

# ХОД ЛУЧЕЙ В МНОГОПРОХОДНЫХ РЕЗОНАТОРАХ И ВОЛНОВОДАХ, СВОЙСТВА КОТОРЫХ ИЗМЕНЯЮТСЯ ПО ХОДУ ЛУЧА

## RAY TRACING IN MULTIPASS RESONATORS AND WAVEGUIDES WITH VARYING PROPERTIES ALONG THE RAY

В. Ю. Матъев

V. Yu. Matyev

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», Саров Нижегородской обл.

Russian Federal Nuclear Center – All-Russian Scientific-Research Institute of Experimental Physics

*Рассмотрен ход лучей в квазипериодическом волноводе (многопроходном резонаторе) с плавным изменением характеристик одного прохода. Показано, что классическое условие устойчивости (модуль следа лучевой матрицы одного прохода меньше двух) не обеспечивает ограниченности лучевой траектории после большого числа проходов.*

*The ray tracing in the quasi-periodic waveguide (multi-pass resonators) with slowly varying properties of one pass is considered. The classical stability condition (absolute value of the ray matrix trace for one pass is smaller than two) is not sufficient to confine the ray trajectory after a large number of passes.*

### Введение

Рассмотрен ход лучей в квазипериодическом волноводе (многопроходном резонаторе), элементы которого плавно меняются по своим оптическим свойствам от периода к периоду (например, вследствие разогрева). Волновод может содержать как элементы, дискретно изменяющие ход лучей (преломляющие поверхности, линзы; резонатор – еще и зеркала), так и области с непрерывным изменением показателя преломления (газовые или твердотельные ячейки), см. рис. 1. В рамках параксиальной оптики, периодический участок волновода характеризуется лучевой матрицей (определяемой как произведение лучевых матриц отдельных элементов) [1]. Плавное изменение свойств волновода по ходу луча означает, что соответствующие элементы лучевой матрицы для соседних участков различаются мало.

Такая же ситуация возникает в газовом лазере, в котором поперечный профиль плотности среды развивается со временем вследствие неоднородного энерговыделения [2–3]; матрица одного прохода луча через резонатор слабо меняется от прохода к проходу. Другой пример – так называемый «устойчиво-неустойчивый» резонатор с прокачиваемой средой [4–5], см. рис. 2; здесь поперечный профиль показателя преломления развивается вдоль потока газа (по оси  $x$ ); при движении луча вдоль оптической оси  $z$  лучевая траектория смещается по (или против) потока газа, так что лучевая матрица одного прохода луча через резонатор также меняется.

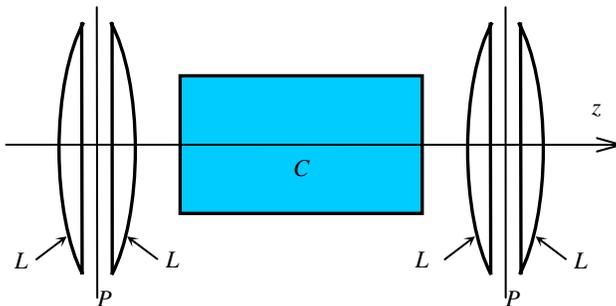


Рис. 1. Схема периодического волновода:  $P$  – опорные плоскости, разделяющие периоды волновода;  $L$  – линзы;  $C$  – ячейка с непрерывной средой (газовая или твердотельная);  $z$  – оптическая ось

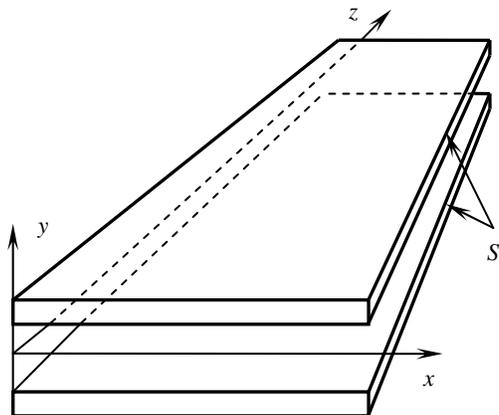


Рис. 2. Схема прокачного лазера:  $S$  – стенки кюветы, между которыми течет газ

Математически задача формулируется так. Ход лучей через квазипериодический участок волновода (один проход через резонатор) задан с помощью лучевой матрицы  $\mathbf{m}_n$ , которая немного различается для соседних участков (проходов):

$$\begin{pmatrix} y_n \\ \varphi_n \end{pmatrix} = \mathbf{m}_n \cdot \begin{pmatrix} y_{n-1} \\ \varphi_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{m}_n = \begin{pmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{pmatrix}, \quad \varphi = \frac{dy}{dz}, \quad (1)$$

где  $y_n$  – поперечное смещение луча после прохождения  $n$  участков волновода ( $n$  проходов резонатора),  $\varphi_n$  – соответствующий угол наклона лучевой траектории к оптической оси  $z$ . Требуется найти лучевую матрицу для  $N$  участков ( $N$  проходов):

$$\begin{pmatrix} y_N \\ \varphi_N \end{pmatrix} = \prod_{k=0}^{N-1} \mathbf{m}_{N-k} \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ \varphi_0 \end{pmatrix} = \mathbf{M}_N \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ \varphi_0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_N = \prod_{k=0}^{N-1} \mathbf{m}_{N-k}, \quad (2)$$

где  $y_0$  – начальное смещение луча,  $\varphi_0$  – начальный угол наклона луча.

Плавное изменения оптических свойств волновода по ходу луча означает, что

$$|\Delta A_n/A_n| \ll 1, \quad |\Delta B_n/B_n| \ll 1, \quad |\Delta C_n/C_n| \ll 1, \quad |\Delta D_n/D_n| \ll 1; \quad (3)$$

где  $\Delta A_n = A_{n+1} - A_n$ ,  $\Delta B_n = B_{n+1} - B_n$ ,  $\Delta C_n = C_{n+1} - C_n$ ,  $\Delta D_n = D_{n+1} - D_n$ .

Матрица  $\mathbf{m}_n$ , как произведение унимодулярных лучевых матриц отдельных элементов волновода (резонатора), также унимодулярна,  $\det \mathbf{m}_n = A_n \cdot D_n - B_n \cdot C_n = 1$ . В более общем случае ( $\det \mathbf{m}_n \neq 1$ ) можно разделить все элементы матрицы на корень из детерминанта и домножить результат (2) на произведение детерминантов матриц.

