

УДК 519.6

МЕТОДИКА МЕДУЗА-3D РАСЧЕТА ТРЕХМЕРНЫХ ЗАДАЧ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ НА НЕРЕГУЛЯРНЫХ СЕТКАХ

Р. А. Барабанов, О. И. Бутнев, С. Г. Волков, Б. М. Жогов, В. А. Пронин
(РФЯЦ-ВНИИЭФ)

Приведено краткое описание реализации методики решения трехмерных задач газовой динамики на неструктурированных сетках. Представлены результаты расчетов двух задач развития неустойчивости Рихтмайера–Мешкова при прохождении ударной волны через границу раздела газов. Полученные результаты сравниваются с результатами эксперимента и двумерных расчетов.

Введение

Явная свободно-лагранжева методика МЕДУЗА [1], разработанная в математическом отделении РФЯЦ-ВНИИЭФ, хорошо зарекомендовала себя при решении двумерных газодинамических задач с геометрически сложными начальными и граничными условиями, с сильными вихревыми и сдвиговыми течениями [2, 3]. Основными особенностями этой методики являются использование нерегулярной сетки, центрирование всех газодинамических величин в узле, переменный разностный шаблон для численного интегрирования дифференциальных уравнений и возможность изменения топологии сетки в процессе решения. Контактные границы описываются смешанными ячейками, для расчета которых применяется метод концентраций.

В последние годы с ростом мощности вычислительной техники и появлением высокопроизводительных вычислительных систем с массовым параллелизмом возникла реальная возможность проведения расчетов трехмерных задач газовой динамики. Ранее в работе [4] была описана трехмерная методика, использующая неструктурированную сетку в виде тетраэдров. В работе [5] представлена методика, в которой уравнения газовой динамики аппроксимируются на неструктурированной сетке, состоящей на начальном этапе из произвольных выпуклых многогранников.

В данной работе описана методика решения трехмерных задач газовой динамики на неструктурированных сетках, являющаяся обобщением методики МЕДУЗА [1] на трехмерный случай. Следует отметить, что авторами в настоящий момент реализована возможность расчета лагранжева этапа движения среды. В дальнейшем предполагается обобщить на трехмерный случай механизмы поддержания расчетной сетки и изменения сеточной топологии.

Программа, реализующая методику, тестировалась на двух задачах развития неустойчивости Рихтмайера–Мешкова при прохождении ударной волны (УВ) через границу раздела газов. В работе [6] приведены результаты эксперимента, проведенного Е. Е. Мешковым, в котором исследовалось поведение окруженной воздухом прямоугольной области, заполненной фреоном, при падении на нее УВ. Эта двумерная по постановке задача характеризуется сильными сдвиговыми и вихревыми течениями.

В настоящей работе в качестве первой задачи взята модификация указанной задачи: уменьшена координата начального положения поршня (с 49 до 24) с целью сокращения времени прохода плоской УВ по воздуху. Данная модификация приводит к отличиям от эксперимента только после падения на фреон отраженной от поршня УВ. Однако это происходит уже после представляющего интерес момента времени. С другой стороны, данная модификация позволила более чем вдвое сократить количество точек в задаче и приблизить время прихода плоской УВ на фреон примерно на 0,6 мс (т. е. количество временных шагов в расчете сократилось примерно вдвое). Было проведено

два расчета этой задачи: один — по программе, реализующей методику МЕДУЗА для двумерных течений, другой — по программе для трехмерных течений.

Вторая задача получена на основе первой. Если в исходной задаче при размерах камеры $12 \times 12 \times 24$ см фреон занимал область $6 \times 12 \times 9$ см, то во второй задаче область с фреоном взята $6 \times 6 \times 9$ см. Следует отметить, что данная задача обладает плоской симметрией относительно плоскости, проходящей через точки с координатами $(0, 0, 0)$, $(12, 12, 0)$, $(12, 12, 24)$.

Основные уравнения и метод решения

Уравнения газовой динамики в операторной форме имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{U}}{dt} &= -V \operatorname{grad}(P + Q) + \Delta \vec{G}; \\ \frac{dV}{dt} &= V \operatorname{div} \vec{U}; \\ \frac{dE}{dt} + P \frac{dV}{dt} &= 0; \\ E &= E(P, V). \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь приняты следующие обозначения: $\vec{U} = (U_x, U_y, U_z)$ — вектор скорости; V — удельный объем; P — материальное давление; Q — вязкое давление; E — удельная внутренняя энергия; $\Delta \vec{G}$ — оператор сглаживания скоростей.

Решение системы (1) ищется внутри области D с заданными начальными и граничными условиями.

