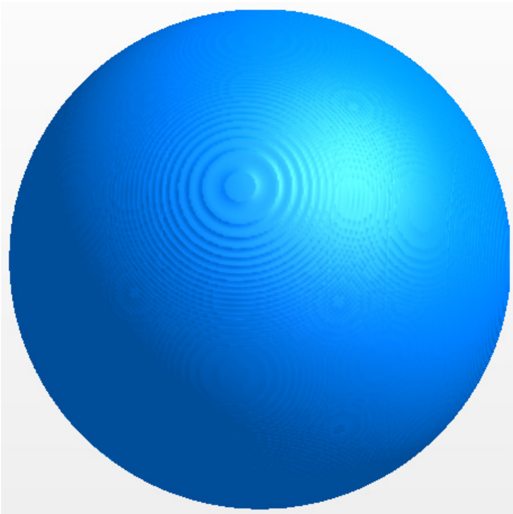
$$\tau = \frac{t}{\sqrt{R_0 / g}}.$$

Рисунки дают наглядную картину образования грибовидной формы, которая затем превращается в вихревое кольцо. При этом хорошо видно, что в целом облако сохраняет свою осевую симметрию. Хорошо видно также, что рассматриваемое течение является неустойчивым, вследствие чего в течении развиваются локальные возмущения границ облака, имеющих место из-за использования кубической сетки, что приводит к турбулизации течения. На рис. П5 представлена форма облака в сечении x = 0,

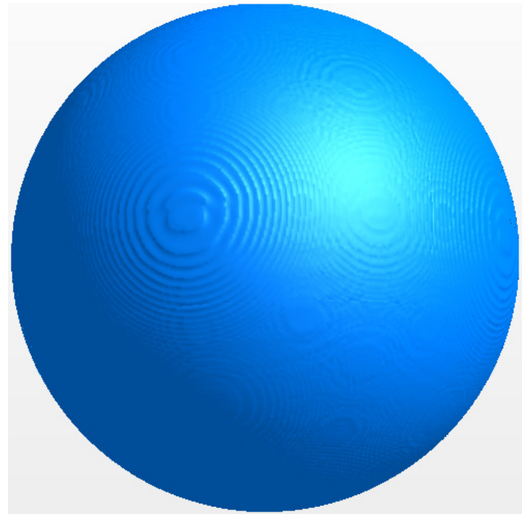
Учтём, что плотность ρ_0 в объёме лёгкого газа много меньше плотности окружающей атмосферы, а начальный радиус объёма мал по сравнению с параметром неоднородности атмосферы: $R_0 \ll \Delta$. Это позволяет считать задачу несжимаемой и использовать результаты [2], а также [4], относящиеся к образованию вихревого кольца. Они заключаются в следующем: объём Ω_0 начинает всплывать с ускорением $\approx 2g$. Одновременно происходит деформация нижней кромки, так что нижний полюс догоняет верхний в некий момент $\tau_1 \approx 1$. В тот же момент циркуляция γ по контуру, проходящему по оси симметрии, достигает максимального значения Γ и далее остаётся постоянной. При этом завихрённость $\vec{\omega} = rot\vec{u}$ оказывается сосредоточенной на поверхности плавучего объёма, как следует из уравнения

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{[\nabla\rho \times \nabla P]}{\rho^2} + (\vec{\omega}\cdot\nabla)\vec{u}, \qquad (1)$$

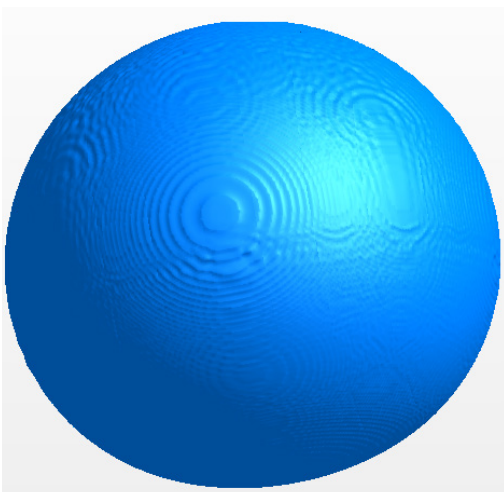
полученного из уравнения Эйлера. Здесь последний член обращается в нуль в силу осевой симметрии (см. также [2]). Первый же член справа обращается в нуль в силу изэнтропичности атмосферы. Отметим, что при $R_0 \ll \Delta$ указанный член пренебрежимо мал, даже если атмосфера слегка отличается от изэнтропической: в этом случае её плотность на расстояниях порядка R_0 практически постоянна.