## 1. Ход лучей через многопроходный резонатор

Особенностью резонатора как волновода является симметрия матрицы полного прохода по главной диагонали,  $A = D$ . Действительно, для произвольной  $abcd$  – матрицы  $\mathbf{w}$  полупрохода резонатора от одной опорной плоскости до другой, обратная матрица  $\mathbf{w}^{-1}$ , матрица обратного полупрохода  $\mathbf{w}_R$  и матрица полного прохода  $\mathbf{m}$  имеют вид [1]:

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; \quad \mathbf{w}^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_R = \begin{pmatrix} d & b \\ c & a \end{pmatrix}, \quad \mathbf{m} = \mathbf{w}_R \cdot \mathbf{w} = \begin{pmatrix} da+bc & db+bd \\ ca+ac & cb+ad \end{pmatrix}.$$

Элементы матрицы  $\mathbf{m}$  можно выразить через тригонометрические (или гиперболические) функции. Поскольку  $\det \mathbf{m} = 1$ ,  $A \cdot D = A^2 = 1 + B \cdot C$ . Если  $B \cdot C < 0$ , то  $A^2 < 1$ ; можно положить  $A = D = \cos \Omega$ ,  $B \cdot C = \sin^2 \Omega$ , определив «фазу» прохода  $\Omega$  (по модулю). Полагая  $B = (1/\omega) \cdot \sin \Omega$ ,

$C = -\omega \cdot \sin \Omega$ , можно определить «частоту» прохода  $\omega$  и знак фазы  $\Omega$ . Если  $B \cdot C > 0$ ,  $A^2 > 1$ ;  $A = D = \operatorname{ch} \Omega$ ,  $B = (1/\omega) \cdot \operatorname{sh} \Omega$ ,  $C = \omega \cdot \operatorname{sh} \Omega$ . Если  $B \cdot C = 0$ , эта процедура некорректна. Итак,

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} \cos \Omega & (1/\omega) \cdot \sin \Omega \\ -\omega \cdot \sin \Omega & \cos \Omega \end{pmatrix}, \quad B \cdot C < 0; \quad \mathbf{m} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \Omega & (1/\omega) \cdot \operatorname{sh} \Omega \\ \omega \cdot \operatorname{sh} \Omega & \operatorname{ch} \Omega \end{pmatrix}, \quad B \cdot C > 0. \quad (4)$$

Матрицы вида (4) описывают ход лучей через непрерывную среду с параболической зависимостью показателя преломления  $n^*(y)$  поперек оптической оси  $z$  [6]. В этом случае лучевое уравнение и его решение (для убывающей параболы) имеет вид [5, 6]:

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + \omega^2 \cdot y = 0; \quad y(z) = y_0 \cos(\omega \cdot z) + \frac{\varphi_0}{\omega} \sin(\omega \cdot z); \quad \omega^2 = -\frac{1}{y} \frac{\partial n^*}{\partial y}. \quad (5)$$

Следовательно, ход лучей через резонатор с плавным изменением оптических свойств можно трактовать как прохождение луча через непрерывную среду с плавным изменением частоты  $\omega = \omega(z)$ . Лучевая траектория в такой среде имеет вид осцилляций типа (5), амплитуда и частота которых меняются по оси  $z$ ; ее можно найти с помощью преобразований Лиувилля:

$$\Omega(z) = \int_0^z \omega(z') dz'; \quad y(\Omega) = Y(\Omega) \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^\Omega \frac{1}{\omega} \cdot \frac{d\omega}{d\Omega} d\Omega'\right) = Y(\Omega) \cdot \sqrt{\frac{\omega(0)}{\omega(z)}}.$$

Подставляя эти преобразования в лучевое уравнение, нетрудно получить:

$$\frac{d^2 Y}{d\Omega^2} + W(\Omega)^2 \cdot Y = 0; \quad W(\Omega) = \sqrt{1 + w(\Omega)}; \quad w(\Omega) = \frac{-1}{\sqrt{\omega(\Omega)}} \cdot \frac{d^2}{d\Omega^2} (\sqrt{\omega(\Omega)}). \quad (6)$$

Если на периоде осцилляции  $Z_1$ , который задается условием  $\omega Z_1 = \pi$ , изменение частоты  $\Delta\omega_z \ll \omega$ , то в первом приближении  $W(\Omega) = 1$ , так что

$$Y(\Omega) = Y_0 \cos \Omega + Y'_0 \sin \Omega, \quad Y'(\Omega) = -Y_0 \sin \Omega + Y'_0 \cos \Omega; \quad (7)$$

$$Y' = \frac{dY}{d\Omega} = \frac{1}{\omega(z)} \cdot \frac{d}{dz} \left( y(z) \cdot \sqrt{\frac{\omega(z)}{\omega(0)}} \right) = \frac{1}{\sqrt{\omega(z) \cdot \omega(0)}} \left[ \frac{dy}{dz} + \frac{y(z)}{2\omega(z)} \frac{d\omega}{dz} \right] \approx \frac{\varphi(z)}{\sqrt{\omega(z) \cdot \omega(0)}},$$

поскольку  $(d\omega/dz) / (2\omega^2) \cong \Delta\omega_z / (2\omega^2 Z_1) = \Delta\omega_z / (2\pi\omega) \ll 1$ .

Аналогично, если в резонаторе частота  $\omega_k$  и фаза  $\Omega_k$   $k$ -прохода плавно меняются по ходу луча, то для большого числа проходов ход лучей может быть записан как

$$\begin{pmatrix} y_N \\ \varphi_N \end{pmatrix} = \mathbf{M}_N \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ \varphi_0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{M}_N = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_N}} \cos \Phi_N & \frac{1}{\sqrt{\omega_N \omega_1}} \sin \Phi_N \\ -\sqrt{\omega_N \omega_1} \sin \Phi_N & \sqrt{\frac{\omega_N}{\omega_1}} \cos \Phi_N \end{pmatrix}; \quad \Phi_N = \sum_{k=1}^N \Omega_k. \quad (8)$$

Решение лучевого уравнения вида (5), но с возрастающей параболой, аналогично (8); нужно лишь заменить  $\cos \Omega \rightarrow \operatorname{ch} \Omega$ ,  $\sin \Omega \rightarrow \operatorname{sh} \Omega$  и поменять знак в левом нижнем матричном элементе, см. (4). Матрица (4) производит поворот вектора  $(y, \varphi/\omega)$  на угол  $\Omega$ , не меняя его длины. Матрица (8) производит поворот вектора  $(Y, Y')$  на угол  $\Phi_N$ ; при этом величина

$$\left( \sqrt{\omega(z)} \cdot y(z) \right)^2 + \left( \varphi(z) / \sqrt{\omega(z)} \right)^2 = \text{const} \quad (9)$$

инвариантна (инвариант гиперболической матрицы такой же, но со знаком минус).