В правую часть уравнения движения добавлен оператор сглаживания порядка $O(\tau h^3)$, связанный с необходимостью подавления высокочастотных возмущений поля скоростей. Операторы сглаживания высокого порядка малости применялись, в частности, в работах [7, 8]. Операторы порядка $O(\tau h^m)$ широко применяются в методике Д [9]. Идея использования оператора сглаживания скоростей порядка $O(\tau h^3)$ для одномерного аналога методики МЕДУЗА принадлежит В. И. Делову.

Рассматривается множество точек (узлов сетки), которым приписываются значения всех термодинамических и кинематических функций. Начальное распределение точек задается исходя из начальных и граничных условий задачи, а также из априорных соображений о решении задачи. Для каждой точки определяется множество ее соседей на основе евклидовой метрики. Определение соседства осуществляется с помощью метода тетраэдризации. Множество точек с установленным соответствием соседства порождает сетку задачи.

Для решения системы уравнений (1) на полученной сетке используется трехмерный аналог явной свободно-лагранжевой методики МЕДУЗА [1]. Используется однообластная модель решения задачи. Это приводит к возникновению на границах сред смешанных ячеек, решение в которых ищется на основании многокомпонентного подхода.

Ячейки сетки представляют собой многогранники, внутри которых находятся узлы сетки; в узлах центрированы все кинематические и термодинамические величины. В основе алгоритма построения ячейки, описанного ниже, лежит привлечение центров масс тетраэдров, центров масс граней тетраэдров и центров ребер.

Для хранения топологии сетки используется подход, при котором точка имеет ссылку на произвольный примыкающий к ней тетраэдр, а каждый тетраэдр — ссылки на четыре примыкающих к нему тетраэдра и четыре свои вершины. Такая схема хранения топологии сетки позволила решить ряд проблем в организации временного шага и сделать код более эффективным.

Использование тетраэдров позволило решить проблему выделения контактной поверхности в смешанной ячейке, если сам узел и его смешанные соседи лежат на лагранжевой поверхности. В этом случае, приписав на начальной стадии свойство вещества каждому тетраэдру, можно сохранять тетраэдры "чистыми" до тех пор, пока не осуществится сдвиг точки (раздвижка) или перестройка сетки, приводящие к появлению смешанных тетраэдров.

Особенности методики

Вычисление сил. Одной из самых дорогостоящих по вычислительной нагрузке процедур в реализации счетного шага является процедура расчета сил, действующих на каждую ячейку; реализация кода в этой части существенно отражается на производительности работы всего комплекса программ.

Перед описанием алгоритма расчета сил, действующих на ячейку, в трехмерном случае приведем аналог этого алгоритма в двумерном случае.

Интегрирование уравнения движения сводится к вычислению интегралов по контуру ячейки, представляющей собой многоугольник: $\oint_L (P + Q) dy$ и $\oint_L (P + Q) dx$, где P , Q — соответственно материальное давление и математическая вязкость, заданные в вершинах ячейки; L — контур многоугольника.

Вычисление контурных интегралов производится в каждой точке посредством восстановления контура L . Данная процедура является достаточно дорогостоящей по ряду причин:

- для каждой точки производится разбор топологии сетки, относящейся к данной точке;
- выполняется построение списка треугольников, примыкающих к данной точке, ориентированных против часовой стрелки;
- выполняется построение контура интегрирования посредством соединения геометрических центров упорядоченных треугольников.

Отметим также, что при рассмотрении двух соседних точек (т. е. точек, соединенных ребром) производятся дополнительные арифметические вычисления для восстановления одинаковых отрезков контура интегрирования. Для одной точки один и тот же отрезок проходится в одном направлении, а для другой — в обратном.

Обратимся теперь к трехмерному случаю.

Интегрирование уравнения движения в трехмерном случае сводится к вычислению поверхностного интеграла $\iint_{\Delta} (P + Q) \vec{n} dS$, где P — материальное давление; Q — вязкое давление; \vec{n} — вектор внешней нормали; dS — площадь треугольника; Δ — все треугольники, образующие поверхность ячейки интегрирования. Если восстанавливать эту поверхность по такому же принципу, как и в двумерном случае, то вычислительные затраты еще больше увеличатся. Для уменьшения вычислительных затрат в трехмерном случае предложено повысить производительность работы программы за счет обхода не по точкам задачи, а по тетраэдрам.

Для хранения компонент вектора силы, действующего на текущую вершину, будем использовать массивы F_x , F_y , F_z . В начале нового счетного шага эти массивы обнуляются.

Рассматривая каждый тетраэдр, необходимо восстановить часть поверхности интегрирования посредством определения треугольников внутри этого тетраэдра (рис. 1). Каждый треугольник, входящий в поверхность ячейки интегрирования текущей вершины, при интегрировании обходится так, чтобы нормаль для него была внешней (относительно текущей вершины).