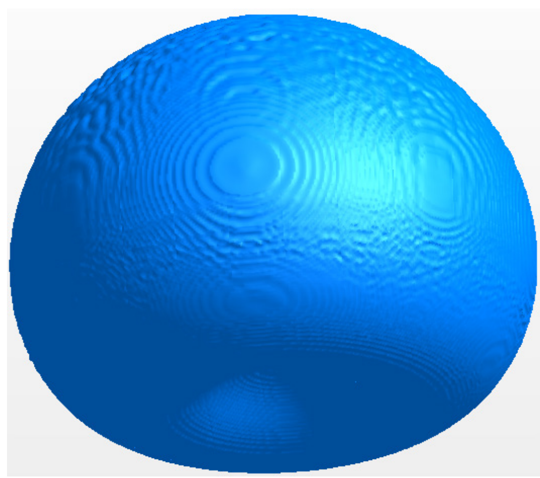
τ = 0



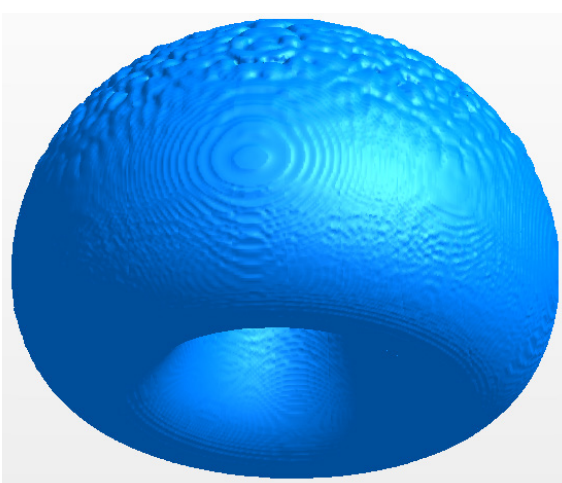
τ = 0,313



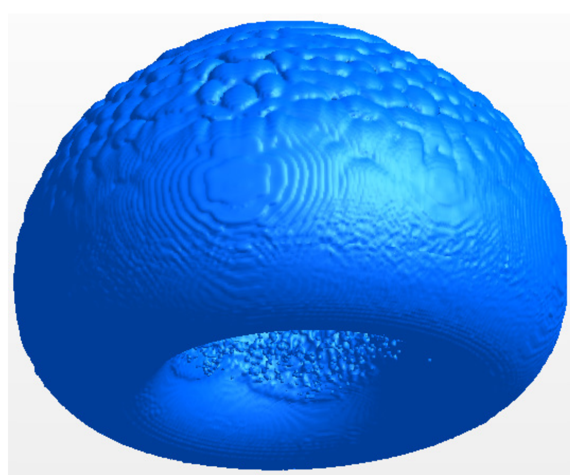
τ = 0,626



τ = 0,939

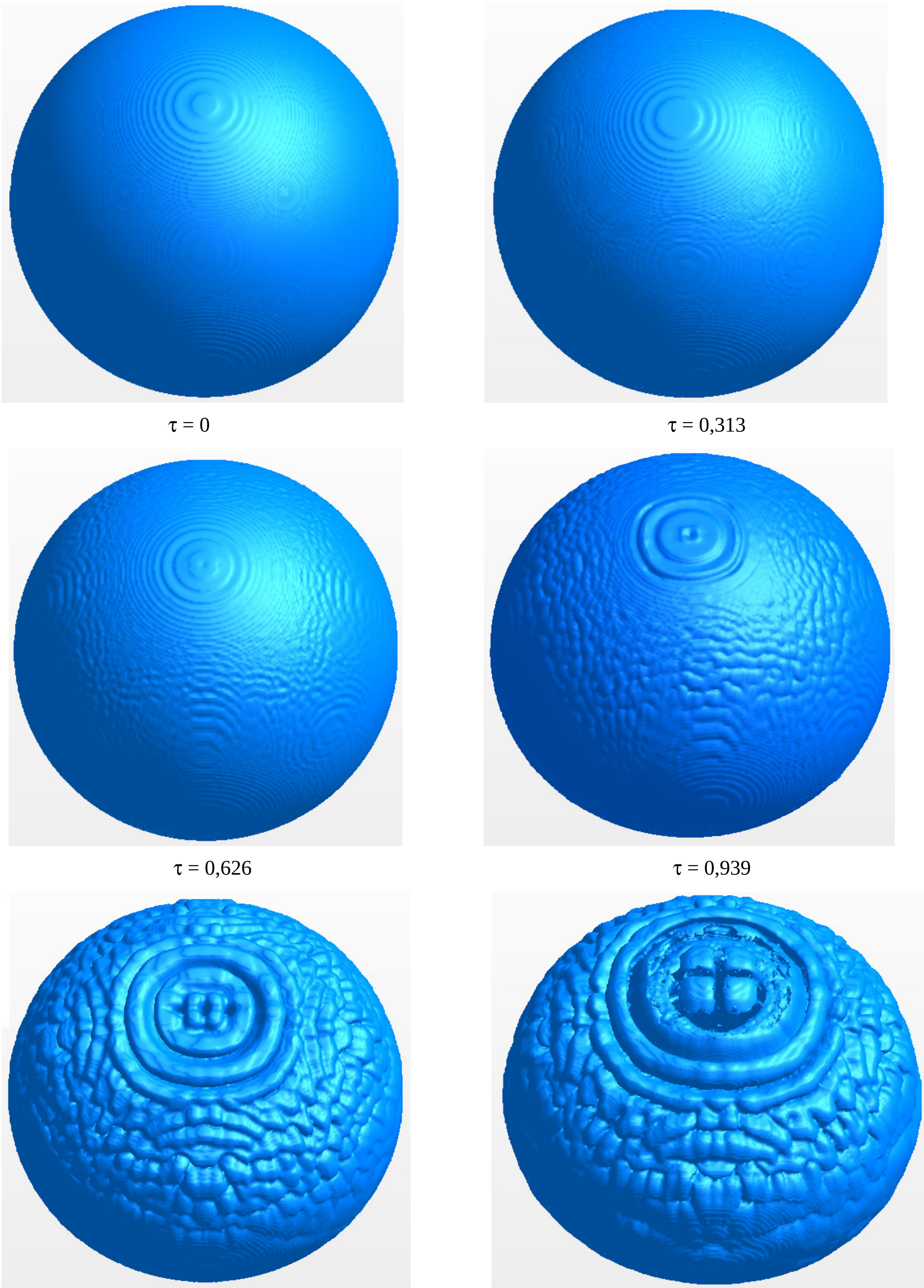


τ = 1,25



τ = 1,57

Рис. 2. Изоповерхности объемной доли вещества термика ($\beta = 0{,}5$) на разные моменты времени, вид сбоку

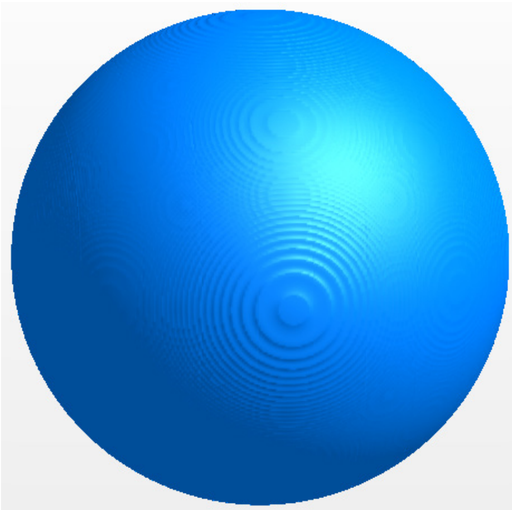


$\tau = 0$ $\tau = 0{,}313$

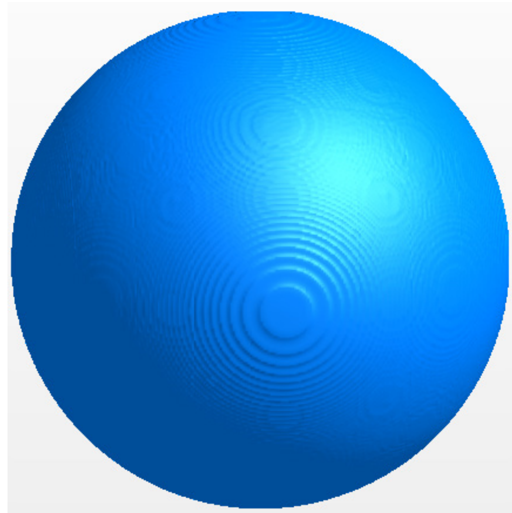
$\tau = 0{,}626$ $\tau = 0{,}939$

$\tau = 1{,}25$ $\tau = 1{,}57$

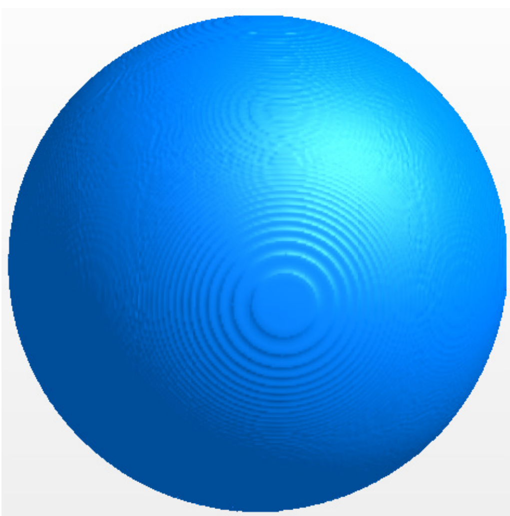
Рис. 3. Изоповерхности объемной доли вещества термика ($\beta = 0{,}5$) на разные моменты времени, вид сверху