Матрица (8) и аналогичная ей гиперболическая матрица имеют групповой характер: произведение двух таких *последовательных* матриц имеет такой же вид (8); это и позволяет легко перемножить матрицы для большого числа проходов. Формула (8) была получена эвристическим путем. Далее дан более строгий анализ общего случая.

## 2. Разностные уравнения хода луча

В общем случае квазипериодического волновода, когда  $A \neq D$ , матрица одного прохода не может быть представлена в виде (4). Можно сформулировать уравнения хода луча в виде конечных разностей [6]. Для двух соседних участков, согласно (1),

$$\begin{cases} y_{n+1} = A_{n+1} \cdot y_n + B_{n+1} \cdot \varphi_n \\ \varphi_{n+1} = C_{n+1} \cdot y_n + D_{n+1} \cdot \varphi_n \end{cases}, \quad \begin{cases} y_n = A_n \cdot y_{n-1} + B_n \cdot \varphi_{n-1} \\ \varphi_n = C_n \cdot y_{n-1} + D_n \cdot \varphi_{n-1} \end{cases}. \quad (10)$$

Отсюда, с учетом унимодулярности лучевой матрицы  $\mathbf{m}_n$ ,

$$y_{n+1} - \sigma_{n+1}y_n + \gamma_{n+1}y_{n-1} = 0, \quad \varphi_{n+1} - \zeta_{n+1}\varphi_n + \eta_{n+1}\varphi_{n-1} = 0; \quad (11)$$

$$\sigma_{n+1} = A_{n+1} + D_n \frac{B_{n+1}}{B_n}, \quad \gamma_{n+1} = \frac{B_{n+1}}{B_n}, \quad \zeta_{n+1} = D_{n+1} + A_n \frac{C_{n+1}}{C_n}, \quad \eta_{n+1} = \frac{C_{n+1}}{C_n}. \quad (12)$$

Сначала рассмотрим периодический волновод:  $\mathbf{m}_n = \mathbf{m}$ ;  $\sigma_n = \zeta_n = A + D$ ,  $\gamma_n = \eta_n = 1$ . Тогда

$$y_{n+1} - S y_n + y_{n-1} = 0, \quad \varphi_{n+1} - S \varphi_n + \varphi_{n-1} = 0; \quad S = A + D. \quad (13)$$

Такие же разностные уравнения были бы для резонатора, когда  $A = D$ , поэтому решение для волновода можно искать в том же виде [6]:  $y_n = \exp(\pm \Theta_n)$ ;  $\Theta_n = n \theta$ , где  $\theta$  – комплексная фаза, определяемая (с точностью до знака) характеристическим уравнением согласно (13):

$$\exp \theta + \exp(-\theta) = 2 \operatorname{ch} \theta = S. \quad (14)$$

Тогда общее решение уравнений (13) имеет вид:

$$y_n = C_{y1} \operatorname{ch} \Theta_n + C_{y2} \operatorname{sh} \Theta_n, \quad \varphi_n = C_{\varphi1} \operatorname{sh} \Theta_n + C_{\varphi2} \operatorname{ch} \Theta_n, \quad (15)$$

ср. (7). Из начальных условий,  $C_{y1} = y_0$  и  $C_{\varphi2} = \varphi_0$ , а константы  $C_{y2}$  и  $C_{\varphi1}$  определяются по уравнениям (10) для первого прохода:

$$y_1 = y_0 \operatorname{ch} \theta + C_{y2} \operatorname{sh} \theta = A y_0 + B \varphi_0; \quad \varphi_1 = C_{\varphi1} \operatorname{sh} \theta + \varphi_0 \operatorname{ch} \theta = C y_0 + D \varphi_0. \quad (16)$$

В итоге для матрицы прохода через  $N$  участков  $\mathbf{M}_N$  получаются известные выражения [1]:

$$\mathbf{M}_N = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \Theta_N + \frac{A - \operatorname{ch} \theta}{\operatorname{sh} \theta} \operatorname{sh} \Theta_N & B \frac{\operatorname{sh} \Theta_N}{\operatorname{sh} \theta} \\ C \frac{\operatorname{sh} \Theta_N}{\operatorname{sh} \theta} & \operatorname{ch} \Theta_N + \frac{D - \operatorname{ch} \theta}{\operatorname{sh} \theta} \operatorname{sh} \Theta_N \end{pmatrix}; \quad \Theta_N = N \theta. \quad (17)$$

Для ограниченной («устойчивой») лучевой траектории  $|S| \leq 2$ ;  $\theta = i \Omega$ ,  $\operatorname{ch}(i \Omega) = \cos \Omega$ ,  $\operatorname{sh}(i \Omega) = i \sin \Omega$ , где  $\Omega$  – действительная фаза прохода, определяемая уравнением  $2 \cos \Omega = S$ . Для неограниченной («неустойчивой») лучевой траектории либо  $S \geq 2$ , и тогда  $\theta = \Omega$ , причем  $2 \operatorname{ch} \Omega = S$ ; либо  $S \leq -2$ , и тогда  $\theta = \Omega + i\pi$ ,  $\operatorname{ch} \theta = -\operatorname{ch} \Omega$ ,  $\operatorname{sh} \theta = -\operatorname{sh} \Omega$ , причем  $2 \operatorname{ch} \Omega = -S$ .