Каждый элементарный треугольник тетраэдра, изображенного на рис. 1, осуществляет вклад силы в две вершины тетраэдра, но с разными знаками. Например, треугольник IOa дает вклады силы в вершины 3 и 4. Здесь можно воспользоваться третьим законом Ньютона и сэкономить на арифметических вычислениях.

Как видно из рис. 1, каждая грань ячейки интегрирования представляет собой треугольник (для определенности рассмотрим треугольник OId), вершинами которого являются центр тетраэдра (O), центр одной из граней тетраэдра (I) и середина одного из ребер тетраэдра (d). Будем определять значения давления в этих точках с помощью линейных комбинаций значений в вершинах тетраэдра 1, 2, 3, 4:

$$(P + Q)_O = \frac{(P + Q)_1 + (P + Q)_2 + (P + Q)_3 + (P + Q)_4}{4};$$

$$(P + Q)_I = \frac{(P + Q)_1 + (P + Q)_3 + (P + Q)_4}{3};$$

$$(P + Q)_d = \frac{(P + Q)_1 + (P + Q)_3}{2}$$

После этого значение полного давления на грани ячейки интегрирования определяем как среднее арифметическое значений полных давлений в вершинах треугольника:

$$(P + Q)_{OId} = \frac{(P + Q)_O + (P + Q)_I + (P + Q)_d}{3}$$

В том случае, когда соответствующая грань ячейки интегрирования лежит на границе с заданным граничным давлением, давление на грани не рассчитывается вышеописанным способом, а берется непосредственно из граничного условия. Таким образом, суммарный вектор силы, действующий на ячейку, вычисляется путем суммирования с соответствующим знаком элементарных сил, действующих на элементарные треугольники каждого тетраэдра. Вклад в каждую компоненту обеспечивается за счет проектирования треугольника S на соответствующие координатные плоскости (рис. 2).

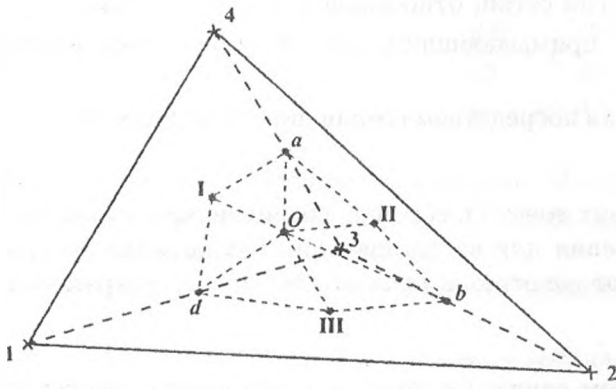


Рис. 1. Шесть треугольников поверхности интегрирования, отнесенных к узлу 3

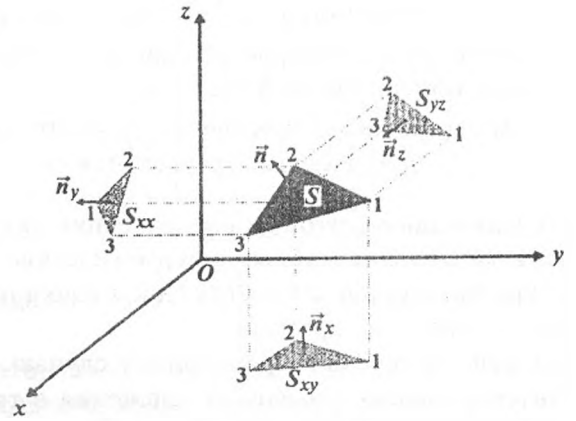


Рис. 2. Проекции треугольника на соответствующие координатные плоскости

Аппроксимация оператора сглаживания скоростей. Для сглаживания высокочастотных возмущений поля скоростей в расчет скоростей каждой ячейки вводится добавка вида [9] $\Delta \vec{S}_i = -\tau \Delta \vec{G}_i = (\Delta U_i, \Delta V_i, \Delta W_i)$, где

$$\begin{aligned} \Delta U_i &= \tau h_i^3 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right)_i \left| \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right|_i; \\ \Delta V_i &= \tau h_i^3 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right)_i \left| \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right|_i; \\ \Delta W_i &= \tau h_i^3 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right)_i \left| \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right|_i. \end{aligned}$$

После расчета $\Delta \vec{S}_i^{n+1}$ подправляется значение скорости i -й ячейки на $(n + 1)$ -м шаге: $\vec{U}_i^{n+1} = \vec{U}_i^n + \Delta \vec{S}_i^{n+1}$.

Обратимся к расчету величин $\Delta U_i, \Delta V_i, \Delta W_i$ на примере ΔU_i .