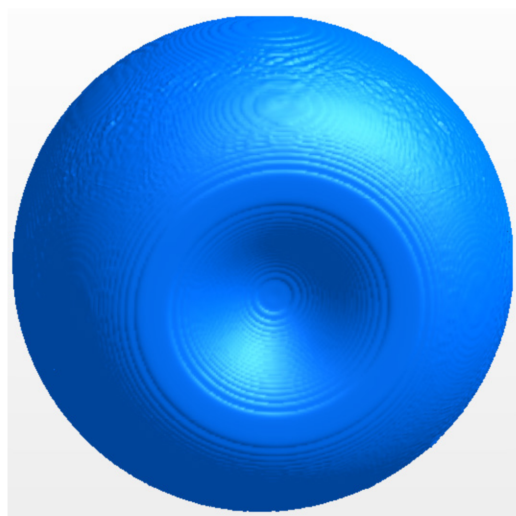
$\tau = 0$



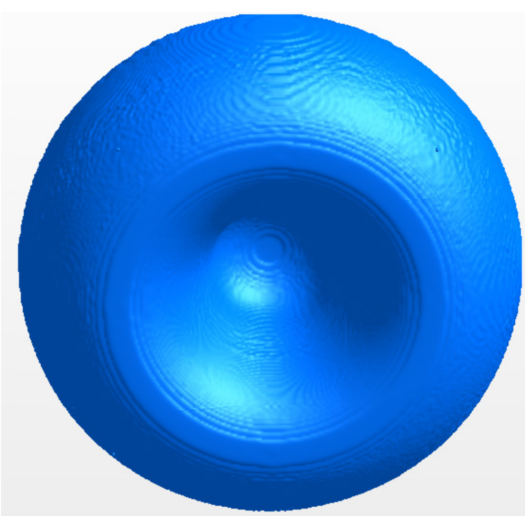
$\tau = 0{,}313$



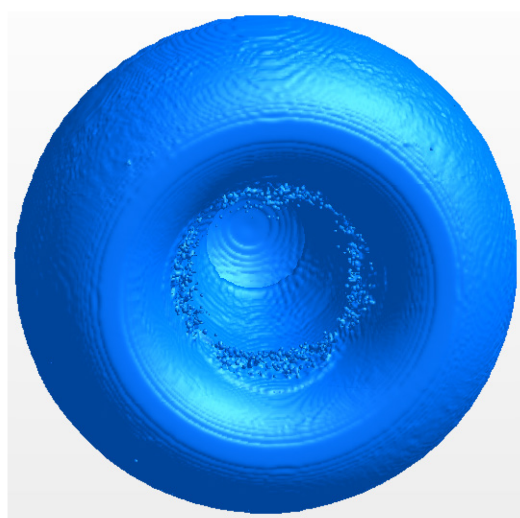
$\tau = 0{,}626$



$\tau = 0{,}939$



$\tau = 1{,}25$



$\tau = 1{,}57$

Рис. 4. Изоповерхности объемной доли вещества термика ($\beta = 0{,}5$) на разные моменты времени, вид снизу

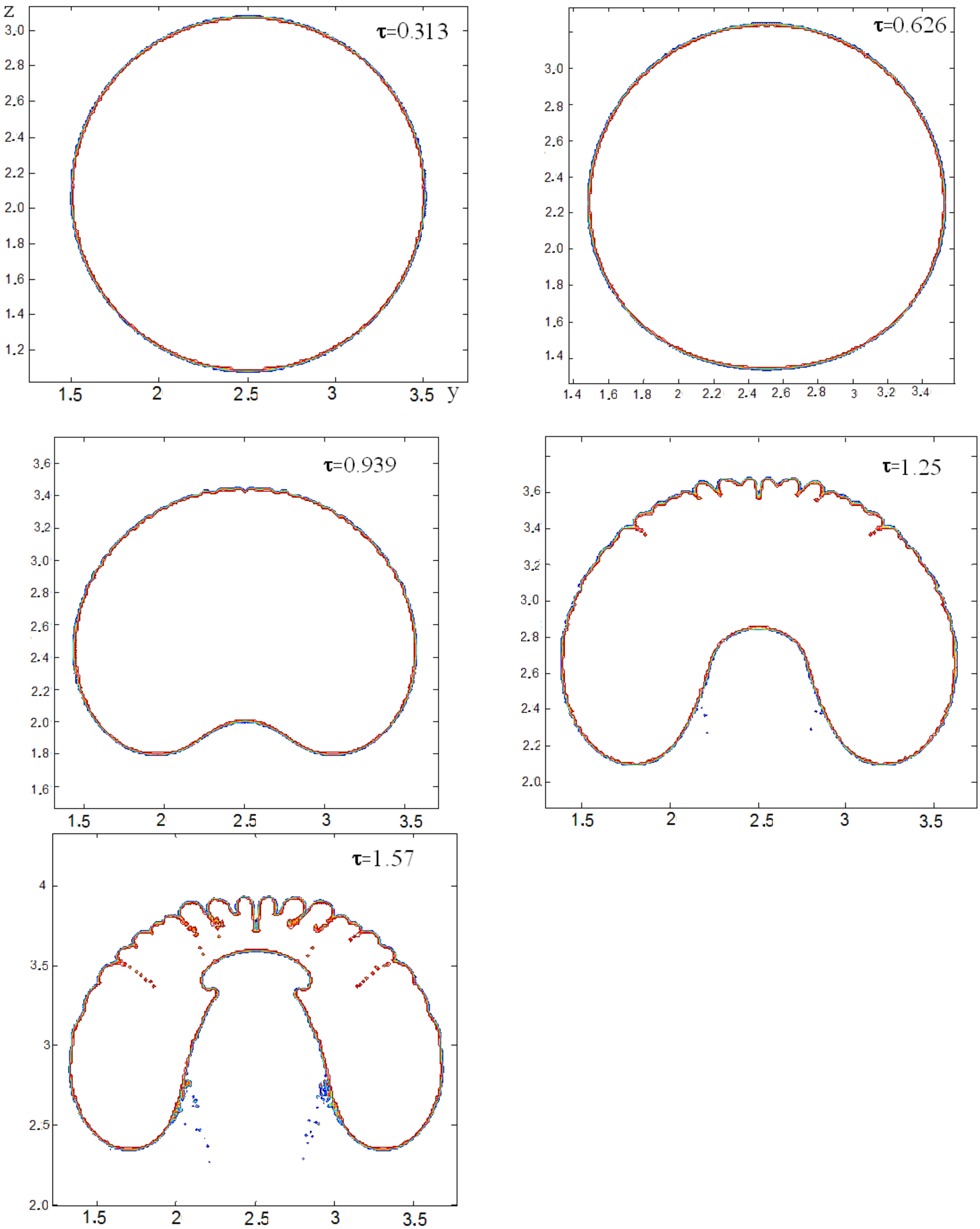


Рис. 5. Двумерные сечения $x = 0$ на разные моменты времени

На рис. 5 показаны вертикальные двумерные сечения через центр кольца ($x = 0$) на разные моменты времени.

2.2. Поздняя стадия движения вихревого кольца

На рис. 6–8 для различных моментов времени показано развитие возмущения контактной границы в виде изоповерхности объёмной доли лёгкого вещества.