С учетом рассмотренных случаев квазипериодического резонатора и периодического волновода, решение системы (11)–(12) для квазипериодического волновода можно искать в виде

$$y_N = G_N \cdot \sqrt{B_N} \cdot \prod_{k=1}^N \lambda_k, \quad (18)$$

где  $\lambda_n$  – мультипликативный фактор прохода, изменяющийся по ходу луча, а  $G_n$  – амплитуда, компенсирующая это изменение. Подставляя (18) в первое из уравнений (11), получаем:

$$G_{n+1} \cdot \sqrt{B_{n+1}} \cdot \lambda_{n+1} \cdot \lambda_n - \sigma_{n+1} \cdot G_n \cdot \sqrt{B_n} \cdot \lambda_n + \frac{B_{n+1}}{B_n} \cdot \sqrt{B_{n-1}} \cdot G_{n-1} = 0, \quad (19)$$

Условие (3) плавного изменения матрицы  $\mathbf{m}_n$  позволяет исключить отсюда  $B_n$ :

$$\frac{\sqrt{B_{n+1} \cdot B_{n-1}}}{B_n} \approx \frac{\sqrt{(B_n + \Delta B_n) \cdot (B_n - \Delta B_n)}}{B_n} = 1 - \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\Delta B_n}{B_n} \right)^2 \approx 1, \quad (20)$$

где  $\Delta B_n = B_{n+1} - B_n \approx B_n - B_{n-1}$ . С точностью до членов второго порядка малости, из (19)–(20)

$$G_{n+1} \cdot \lambda_{n+1} \cdot \lambda_n - Z_{n+1} \cdot G_n \cdot \lambda_n + G_{n-1} = 0; \quad Z_{n+1} = \sigma_{n+1} \cdot \sqrt{B_n / B_{n+1}}. \quad (21)$$

Характеристическое уравнение для  $\lambda_n$  и его решение можно взять аналогично (14):

$$\lambda_n = \exp(\pm \theta_n); \quad \exp \theta_n + \exp(-\theta_n) = 2 \operatorname{ch} \theta_n = Z_n. \quad (22)$$

где  $\theta_n$  – комплексная фаза  $n$ -периода; см. выше, после (17). Исключая  $Z_{n+1}$  из (21)–(22), имеем:

$$\lambda_{n+1}^2 \cdot \lambda_n \cdot (G_{n+1} - G_n) + G_{n-1} \cdot \lambda_{n+1} - G_n \cdot \lambda_n = 0. \quad (23)$$

Для малых изменений величин  $\Delta \lambda = \lambda_{n+1} - \lambda_n$ ,  $\Delta G = G_{n+1} - G_n \approx G_n - G_{n-1}$ , разностное уравнение (23) в первом порядке малости преобразуется в дифференциальное и интегрируется:

$$(\lambda + \Delta \lambda)^2 \cdot \lambda \cdot \Delta G + (G - \Delta G) \cdot (\lambda + \Delta \lambda) - G \cdot \lambda \approx (\lambda^2 - 1) \cdot \lambda \cdot \Delta G + G \cdot \Delta \lambda = 0;$$

$$\frac{dG}{G(\lambda)} - \frac{d\lambda}{\lambda} + \frac{\lambda d\lambda}{\lambda^2 - 1} = 0; \quad G(\lambda) \cdot \frac{\sqrt{\lambda^2 - 1}}{\lambda} = \text{const};$$

$$G_n^\pm = G_1^\pm \cdot \frac{\operatorname{sh} \theta_1}{\operatorname{sh} \theta_n} \cdot \exp(\pm \Delta_n \theta), \quad \Delta_n \theta = \frac{\theta_n - \theta_1}{2}, \quad (24)$$

здесь знак + или – соответствует разным корням уравнения (22).

Решение (24) неприменимо, когда  $\lambda \rightarrow 1$ . При  $\lambda = 1$  происходит вырождение лучевой траектории; характеристическое уравнение дает один кратный корень:  $\lambda_n = 1$ ,  $\theta_n = 0$ . Согласно (22), условие такого вырождения:  $\sigma_n = 2 \gamma_n^{1/2} \approx 2 + \Delta B_n / B_n$ . Здесь проходит граница между «устойчивыми» и «неустойчивыми» лучевыми траекториями. В этом случае в уравнении (23) главную роль играют факторы второго порядка, пренебреженные при выводе (24); а именно:

$$G_{n+1} - G_n = G_n - G_{n-1}; \quad y_n = G_n \cdot \sqrt{B_n}; \quad y_0 = G_0 \cdot \sqrt{B_0}; \quad B_0 = B_1^2 / B_2; \quad (25)$$

коэффициент  $B_0$  (здесь и далее) доопределяется искусственно согласно (20). Тогда

$$\begin{aligned} \frac{y_{n+1}}{\sqrt{B_{n+1}}} - \frac{y_n}{\sqrt{B_n}} &= \frac{y_n}{\sqrt{B_n}} - \frac{y_{n-1}}{\sqrt{B_{n-1}}} = \frac{y_1}{\sqrt{B_1}} - \frac{y_0}{\sqrt{B_0}} = \frac{A_1 y_0 + B_1 \varphi_0}{\sqrt{B_1}} - \frac{\sqrt{B_2}}{B_1} y_0; \\ \frac{y_N}{\sqrt{B_N}} &= \left( \frac{A_1 y_0 + B_1 \varphi_0}{\sqrt{B_1}} - \frac{\sqrt{B_2}}{B_1} y_0 \right) \cdot N + \frac{\sqrt{B_2}}{B_1} y_0. \end{aligned} \quad (26)$$

Прямой проверкой легко убедиться, что решение (26) в точности удовлетворяет уравнение (11) для  $N = 2$  при  $\sigma_n = 2 \gamma_n^{1/2}$ .