Для вычисления значения $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right)_i$ в ячейке интегрирования с номером i воспользуемся формулой Остроградского—Гаусса:

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy.$$

В левой части интегрирование ведется по объему V , в правой части — по поверхности S , ограничивающей данный объем.

Полагая значение $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)_i$ постоянным в ячейке интегрирования, получаем

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)_i = \frac{\iint_{S_i} \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_i dydz + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_i dzdx + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_i dxdy}{VOL_i}. \quad (2)$$

Здесь VOL_i — объем ячейки интегрирования; S_i — поверхность ячейки интегрирования.

Расчет поверхностного интеграла выполняется способом, аналогичным применяемому при расчете компонент сил. Вычисления проводятся проходом по всем треугольникам, образующим ячейку интегрирования. Построение треугольников производится в цикле по тетраэдрам; для каждой вершины тетраэдра строится 6 треугольников поверхности интегрирования (см. рис. 1).

Рассмотрим аппроксимацию части поверхностного интеграла $\iint_{S_i} \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_i dydz$ формулы (2) на одном из треугольников, образующих поверхность интегрирования ячейки с номером i (рис. 3):

$$\iint_{S_{j\Delta}} \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_i dydz = \left(\frac{\partial U}{\partial r} \frac{dr}{dx}\right)_{ij} S_{j\Delta} \cos(\vec{n}, \vec{OX}) = \frac{U_j - U_i}{r_{ij}} \frac{1}{\cos(\vec{r}_{ij}, \vec{OX})} S_{j\Delta} \cos(\vec{n}, \vec{OX}).$$

Для упрощения вычислений положим $\frac{\cos(\vec{n}, \vec{OX})}{\cos(\vec{r}_{ij}, \vec{OX})} = 1$. Это означает, что вектор \vec{r}_{ij} коллинеарен и совпадает по направлению с нормалью \vec{n} .

При данном допущении четвертый порядок малости оператора сглаживания не изменяется. В результате получим следующую разностную формулу для расчета всех компонент поверхностного интеграла из (2):

$$\iint_{S_{j\Delta}} \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{ij} dydz = \iint_{S_{j\Delta}} \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_{ij} dzdx = \iint_{S_{j\Delta}} \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_{ij} dxdy = (U_j - U_i) \frac{S_{j\Delta}}{r_{ij}}.$$

Таким образом, разностная аппроксимация величин $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)_i$, $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)_i$ и $\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2}\right)_i$ для ячейки интегрирования с номером i может быть записана в виде

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)_i = \frac{\sum_{j=1}^{N_\Delta} 3(U_j - U_i) S_{j\Delta}}{VOL_i}; \quad \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)_i = \frac{\sum_{j=1}^{N_\Delta} 3(V_j - V_i) S_{j\Delta}}{VOL_i};$$

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2}\right)_i = \frac{\sum_{j=1}^{N_\Delta} 3(W_j - W_i) S_{j\Delta}}{VOL_i}.$$

Здесь суммирование ведется по всем N_Δ треугольникам, образующим ячейку интегрирования с номером i ; VOL_i — объем этой ячейки.

Вычисление характерного размера ячейки. Для расчета вязкого давления и выбора временного шага необходимо рассчитывать характерный размер ячейки. Для более правильного описания течения характерный размер h_i каждой ячейки i будем вычислять вдоль направления среднего нор-

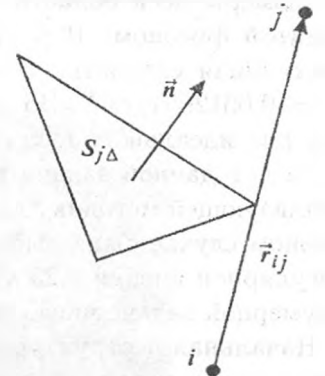


Рис. 3. Часть поверхности интегрирования ячейки с номером i

мированного вектора скорости $\vec{v}_{\text{ср}}$ текущей ячейки. Данный вектор вычисляется с использованием скоростей самой точки и ее соседей.