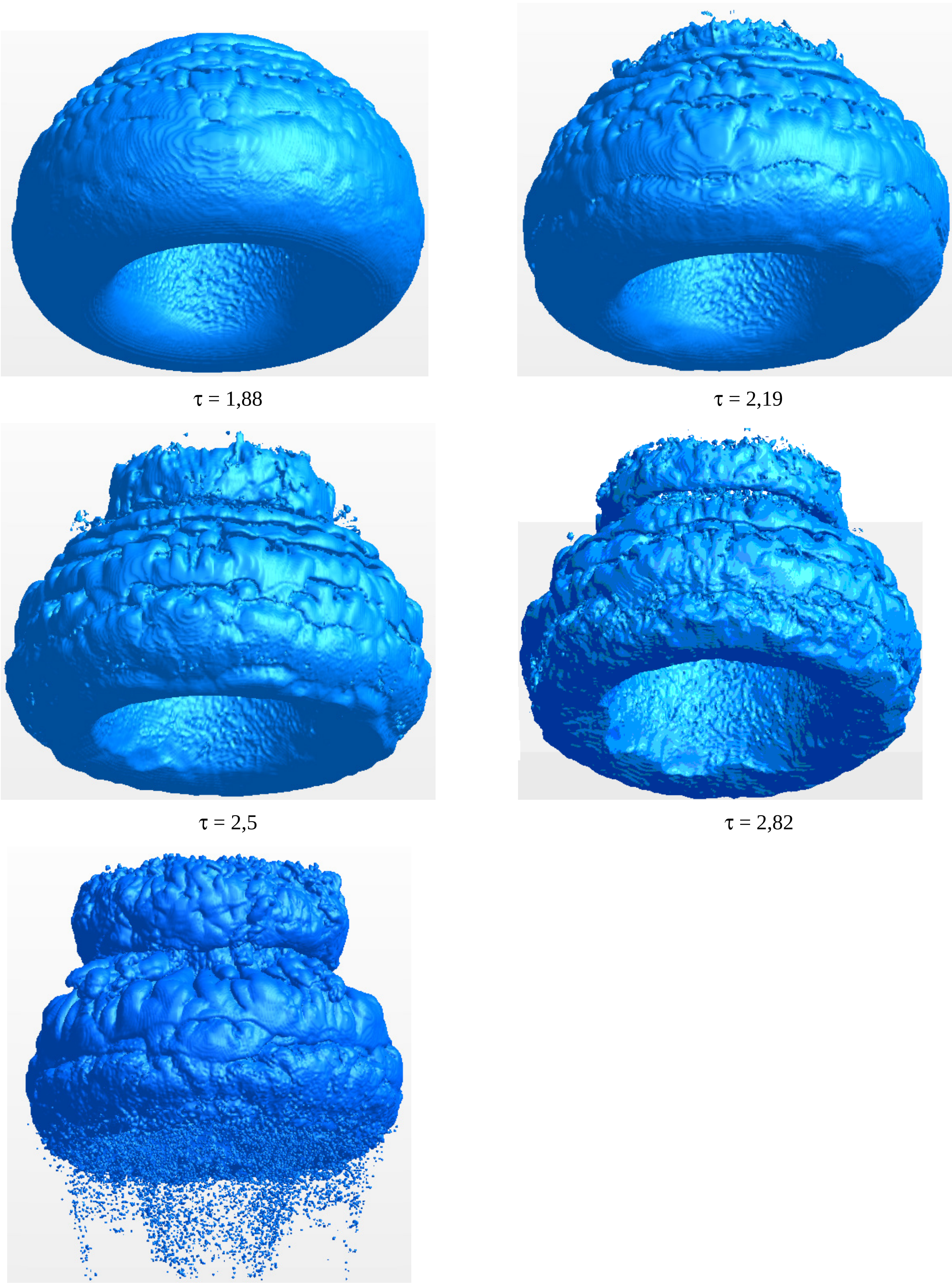
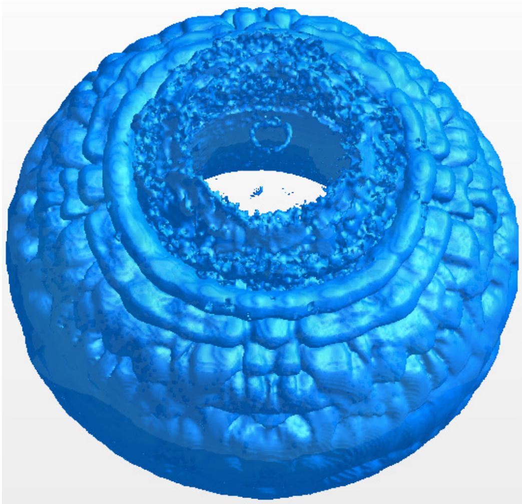
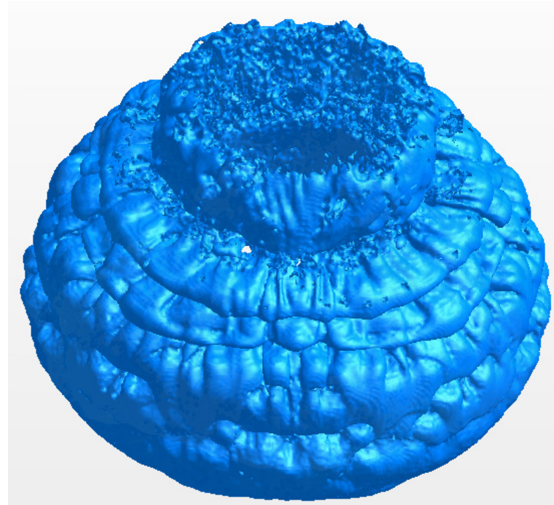


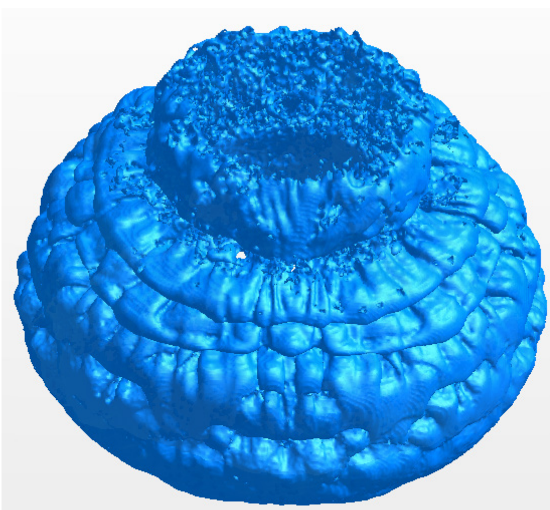
Рис. 6. Изоповерхности объемной доли вещества термика ($\beta = 0{,}5$) на разные моменты времени, вид сбоку