Еще один интересный пример, когда решение (24) неприменимо:  $\sigma_n = 1 + \gamma_n = 2 + \Delta B_n / B_n$ . Характеристическое уравнение (22) дает в этом случае 2 корня:  $\lambda_n = \gamma_n^{1/2} \approx 1$  и  $\lambda_n = \gamma_n^{-1/2} \approx 1$ . Уравнения (11)–(12) в этом случае проще решать непосредственно, итерациями:

$$y_{n+1} - y_n = \gamma_n (y_n - y_{n-1}) = (y_1 - y_0) \cdot \prod_{k=1}^n \gamma_k = (y_1 - y_0) \cdot (B_{n+1} / B_1).$$

Расписывая аналогичным образом разность  $y_n - y_{n-1}$  и т. д., после суммирования, с учетом начального условия  $y_1 = A_1 y_0 + B_1 \varphi_0$ , окончательно получаем:

$$y_{n+1} = y_0 + \left( \frac{A_1 - 1}{B_1} y_0 + \varphi_0 \right) \cdot \sum_{k=0}^n B_{k+1}. \quad (27)$$

Примером такого случая является волновод, состоящий из участков с однородной средой длиной  $l_k$  и показателем преломления  $n^*_k$ . В этом случае матрица прохода  $\mathbf{m}_k$  имеет простой вид и легко суммируется, приводя к тому же результату, что и (27):

$$\mathbf{m}_k = \begin{pmatrix} 1 & B_k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{M}_N = \begin{pmatrix} 1 & B_N \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B_N = \sum_{k=1}^N B_k, \quad B_k = \frac{l_k}{n^*_k}.$$

Все эти случаи можно осмыслить, если переписать разностное уравнение (11) в виде:

$$\Delta_2 y_n = (\sigma_{n+1} - 1 - \gamma_{n+1}) \cdot y_n + (\gamma_{n+1} - 1) \cdot (y_n - y_{n-1}); \quad \Delta_2 y_n = (y_{n+1} - y_n) - (y_n - y_{n-1}),$$

и сопоставить ему дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = (\sigma - 1 - \gamma) \cdot y + (\gamma - 1) \cdot \frac{dy}{dz}. \quad (28)$$

Если  $\sigma = 1 + \gamma$ , это уравнение решается последовательным интегрированием. Если  $\gamma = 1$ , (28) аналогично уравнению (5). Если  $\gamma \neq 1$ , можно перейти к новой переменной  $u(z)$ :

$$y(z) = \exp\left(\frac{P(z)}{2}\right) \cdot u(z), \quad P(z) = \int (\gamma - 1) dz; \quad \frac{d^2 u}{dz^2} = \left[ (\sigma - 1 - \gamma) + \frac{1}{4} (\gamma - 1)^2 - \frac{1}{2} \frac{d\gamma}{dz} \right] \cdot u. \quad (29)$$

Поскольку  $\gamma = 1 + \Delta B/B$ , то интеграл  $\int (\gamma - 1) dz$  соответствует сумме  $\sum \Delta B/B \cong \ln(B_n/B_1)$ ;  $\exp[P(z)/2] \cong (B_n/B_0)^{1/2}$ . Далее,  $(\gamma - 1)^2 = (\Delta B/B)^2$ ,  $d\gamma/dz \propto (\Delta B/B)^2$ ; эти слагаемые в правой части (29) могут быть опущены, как величины второго порядка малости. Если  $\sigma_n = 2\gamma_n^{1/2}$ , то  $(\sigma - \gamma - 1) = -(\gamma_n^{1/2} - 1)^2 \approx (\Delta B/2B)^2$ ; правая часть (29) обращается в нуль, в первом порядке малости, ср. (25)–(26); функции  $u(z)$  соответствует амплитуда  $G_n$ . Вблизи границы  $\lambda_n = 1$ , если  $\sigma_n = 2\gamma_n^{1/2} + \varepsilon$ ,  $\varepsilon \ll 1$ , уравнение (29) в первом порядке малости имеет вид:

$$d^2 u/dz^2 = \varepsilon(z) \cdot u.$$

Решение этого уравнения зависит от вида функции  $\varepsilon(z)$ ; если  $\varepsilon(z) = a \cdot z$ , где  $a$  – некоторая константа, то  $u(z)$  будет линейной комбинацией функций Эйри  $\text{Ai}(a^{1/3} z)$  и  $\text{Bi}(a^{1/3} z)$ .

### 3. Основной случай: $\lambda \neq 1$

Согласно (18), (22), общее решение в этом случае записывается в виде:

$$y_N = \sqrt{B_N} \cdot \left[ G_N^+ \cdot \exp \Theta_N + G_N^- \cdot \exp(-\Theta_N) \right]; \quad \Theta_N = \sum_{k=1}^N \theta_k.$$

Подставляя (24) и переопределяя константы  $G_1^\pm$ , получаем:

$$y_N = \sqrt{B_N} \cdot \sqrt{\frac{\text{sh} \theta_1}{\text{sh} \theta_N}} \cdot \left[ G_{1C} \cdot \text{ch} \left( \Theta_N + \frac{\Delta_N \theta}{2} \right) + G_{1S} \cdot \text{sh} \left( \Theta_N + \frac{\Delta_N \theta}{2} \right) \right], \quad \Delta_N \theta = \theta_N - \theta_1. \quad (30)$$

ср (15). Подставляя (30) в уравнение первого прохода  $y_1 = A y_0 + B \varphi_0$ , окончательно получаем:

$$y_N = \sqrt{\frac{B_N}{B_1} \cdot \frac{\text{sh} \theta_1}{\text{sh} \theta_N}} \cdot \left[ y_0 \cdot \text{ch} \left( \Theta_N + \frac{\Delta_N \theta}{2} \right) + \frac{(A_1 - \text{ch} \theta_1) \cdot y_0 + B_1 \cdot \varphi_0}{\text{sh} \theta_1} \cdot \text{sh} \left( \Theta_N + \frac{\Delta_N \theta}{2} \right) \right], \quad (31)$$

ср. (17); величина  $\theta$ , как и в (17), определена с точностью до знака. Совершенно аналогично, решение второго уравнения (11) для угла наклона  $\varphi$  имеет вид:

$$\varphi_N = \sqrt{\frac{C_N}{C_1} \cdot \frac{\text{sh } \theta'_1}{\text{sh } \theta'_N}} \cdot \left[ \varphi_0 \cdot \text{ch} \left( \Theta'_N + \frac{\Delta_N \theta'}{2} \right) + \frac{(D_1 - \text{ch } \theta'_1) \cdot \varphi_0 + C_1 \cdot y_0}{\text{sh } \theta'_1} \cdot \text{sh} \left( \Theta'_N + \frac{\Delta_N \theta'}{2} \right) \right], \quad (32)$$