Далее вычисляются скалярные произведения вектора $\vec{v}_{\text{ср}}$ с набором векторов, образованных текущей точкой i и ее соседями (обозначим их $\vec{I}_1, \vec{I}_2, \dots, \vec{I}_N$, где N — число соседей точки i). Данные скалярные произведения будут определять длины векторов $\vec{I}_1, \vec{I}_2, \dots, \vec{I}_N$ в направлении вектора $\vec{v}_{\text{ср}}$. Выбирая из этих длин минимальную R^{min} и максимальную R^{max} , характерный размер ячейки с номером i определяем по формуле

$$h_i = \frac{1}{2} (R_i^{\text{max}} - R_i^{\text{min}}).$$

Вычисление вязкого давления. Квадратичная математическая вязкость в ячейке с номером i на $(n + 1)$ -м временном шаге рассчитывается по формуле

$$Q_i^{n+1} = \begin{cases} \left(kh_i \frac{V_i^{n+1} - V_i^n}{V_i^{n+1} \Delta t^n} \right)^2 / V_i^{n+1}, & V_i^{n+1} < V_i^n; \\ 0, & V_i^{n+1} \geq V_i^n. \end{cases}$$

Здесь k — безразмерный коэффициент; h_i — характерный размер ячейки; Δt^n — значение временного шага; V_i^n, V_i^{n+1} — удельный объем ячейки на двух слоях по времени. В данной реализации $k^2 = 4,5$.

Тестовые расчеты

Задача 1. Постановка задачи взята из [6] и приведена на рис. 4.

Размеры всей области: $0 \leq X \leq 12$ см; $0 \leq Y \leq 12$ см; $0 \leq Z \leq 24$ см. Размеры области, занятой фреоном: $0 \leq X \leq 6$ см; $0 \leq Y \leq 12$ см; $0 \leq Z \leq 9$ см. На верхней границе задана постоянная скорость: $\vec{U} = (0; 0; -21,056456$ см/мс). В воздухе давление $P_1 = 1$ атм, плотность $\rho_1 = 0,001205$ г/см³. Во фреоне $P_2 = 1$ атм, $\rho_2 = 0,00513$ г/см³. Уравнение состояния вещества — как для идеального газа с $\gamma_1 = 1,4$ для воздуха и $\gamma_2 = 1,139$ для фреона.

Расчет данной задачи проведен как по программе расчета двумерных газодинамических задач, реализующей методику МЕДУЗА, так и по созданной программе МЕДУЗА-3D. Для расчета в трехмерном случае была выбрана предварительная регулярная сетка $48 \times 48 \times 96$ интервалов (размер регулярной ячейки $0,25 \times 0,25 \times 0,25$). Таким образом, общее количество точек составило 232 897 (в двумерной задаче число точек 4753).

Начальная неструктурированная сетка строилась из регулярной посредством одинакового разбиения каждого шестигранника на тетраэдры. На рис. 5 изображен пример разбиения шестигранника. В результате из каждого шестигранника получается шесть тетраэдров.

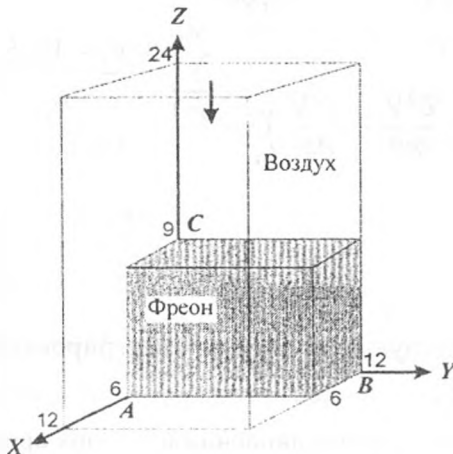


Рис. 4. Постановка задачи 1

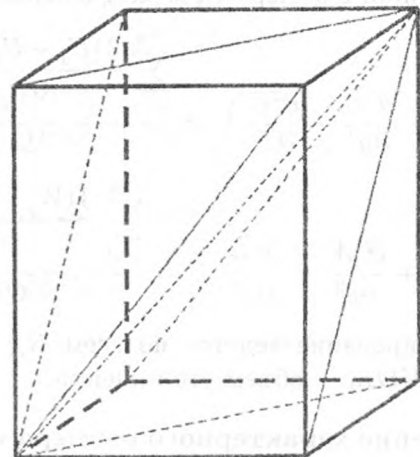


Рис. 5. Разбиение шестигранника на тетраэдры

На рис. 6 показано поведение решения в задаче 1 в зависимости от времени: слева — поведение поверхности фреона, справа — поля давления на поверхности всей задачи. На рис. 7 расчеты по двум программам сравниваются с экспериментальными данными. Видно согласие расчетных и экспериментальных данных как по полям давлений, так и по форме фреона. Кроме того, на основании рис. 6, 7, в, 7, г можно сделать вывод о хорошем сохранении свойства симметрии в трехмерном расчете.