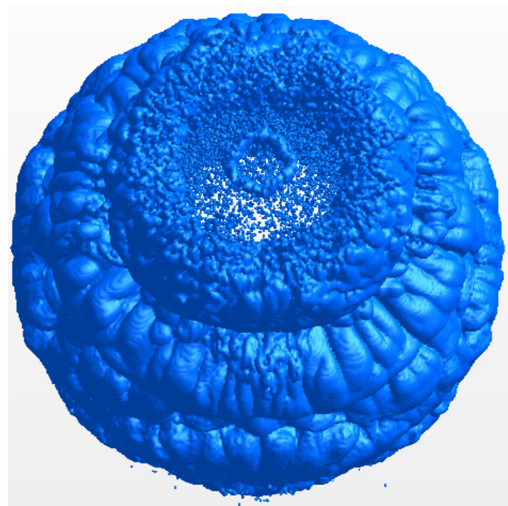
τ = 1,88



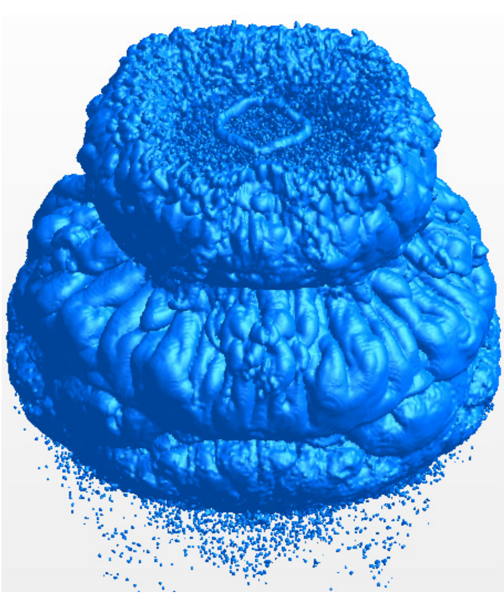
τ = 2,19



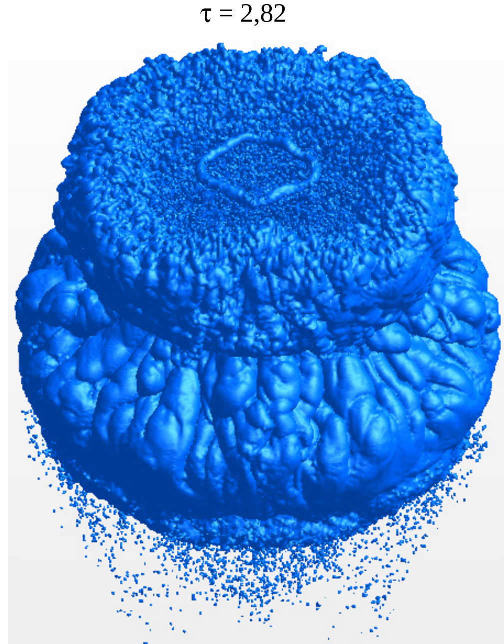
τ = 2,5



τ = 2,82



τ = 3,13



τ = 3,44

Рис. 7. Изоповерхности объемной доли вещества термика ($\beta = 0{,}5$) на разные моменты времени, вид сверху

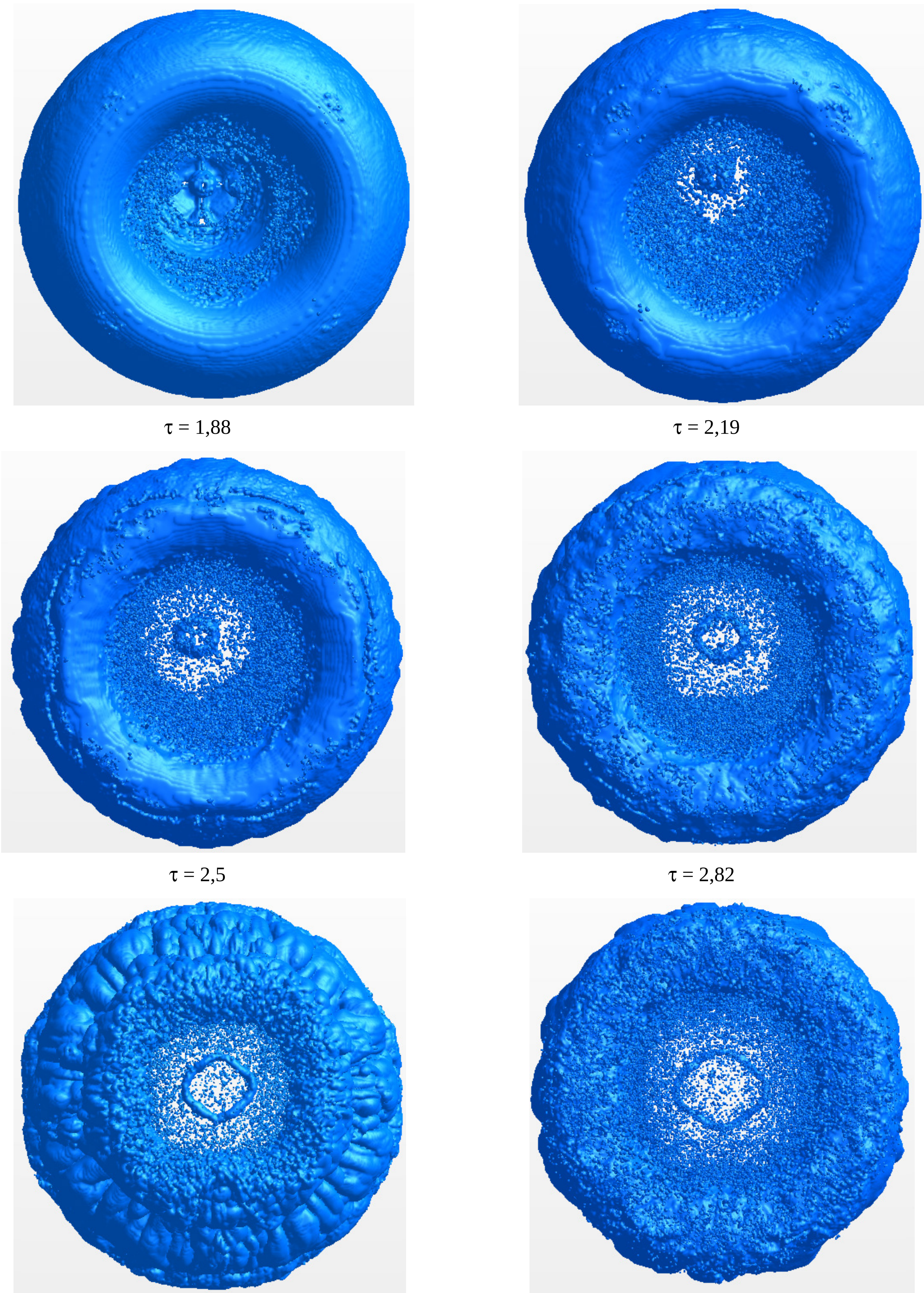


Рис. 8. Изоповерхности объемной доли вещества термика ($\beta = 0{,}5$) на разные моменты времени, вид снизу

Из рис. 6–8 видно, что при $\tau > 1$ в верхней части облака зарождается турбулентность, в то время как в нижней части она отсутствует до момента $\tau = 2–2{,}5$. Затем возникшая циркуляция переносит турбулентность в нижнюю часть вихревого кольца.

На рис. 9 показаны вертикальные двумерные сечения через центр кольца ($x = 0$) на разные моменты времени.