где вместо фазы  $\theta$  входит фаза  $\theta'$ , определяемая аналогично (21)–(22):  $2 \text{ch } \theta'_n = \zeta_n \cdot (C_{n-1}/C_n)^{1/2}$ ;  $C_0 = C_1^2/C_2$ , аналогично (20). Чтобы привести выражения (31) и (32) к единому матричному виду, следует унифицировать фазу прохода. Согласно (12), (21), (22),

$$2 \text{ch } \theta_n = \sigma_n \cdot \sqrt{\frac{B_{n-1}}{B_n}} = A_n \cdot \sqrt{\frac{B_{n-1}}{B_n}} + D_{n-1} \cdot \sqrt{\frac{B_n}{B_{n-1}}} \approx S_n - \Delta D_n - (A_n - D_n) \cdot \frac{\Delta B_n}{2B_n},$$

$$2 \text{ch } \theta'_n = \zeta_n \cdot \sqrt{\frac{C_{n-1}}{C_n}} = D_n \cdot \sqrt{\frac{C_{n-1}}{C_n}} + A_{n-1} \cdot \sqrt{\frac{C_n}{C_{n-1}}} \approx S_n - \Delta A_n + (A_n - D_n) \cdot \frac{\Delta C_n}{2C_n};$$

где  $S_n = A_n + D_n$ . Эти выражения можно видоизменить, вводя единую фазу прохода  $\vartheta$ :

$$2 \text{ch } \theta_n \approx S_n - \frac{\Delta S_n}{2} + \Delta \frac{A_n - D_n}{2} - \frac{A_n - D_n}{2} \cdot \left[ \frac{\Delta(B_n \cdot C_n)}{2B_n \cdot C_n} + \frac{C_n}{2B_n} \cdot \Delta \left( \frac{B_n}{C_n} \right) \right] = 2 \text{ch } \vartheta_n - \frac{\Delta S_n}{2} + \frac{\Delta R_n}{2};$$

$$2 \text{ch } \theta'_n \approx S_n - \frac{\Delta S_n}{2} - \Delta \frac{A_n - D_n}{2} + \frac{A_n - D_n}{2} \cdot \left[ \frac{\Delta(B_n \cdot C_n)}{2B_n \cdot C_n} - \frac{C_n}{2B_n} \cdot \Delta \left( \frac{B_n}{C_n} \right) \right] = 2 \text{ch } \vartheta_n - \frac{\Delta S_n}{2} - \frac{\Delta R_n}{2};$$

$$2 \text{ch } \vartheta_n = S_n - \frac{A_n - D_n}{2} \cdot \frac{C_n}{2B_n} \cdot \Delta \left( \frac{B_n}{C_n} \right) = S_n + \frac{A_n - D_n}{2} \cdot \frac{\Delta \omega_n}{\omega_n} \approx A_n \cdot \sqrt{\frac{\omega_n}{\omega_{n-1}}} + D_n \cdot \sqrt{\frac{\omega_{n-1}}{\omega_n}};$$

$$\Delta S_n = \Delta A_n + \Delta B_n; \quad \Delta R_n = \Delta A_n - \Delta B_n - (A_n - D_n) \cdot \frac{\Delta(B_n \cdot C_n)}{2B_n \cdot C_n} = \sqrt{|B_n \cdot C_n|} \cdot \Delta \left( \frac{A_n - D_n}{\sqrt{|B_n \cdot C_n|}} \right);$$

здесь введена «частота прохода»  $\omega_n = |C_n/B_n|^{1/2}$ . Поправки  $\Delta S_n$  и  $\Delta R_n$  можно преобразовать в добавки к фазе прохода  $\Delta \vartheta_S$  и  $\Delta \vartheta_R$  соответственно, по формуле  $\text{ch}(\vartheta + \Delta \vartheta) \approx \text{ch } \vartheta + \text{sh } \vartheta \cdot \Delta \vartheta$ ;  $\Delta \vartheta_S \approx \Delta S_n / (4 \text{sh } \vartheta_n) \approx \Delta(\text{ch } \vartheta_n) / (2 \text{sh } \vartheta_n) = \Delta \vartheta_n / 2$ ; в (31)–(32) эта поправка сократится с  $\Delta_N \vartheta / 2$ . Для вычисления поправки  $\Delta \vartheta_R$  введем величины  $L_n$ ,  $E_n$  и  $\psi_n$ , определенные соотношениями:

$$L_n = \frac{A_n - D_n}{2C_n}, \quad E_n = \omega \cdot L_n = b_n \cdot \frac{A_n - D_n}{2\sqrt{|B_n \cdot C_n|}}, \quad E_n = \begin{cases} \text{sh } \psi_n, & b_n c_n = 1 \\ \sin \psi_n, & b_n c_n = -1, |E_n| < 1; \\ e_n \text{ch } \psi_n, & b_n c_n = -1, |E_n| > 1 \end{cases} \quad (33)$$

$b_n = B_n/|B_n|$ ;  $c_n = C_n/|C_n|$ ;  $e_n = E_n/|E_n|$ . Положим  $\text{sgn } \vartheta_n = b_n$ . В приближении  $2 \text{ch } \vartheta_n \approx S_n$ ,

$$\frac{\text{sh } \vartheta_n}{b_n} \approx \sqrt{\frac{(A_n + D_n)^2}{4} - 1} = \sqrt{|B_n \cdot C_n|} \cdot \sqrt{E_n^2 + b_n c_n} = \sqrt{|B_n \cdot C_n|} \cdot \begin{cases} \text{ch } \psi_n, & b_n c_n = 1 \\ i \cos \psi_n, & b_n c_n = -1, |E_n| < 1; \\ e_n \text{sh } \psi_n, & b_n c_n = -1, |E_n| > 1 \end{cases} \quad (34)$$

$$\Delta \vartheta_R = \frac{\Delta R_n}{4 \text{sh } \vartheta_n} = \frac{b_n}{2 \text{sh } \vartheta_n} \sqrt{|B_n \cdot C_n|} \cdot \Delta E_n \approx \frac{1}{2} \cdot \begin{cases} \Delta \psi_n, & b_n c_n = 1 \\ -i \Delta \psi_n, & b_n c_n = -1, |E_n| < 1. \\ \Delta \psi_n, & b_n c_n = -1, |E_n| > 1 \end{cases} \quad (35)$$