Следует отметить, что трехмерный расчет задачи 1 был проведен до момента времени $t = 0,732$ мс (время возникновения аварийной ситуации, связанной с отрицательным объемом одного из тетраэдров) без корректировки счетной сетки, т. е. в чисто лагранжевом режиме. При этом в двумерном расчете аварийная ситуация при чисто лагранжевом счете возникала в момент времени $t = 0,53$ мс. Полностью двумерный расчет был проведен при включении после $t = 0,4$ мс раздвижек сетки (механизм смещения узла сетки в направлении центра масс ячейки при приближении узла к границе

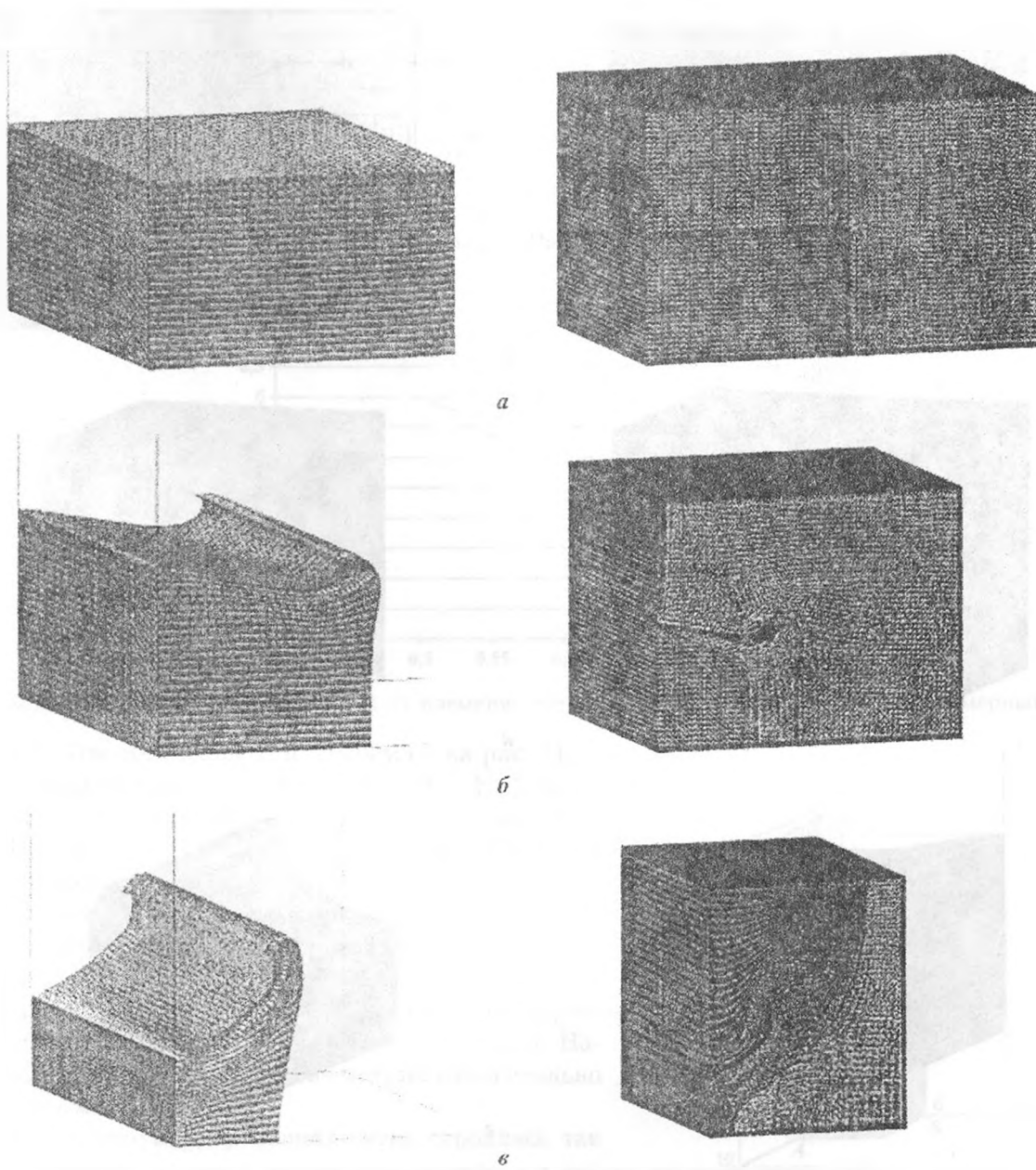


Рис. 6. Форма фреона (слева) и поле давления (справа) в двумерной задаче на различные моменты времени: а — $t = 0,316$ мс; б — $t = 0,508$ мс; в — $t = 0,732$ мс