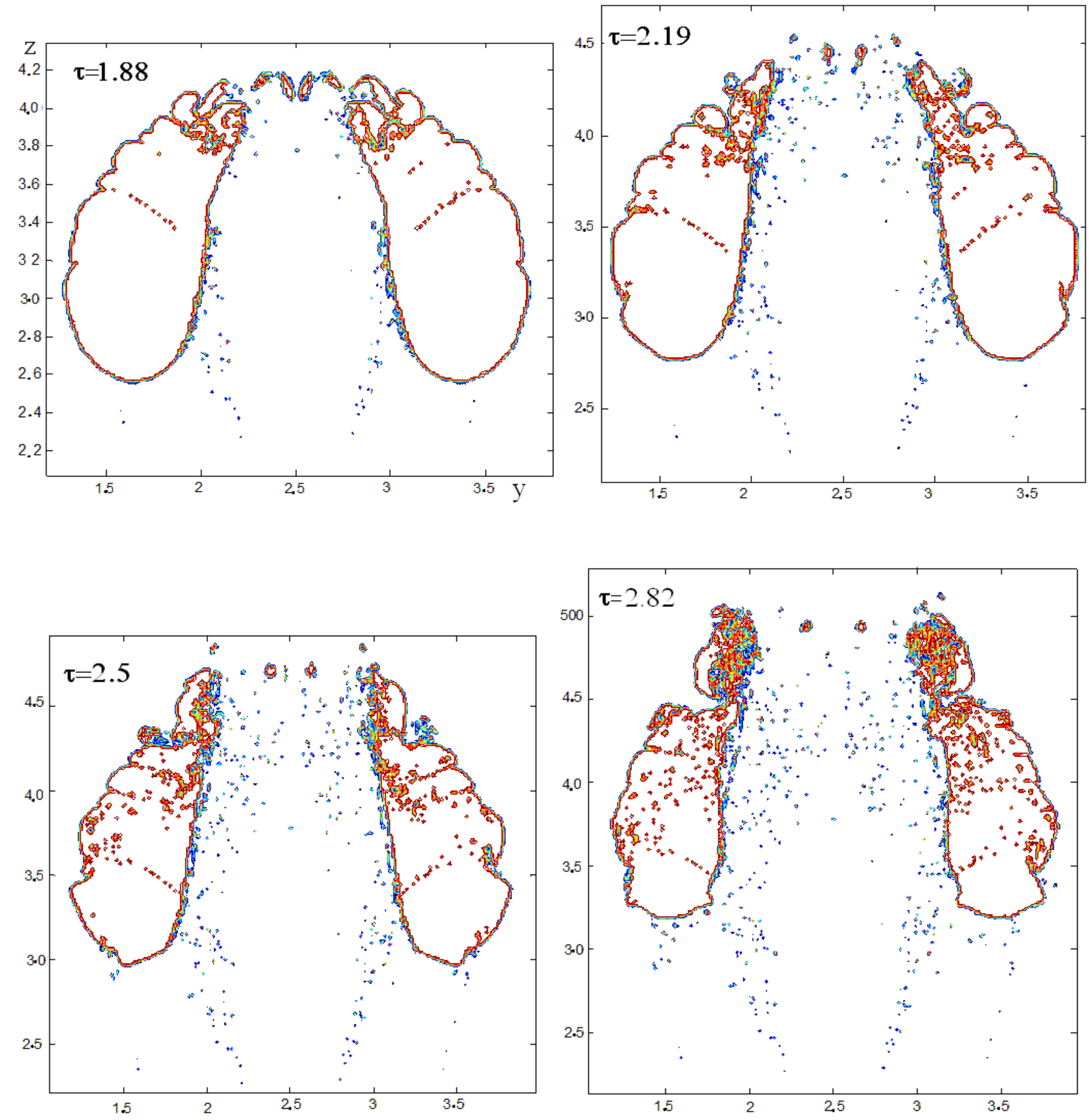


Рис. 9. Двумерные сечения $x = 0$ на разные моменты времени
(оконч. на след с.)

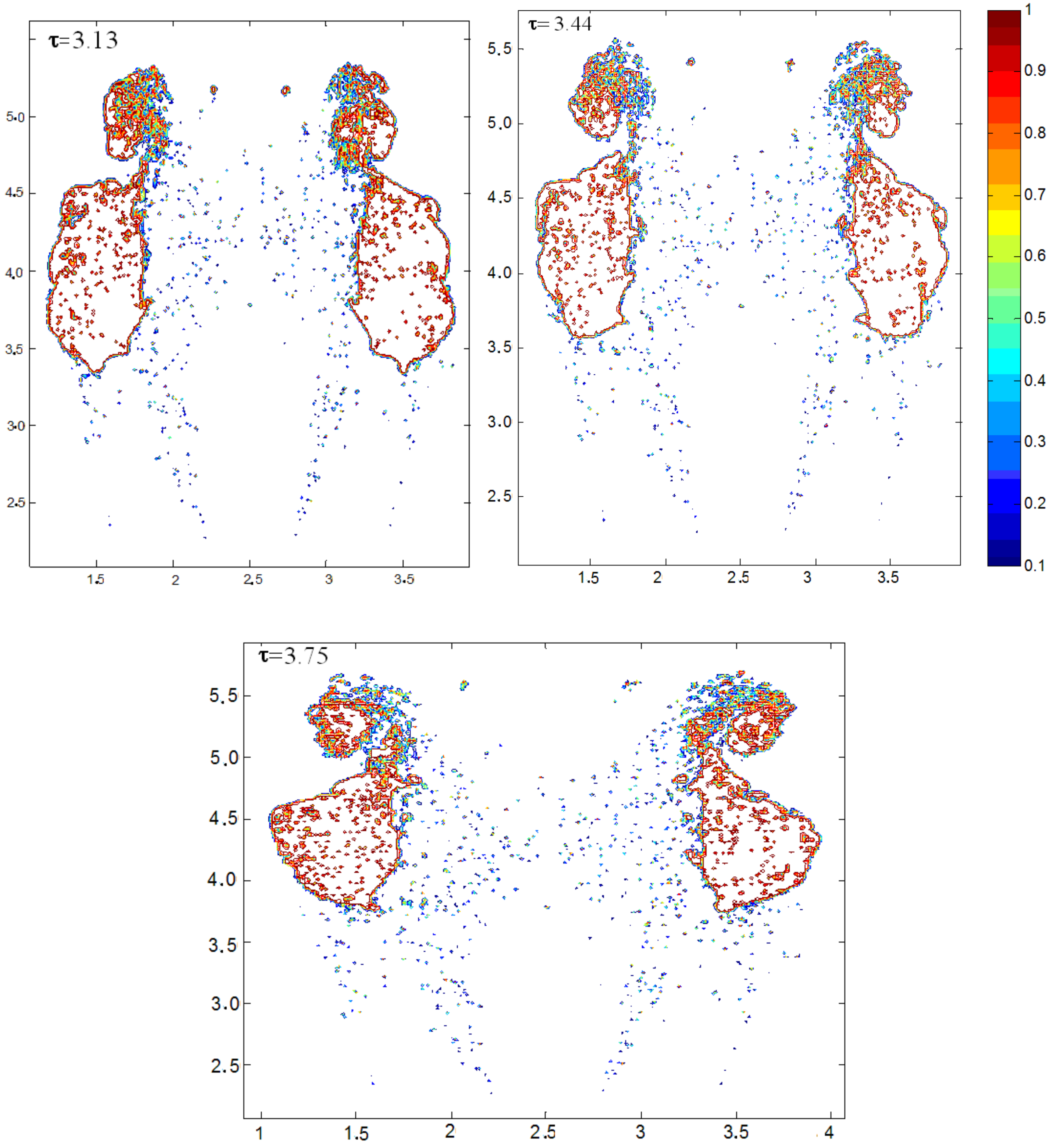


Рис. 9. (Окончание) Двумерные сечения $x = 0$ на разные моменты времени

Из рис. 9 видно, что сечение вихревого кольца, хотя всё ещё и имеет неправильную форму, однако, с течением времени приближается к форме правильного кольца, становясь всё более компактным.

3. Интегральные величиныEquation Section 5 – размеры и высота подъёма – зависимости от времени

На рис. 3.1 приводятся временные зависимости радиуса R_c и высоты подъёма H_c термика. Они определялись по ячеечному массиву объемной до-

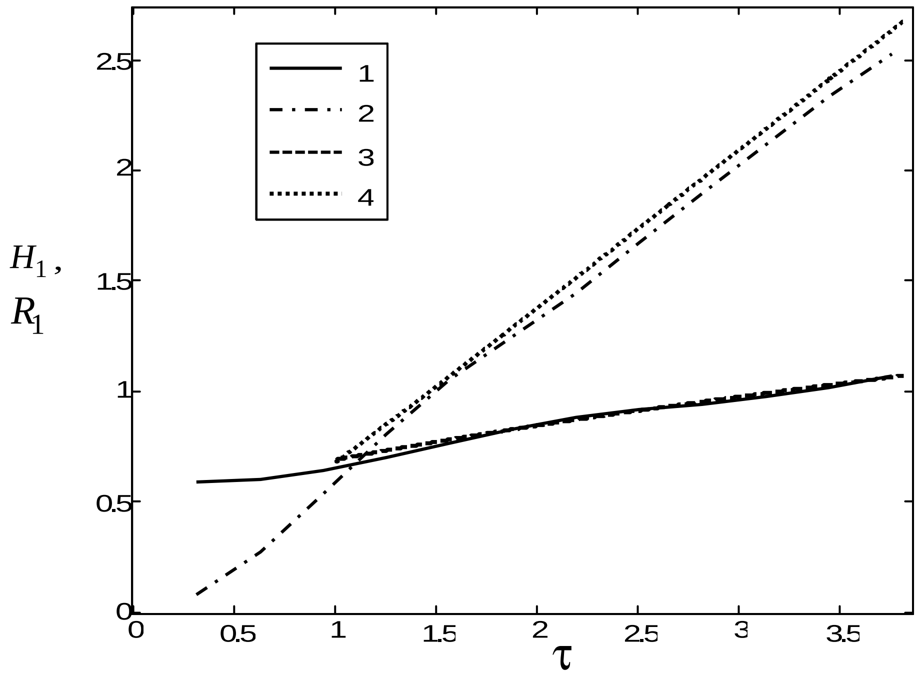


Рис. 10. *R-t* диаграммы радиуса Rc (1,3) и высоты подъёма Hc (2,4) термика в численном расчёте (1,2) и по приближённой аналитической теории (3,4)