Здесь угол  $\psi_n$  – действительный,  $\text{sgn } \psi_n = e_n$ . Угол  $\vartheta_n$  мнимый («устойчивая» лучевая траектория), если  $B_n C_n < 0$  и  $|E_n| < 1$ , или  $|S_n| < 2$ . Если  $B_n C_n < 0$  и  $|E_n| > 1$ , или  $B_n C_n > 0$ , то угол  $\vartheta_n$  действительный («неустойчивая» лучевая траектория). При  $B_n C_n > 0$  из (31)–(32) имеем:

$$y_N = \sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_N} \cdot \frac{\text{ch } \psi_1}{\text{ch } \psi_N}} \cdot \left[ y_0 \cdot \text{ch} \left( \Xi_N + \frac{\Delta_N \psi}{2} \right) + \frac{(A_1 - \text{ch } \vartheta_1) \cdot y_0 + B_1 \cdot \varphi_0}{\text{sh } \vartheta_1} \cdot \text{sh} \left( \Xi_N + \frac{\Delta_N \psi}{2} \right) \right], \quad (36)$$

$$\varphi_N = \sqrt{\frac{\omega_N \cdot \operatorname{ch} \psi_1}{\omega_1 \operatorname{ch} \psi_N}} \cdot \left[ \varphi_0 \cdot \operatorname{ch} \left( \Xi_N - \frac{\Delta_N \Psi}{2} \right) + \frac{(D_1 - \operatorname{ch} \vartheta_1) \cdot \varphi_0 + C_1 \cdot y_0}{\operatorname{sh} \vartheta_1} \cdot \operatorname{sh} \left( \Xi_N - \frac{\Delta_N \Psi}{2} \right) \right]; \quad (37)$$

$$\Xi_N = \sum_{k=1}^N \vartheta_k; \quad \Delta_N \Psi = \Psi_N - \Psi_1,$$

сп. (17). Здесь предполагается, что  $b_n$  и  $c_n$  не меняются по ходу луча; в амплитудных факторах положено  $\theta_n \approx \theta'_n \approx \vartheta_n$ , поскольку приращения  $\Delta \vartheta$  здесь не накапливаются, как в фазе. Эти выражения можно преобразовать. Именно (опуская индекс  $n$ ), с учетом (33)–(34), при  $bc = 1$ :

$$A = \frac{A+D}{2} + \frac{A-D}{2} \approx \operatorname{ch} \vartheta + b \sqrt{|B \cdot C|} \cdot \operatorname{sh} \vartheta \approx \operatorname{ch} \vartheta + \frac{\operatorname{sh} \vartheta}{\operatorname{ch} \vartheta} \cdot \operatorname{sh} \vartheta; \quad D \approx \operatorname{ch} \vartheta - \frac{\operatorname{sh} \vartheta}{\operatorname{ch} \vartheta} \cdot \operatorname{sh} \vartheta; \quad (38)$$

$$\frac{B}{\operatorname{sh} \vartheta} \approx \frac{|B|}{\sqrt{|B \cdot C|} \cdot \operatorname{ch} \vartheta} = \frac{1}{\omega \cdot \operatorname{ch} \vartheta}; \quad \frac{C}{\operatorname{sh} \vartheta} \approx \frac{bc|C|}{\sqrt{|B \cdot C|} \cdot \operatorname{ch} \vartheta} = \frac{\omega}{\operatorname{ch} \vartheta}. \quad (39)$$

Подставляя (38)–(39) в (36)–(37), можно получить более унифицированный результат:

$$\tilde{y}_N = \tilde{y}_0 \cdot \operatorname{ch} \left( \Xi_N + \frac{\Delta_N \Psi}{2} \right) + \left[ \frac{\operatorname{sh} \psi_1}{\operatorname{ch} \psi_1} \cdot \tilde{y}_0 + \frac{\tilde{\varphi}_0}{\operatorname{ch} \psi_1} \right] \cdot \operatorname{sh} \left( \Xi_N + \frac{\Delta_N \Psi}{2} \right); \quad (40)$$

$$\tilde{\varphi}_N = \tilde{\varphi}_0 \cdot \operatorname{ch} \left( \Xi_N - \frac{\Delta_N \Psi}{2} \right) + \left[ \frac{\tilde{y}_0}{\operatorname{ch} \psi_1} - \frac{\operatorname{sh} \psi_1}{\operatorname{ch} \psi_1} \cdot \tilde{\varphi}_0 \right] \cdot \operatorname{sh} \left( \Xi_N - \frac{\Delta_N \Psi}{2} \right); \quad (41)$$

$$\frac{\tilde{y}_N}{y_N} = \sqrt{\omega_N \cdot \operatorname{ch} \psi_N}; \quad \frac{\tilde{y}_0}{y_0} = \sqrt{\omega_1 \cdot \operatorname{ch} \psi_1}; \quad \frac{\tilde{\varphi}_N}{\varphi_N} = \sqrt{\frac{\operatorname{ch} \psi_N}{\omega_N}}; \quad \frac{\tilde{\varphi}_0}{\varphi_0} = \sqrt{\frac{\operatorname{ch} \psi_1}{\omega_1}}. \quad (42)$$

Аналогично, при  $B_n C_n < 0$  и  $|E_n| < 1$ , когда  $\theta = i\Omega$  («устойчивая» траектория), из (31)–(32)

$$\tilde{y}_N = \tilde{y}_0 \cdot \cos \left( \Phi_N - \frac{\Delta_N \Psi}{2} \right) + \left[ \frac{\sin \psi_1}{\cos \psi_1} \cdot \tilde{y}_0 + \frac{\tilde{\varphi}_0}{\cos \psi_1} \right] \cdot \sin \left( \Phi_N - \frac{\Delta_N \Psi}{2} \right); \quad \Phi_N = \sum_{k=1}^N \Omega_k; \quad (43)$$

$$\tilde{\varphi}_N = \tilde{\varphi}_0 \cdot \cos \left( \Phi_N + \frac{\Delta_N \Psi}{2} \right) - \left[ \frac{\tilde{y}_0}{\cos \psi_1} + \frac{\sin \psi_1}{\cos \psi_1} \cdot \tilde{\varphi}_0 \right] \cdot \sin \left( \Phi_N + \frac{\Delta_N \Psi}{2} \right); \quad (44)$$

$$\frac{\tilde{y}_N}{y_N} = \sqrt{\omega_N \cdot \cos \psi_N}, \quad \frac{\tilde{y}_0}{y_0} = \sqrt{\omega_1 \cdot \cos \psi_1}, \quad \frac{\tilde{\varphi}_N}{\varphi_N} = \sqrt{\frac{\cos \psi_N}{\omega_N}}, \quad \frac{\tilde{\varphi}_0}{\varphi_0} = \sqrt{\frac{\cos \psi_1}{\omega_1}}. \quad (45)$$