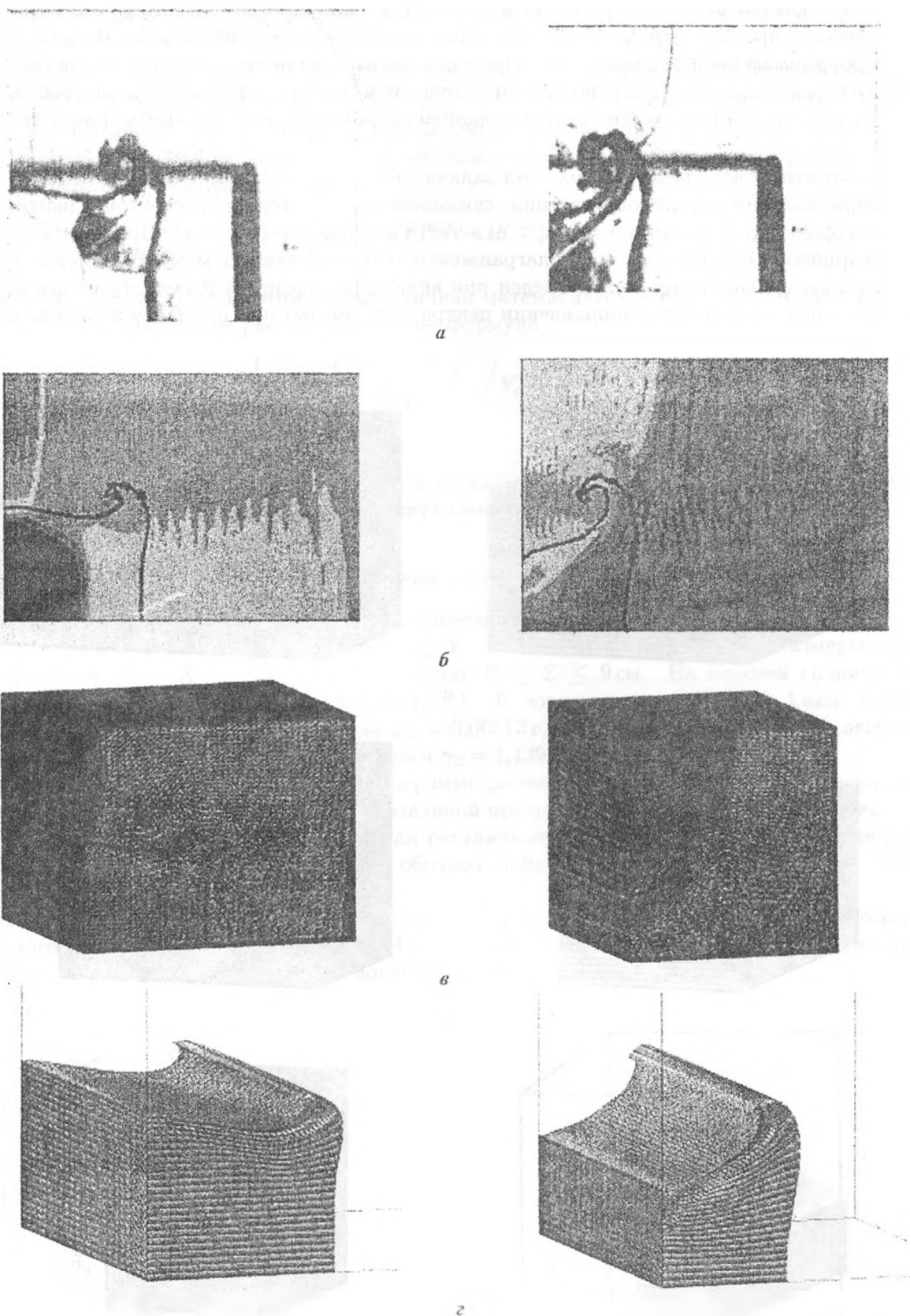


Рис. 7. Сравнение результатов расчетов задачи 1 с экспериментальными данными: слева — $t = 0,506$ мс; справа — $t = 0,668$ мс; *а* — эксперимент; *б* — поле давлений в двумерном расчете; *в* — поле давлений в трехмерном расчете; *г* — форма фреона в трехмерном расчете

контура интегрирования). По-видимому, более устойчивый счет в трехмерном случае связан с построением поверхности интегрирования не только по центрам тетраэдров, но и с привлечением центров граней и центров ребер тетраэдров.

Для анализа динамики возникающих отличий были накоплены следующие функции: зависимости средней плотности фреона от времени, координаты X точки A и координаты Z точки C от времени (указанные точки изображены на рис. 4). На рис. 8–10 приведены эти зависимости. Из их анализа следует, что средняя плотность фреона $\rho(t)$ и значения функции $Z_C(t)$ в двумерном и трехмерном расчетах практически совпадают. Наблюдается отличие зависимости $X_A(t)$ после 0,6 мс.