ли вещества термика $\beta(x,z)$ в плоскости, проходящей через ось симметрии (x = x_0 = 250 м), по формуле

$$H_c = \frac{\int\limits_{z=0}^{Z}\int\limits_{x=0}^{X/2} \beta(x,z)\cdot(z-z_0)\cdot(x_0-x)\cdot dx\cdot dz}{\int\limits_{z=0}^{Z}\int\limits_{x=0}^{X/2} \beta(x,z)\cdot(x_0-x)\cdot dx\cdot dz},$$

$$R_c = \frac{\int\limits_{z=0}^{Z}\int\limits_{x=0}^{X/2} \beta(x,z)\cdot(x_0-x)^2\cdot dx\cdot dz}{\int\limits_{y=0}^{Y}\int\limits_{x=0}^{X/2} \beta(x,z)\cdot(x_0-x)\cdot dx\cdot dz},$$

где β – объёмная доля вещества термика, z_0 – начальная высота центра термика, x – горизонтальная координата, $x_0 = X/2$ – начальная горизонтальная координата центра термика. Величины на рис. 10 приведены к безразмерному виду:

$$\tau \equiv t/t_0,\ R_1 \equiv R_c/R_0,\ H_1 \equiv H_c/R_0,\ t_0 \equiv \sqrt{\frac{R_0}{g}}.$$

Здесь R_0 – начальный радиус сферического термика, g – ускорение тяжести. На рис. 10 показаны также величины радиуса $R_1(\tau)$ и высоты подъёма $H_1(\tau)$ термика, следующие из приближённой аналитической теории (см. Приложение А), описывающей геометрические параметры вихревого кольца, начиная с момента t_1 его формирования. Мы приняли $\tau_1 = t_1/t_0$ = 1, Γ_1 = 5.6.

Согласие представляется удовлетворительным.

Заключение

Выполнен 3D расчёт образования и движения вихревого кольца. Момент его образования $\tau \approx 1$ оказывается близок к теоретически ожидаемому моменту, который также ранее был получен в 2D расчётах.

3D расчёт данной работы был проведён до довольно поздней стадии $\tau \lesssim 3{,}75$. Показано, что на этой стадии интегральные величины – высота подъёма и радиус вихревого кольца достаточно удовлетворительно описываются приближённой аналитической моделью, которая, в свою очередь, согласуется с известными экспериментальными данными.

Список литературы

1. Основы методики МЕДУЗА численного расчёта двумерных нестационарных задач газодинамики Сб. "Численные методы механики сплошной среды", Новосибирск, 1972, т.3, No2, стр. 18-55. Глаголева Ю.П., Жогов Б.М., Кирьянов Ю.Ф., Мальшаков В.Д., Нестеренко Л.В., Подливаев И.Ф., Софронов И.Д.

2. Образование кольцевого вихря при подъёме лёгкого газа в тяжёлом. Сб."Численные методы механики сплошной среды", Новосибирск, 1974, т.5, No1, стр.38-52. Глаголева Ю.П., Жмайло В.А., Мальшаков В.Д., Нестеренко Л.В., Стаценко В.П., Софронов И.Д.

3. Эйлеровы численные методики ЭГАК и ТРЭК для моделирования многомерных течений многокомпонентной среды. ТРУДЫ РФЯЦ-ВНИИЭФ, вып.12, стр.54-68, 2008. Стадник А.Л., Шанин А.А., Янилкин Ю.В. и др.

4. Valters J.K., and Davidson J.F. The initial motion of a gas bubble formed in an inviscid liquid. J.of Fluid Mech., 1963, v.17, part 3.

5. Ламб Г. Гидродинамика, ОГИЗ – Гостехиздат, 1947г.

6. Тарасов В.Ф. О движении всплывающего вихревого кольца. Динамика сплошной среды, Новосибирск, вып.23, 1975.

Приложение А

Теория движения плавучих вихревых колец в поле тяжести

Полагаем, что плотность ρ_0 в первоначально покоящемся сферическом объёме $\Omega_0 = \frac{4}{3}\pi \cdot R_0^3$ много меньше плотности окружающей среды ρ_a. Завихрённость $\vec{\omega} = rot\vec{u}$ остаётся сосредоточенной на поверхности плавучего объёма, как отмечено в разделе 2.1.

Полный импульс жидкости, согласно [5], можно выразить через радиус R_1 вихревого кольца, плотность в котором принята в [5] равной ρ_a:

$$\mathscr{P} = \rho_a \cdot \pi \cdot \int_\Sigma r^2 \cdot \vec{\omega} \cdot d\vec{\Sigma} = \rho_a \cdot \pi \cdot \Gamma \cdot R_1^2,$$

Интегрирование ведётся по поверхности Σ, натянутой на контур C (см. рис. А.1).

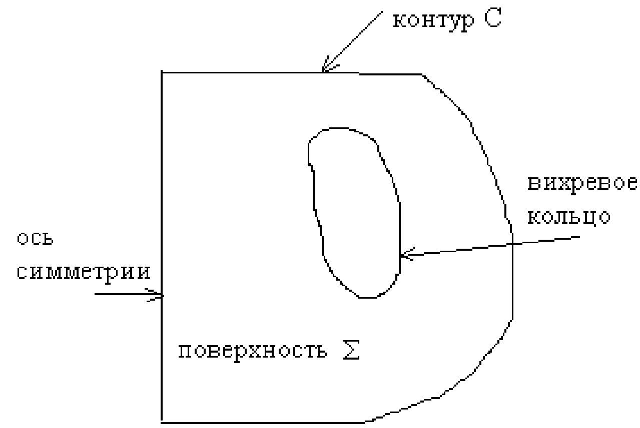


Рис. А.1. Область интегрирования

Здесь $d\vec{\Sigma}$ – элемент сечения, $\Gamma = \int_\Sigma \vec{\omega} \cdot d\vec{\Sigma}$, r – расстояние от оси симметрии. С учётом же малой плотности в кольце приведённый к безразмерному виду импульс равен

$$\mathscr{P}_1 = \pi \cdot \left(\Gamma_1 \cdot R_1^2 - \frac{4}{3} \cdot u_1 \right) \approx \pi \cdot \left(\Gamma_1 \cdot R_1^2 - \frac{4}{3} \cdot u_{10} \right). \quad (А.1)$$

Здесь величины приведены к безразмерному виду: размеры с помощью масштаба R_0, скорости с помощью масштаба $\sqrt{R_0 \cdot g}$, плотность с помощью масштаба ρ_a; приведённая величина циркуляции

$$\Gamma_1 = \frac{\Gamma}{R_0 \cdot \sqrt{R_0 \cdot g}}, \quad (А.2)$$

u_1 – скорость подъёма центра кольца, а u_{10} – скорость в момент τ_1 его образования. В (А.1) мы пренебрегли изменением со временем малого слагаемого с u_1, то есть, положили $u_1 \approx u_{10}$.