Наконец, при  $B_n C_n < 0$  и  $|E_n| > 1$  из (31)–(32)

$$\tilde{y}_N = \tilde{y}_0 \cdot \operatorname{ch} \left( \Xi_N + \frac{\Delta_N \Psi}{2} \right) + \left[ \frac{\operatorname{ch} \psi_1}{\operatorname{sh} \psi_1} \cdot \tilde{y}_0 + \frac{e\tilde{\varphi}_0}{\operatorname{sh} \psi_1} \right] \cdot \operatorname{sh} \left( \Xi_N + \frac{\Delta_N \Psi}{2} \right),$$

$$\tilde{\varphi}_N = \tilde{\varphi}_0 \cdot \operatorname{ch} \left( \Xi_N - \frac{\Delta_N \Psi}{2} \right) - \left[ \frac{\operatorname{ch} \psi_1}{\operatorname{sh} \psi_1} \cdot \tilde{\varphi}_0 + \frac{e\tilde{y}_0}{\operatorname{sh} \psi_1} \right] \cdot \operatorname{sh} \left( \Xi_N - \frac{\Delta_N \Psi}{2} \right);$$

$$\frac{\tilde{y}_N}{y_N} = \sqrt{\omega_N \cdot \operatorname{sh} \psi_N}; \quad \frac{\tilde{y}_0}{y_0} = \sqrt{\omega_1 \cdot \operatorname{sh} \psi_1}; \quad \frac{\tilde{\varphi}_N}{\varphi_N} = \sqrt{\frac{\operatorname{sh} \psi_N}{\omega_N}}; \quad \frac{\tilde{\varphi}_0}{\varphi_0} = \sqrt{\frac{\operatorname{sh} \psi_1}{\omega_1}}.$$

Вернемся к «устойчивой» траектории (43)–(44). Если по ходу луча  $\omega = \operatorname{const}$ ,  $\psi = \operatorname{const}$  то

$$\begin{pmatrix} \tilde{y}_N \\ \tilde{\varphi}_N \end{pmatrix} = \mathbf{M}_\Phi \begin{pmatrix} \tilde{y}_0 \\ \tilde{\varphi}_0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_\Phi = \prod_{i=1}^N \mathbf{m}_{\Omega_i} = \begin{pmatrix} \cos \Phi_N + \frac{\sin \psi}{\cos \psi} \cdot \sin \Phi_N & \frac{\sin \Phi_N}{\cos \psi} \\ -\frac{\sin \Phi_N}{\cos \psi} & \cos \Phi_N - \frac{\sin \psi}{\cos \psi} \cdot \sin \Phi_N \end{pmatrix}. \quad (46)$$

Формально эта матрица эквивалентна (17), но фактически ее применимость шире. Если матрица (17) была построена для одинаковых фаз проходов (как группа по числу проходов  $n$ ), то матрица (46) образует группу по фазе  $\Phi$ : для любых фаз  $\Phi_N$  и  $\Phi_K$  произведение матриц (46) будет иметь такой же вид (46), но для фазы  $\Phi_N + \Phi_K$ .

Геометрический смысл матрицы (46) состоит в том, что она производит поворот вектора  $(\tilde{y}, \tilde{\phi})$  на угол  $\Phi$  в косоугольной системе координат, в которой угол между осями равен  $\pi/2 - \psi$ ; при  $\psi = 0$  это будет обычный поворот вектора в прямоугольной системе координат, см. (4). Преобразования (43)–(44) имеют тот же смысл, но с учетом изменения угла  $\psi$  по ходу луча. Если же «распрямить» координаты и ввести новые переменные:  $\hat{y} = \tilde{y} + \tilde{\phi} \sin \psi$ ,  $\hat{\phi} = \tilde{\phi} \cos \psi$ , или  $\hat{y} = \tilde{y} \cos \psi$ ,  $\hat{\phi} = \tilde{\phi} + \tilde{y} \sin \psi$ , то они будут преобразовываться обычной матрицей поворота:

$$\begin{pmatrix} \hat{y}_N \\ \hat{\phi}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Phi_N & \sin \Phi_N \\ -\sin \Phi_N & \cos \Phi_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{y}_0 \\ \hat{\phi}_0 \end{pmatrix}; \quad \hat{y}_N^2 + \hat{\phi}_N^2 = \text{const} = \hat{y}_0^2 + \hat{\phi}_0^2. \quad (47)$$

Наличие амплитудных факторов в преобразованиях (31)–(32) ведет к тому, что амплитуда осцилляций по ходу луча может как убывать, так и возрастать; условие устойчивости лазерного резонатора ( $|S_n| < 2$ ) еще не обеспечивает ограниченности лучевой траектории.

### Список литературы

1. Джеррард А., Бёрч Дж. М. Введение в матричную оптику. М.: Мир, 1978.
2. Боровков В. В., Лажинцев Б. В., Мельников С. П. и др. Исследование оптических неоднородностей в лазерах с ядерной накачкой // Известия АН СССР, Сер. физич. 1990. Т. 54, № 10. С. 2009–2015.
3. Матвеев В. Ю., Боровков В. В., Мельников С. П. Оптические неоднородности в цилиндрических лазерах с ядерной накачкой // Кв. электроника. 2000. Т. 30, № 3. С. 215–220.
4. Боровков В. В., Лажинцев Б. В., Нор-Аревян В. А. и др. Особенности газодинамики прокачных лазеров, возбуждаемых осколками деления ядер урана // Кв. электроника. 1995. Т. 22, № 12. С. 1187–1191.
5. Матвеев В. Ю. Ход лучей в прокачных лазерах с ядерной накачкой // Кв. электроника. 2003. Т. 33, № 6. С. 493–497.
6. Маркузе Д. Оптические волноводы. М.: Мир, 1974.