Приведённый к безразмерному виду радиус R_1 вихревого кольца определяется выражением

$$R_1^2 = \frac{1}{\Gamma_1} \cdot \int_\Sigma \left(\frac{r}{R_0} \right)^2 \cdot \vec{\omega} \cdot d\vec{\sigma}. \quad (А.3)$$

Приведённая к безразмерному виду сила Архимеда

$$F = \frac{4}{3}\pi. \quad (А.4)$$

Её действие приводит к увеличению вихревого импульса

$$\frac{dP_1}{d\tau} = F .$$

Отсюда и из (А.1), (А.4) получим

$$R_1 = \sqrt{\frac{4}{3\Gamma_1} \cdot (\tau + u_{10})} . \qquad (А.5)$$

Принимаем, что при $\tau > \tau_1$ сечение вихревого кольца имеет правильную круговую форму радиусом $a_1 < R_1$. Из сохранения объёма и выражения (А.5) следует

$$a_1 = \sqrt{\frac{2}{3\pi R_1}} . \qquad (А.6)$$

Для скорости подъёма кольца U_1 (в размерном виде) в [5] получено выражение

$$U_1 \equiv \frac{dz}{dt} = \frac{1}{\Gamma \cdot r_1^2} \cdot \left[\frac{T}{2\pi\rho_a} + 3 \cdot J \right], \qquad (А.7)$$

$$J = \int_{\Sigma} \vec{\omega} \cdot (z - z_1) \cdot r \cdot \frac{dr}{dt} \cdot d\Sigma , \qquad (А.8)$$

где далее в [5] пренебрегалось изменением $\vec{\omega}$ по сечению кольца. Мы рассмотрим произвольную функцию $\vec{\omega}(\tilde{r})$ (но $\vec{\omega}$ не зависит от θ), здесь $\tilde{r}$ – расстояние от кольцевой оси, θ – угол радиус-вектора $\vec{\tilde{r}}$ с направлением оси Z. Интеграл в (А.8) запишем в виде

$$J \approx r_1 \cdot \int_{\tilde{r}=0}^{a} U \cdot \tilde{r}^2 \cdot \omega(\tilde{r}) \cdot \left(\int_{\theta=0}^{2\pi} \cos^2\theta \cdot d\theta \right) d\tilde{r} = \pi r_1 \cdot \int_{\tilde{r}=0}^{a} U \cdot \tilde{r}^2 \cdot \omega(\tilde{r}) \cdot d\tilde{r} . \qquad (А.9)$$

Здесь $U(r) = \dfrac{\gamma(r)}{2\pi r}$ – круговая скорость, где

$$\gamma(\tilde{r}) = 2\pi \cdot \int^{\tilde{r}} \tilde{r}' \cdot \omega(\tilde{r}') \cdot d\tilde{r}' , \qquad (А.10)$$

причём $\gamma(a_1) = \Gamma$. Тогда (А.9) можно записать

$$J = \pi r_1 \cdot \int_{\tilde{r}=0}^{a} \tilde{r} \cdot \omega(\tilde{r}) \cdot d\tilde{r} \cdot \int_{\tilde{r}'=0}^{\tilde{r}} \tilde{r}' \cdot \omega(\tilde{r}') \cdot d\tilde{r}' = \frac{\pi r_1}{2} \cdot \left(\frac{\Gamma}{2\pi} \right)^2 \qquad (А.11)$$

независимо от вида $\omega(\tilde{r})$. Подставляя (А.11) в (А.7), получим

$$U_1 = \frac{1}{\Gamma \cdot r_1^2} \cdot \left[\frac{T}{2\pi\rho_a} + \frac{3 r_1 \Gamma^2}{8\pi} \right]. \qquad (А.12)$$

Если завихрённость равномерно распределена по сечению кольца, как это принято в [5], то для кинетической энергии получим согласно [5]

$$T = \frac{\Gamma^2 \cdot r_1 \cdot \rho_a}{2} \cdot \left(\ln\left(\frac{8 \cdot r_1}{a} \right) - \frac{7}{4} \right). \qquad (А.13)$$

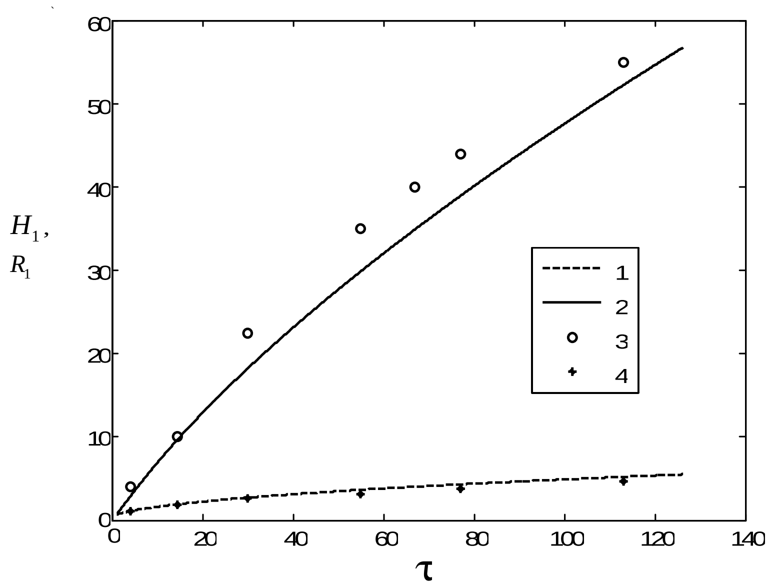


Рис. А.2. Высота подъёма (2, 3) и радиус (1, 4) вихревого кольца. 1, 2 – расчёт, 3, 4 – измерения [6]

Подставляя это в (A.12), получим

$$U_1 = \frac{\Gamma}{4\pi \cdot r_1} \cdot \left(\ln\left(\frac{8 \cdot r_1}{a} \right) - \frac{1}{4} \right). \qquad (A.14)$$

Это выражение совпадает с полученным в [5].

Рассмотрим теперь случай завихрённости, распределённой по поверхности кольца, что соответствует условиям задачи, рассматриваемой в данной работе. Для кинетической энергии можно получить тем же способом, что и в [5], выражение

$$T = \frac{\Gamma^2 \cdot r_1 \cdot \rho_a}{2} \cdot \left(\ln\left(\frac{8 \cdot r_1}{a} \right) - \frac{11}{4} \right). \qquad (A.15)$$

Тогда из (A.12) следует

$$U_1 = \frac{\Gamma}{4\pi \cdot r_1} \cdot \left(\ln\left(\frac{8 \cdot r_1}{a} \right) - \frac{5}{4} \right), \qquad (A.16)$$

или, в безразмерном виде,

$$u_1 = \frac{\Gamma_1}{4\pi \cdot R_1} \cdot \left(\ln\left(\frac{8 \cdot R_1}{a_1} \right) - \frac{5}{4} \right). \qquad (A.17)$$

Высота подъёма H_1 вихревого кольца

$$H_1(\tau) = u_{10} \cdot \tau_1 + \int_{\tau_1}^{\tau} u_1 \cdot d\tau, \qquad (A.18)$$

где $u_{10} = u_1(\tau_1)$. Вычисленные таким образом величины $H_1(\tau)$ и $R_1(\tau)$ показаны на рис. A.2 в сравнении с экспериментальными данными [6]. Согласие представляется удовлетворительным.