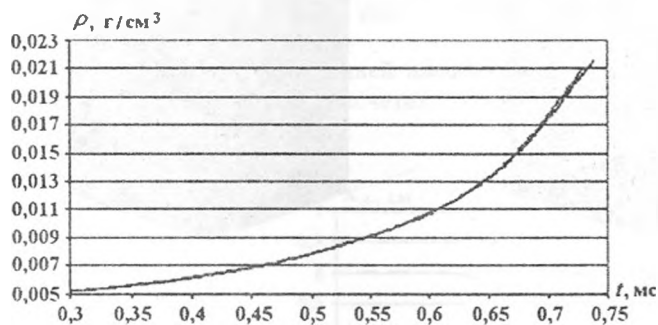


Рис. 8. Зависимость средней плотности фреона от времени в расчетах задачи 1: — — двумерный расчет; - - - - трехмерный расчет

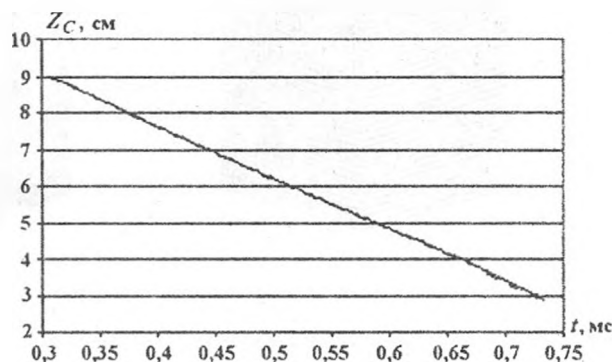


Рис. 9. Зависимость координаты точки C от времени: — — двумерный расчет; - - - - трехмерный расчет

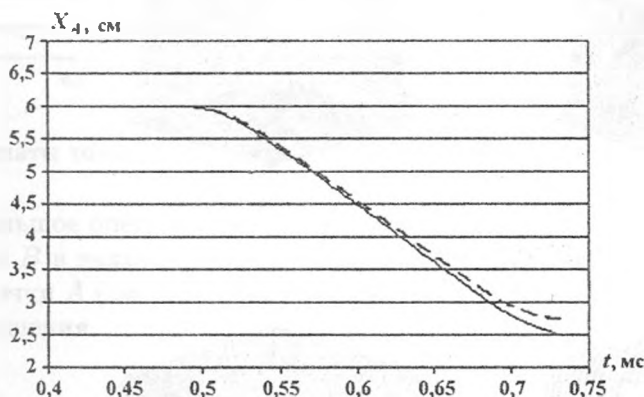


Рис. 10. Зависимость координаты точки A от времени: — — двумерный расчет; - - - - трехмерный расчет

Задача 2. Постановка задачи приведена на рис. 11.

Размеры всей области: $0 \leq X \leq 12$ см; $0 \leq Y \leq 12$ см; $0 \leq Z \leq 24$ см. Размеры области, занятой фреоном: $0 \leq X \leq 6$ см; $0 \leq Y \leq 6$ см; $0 \leq Z \leq 9$ см. Свойства веществ и граничные условия те же, что в задаче 1.

На рис. 12 показано поведение решения задачи 2 в зависимости от времени в различных ракурсах. Слева приведена форма фреона с точки зрения $(1, 1, 1)$, в центре — с точки зрения $(1, 1, -1)$, справа изображена форма фреона с изополями давления с точки зрения $(-1, -1, 1)$. Наблюдается сохранение свойства симметрии относительно плоскости симметрии задачи.

Начальная неструктурированная сетка строилась так же, как в задаче 1.

Анализ рис. 13–15 позволяет сделать вывод, что в задаче 2 наблюдается более интенсивное сжатие фреона,

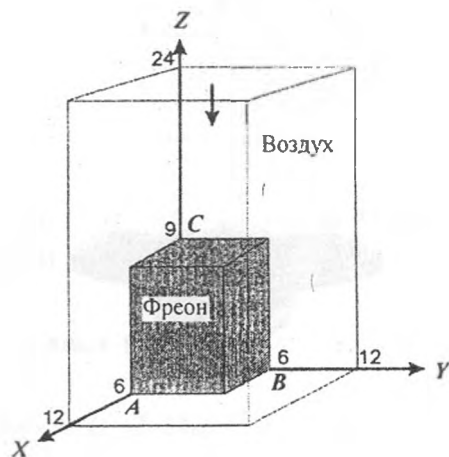


Рис. 11. Постановка задачи 2

чем в задаче 1 (на момент времени $t = 0,72$ мс разница достигает 8,4%). Динамика движения точки C до момента времени $t = 0,6$ мс в обеих задачах практически одинакова. После этого в задаче 2 наблюдается отставание, которое достигает 7,5% на момент времени $t = 0,72$ мс. Динамика движения точки B в обеих задачах до момента времени $t = 0,65$ мс тоже практически одинакова. В

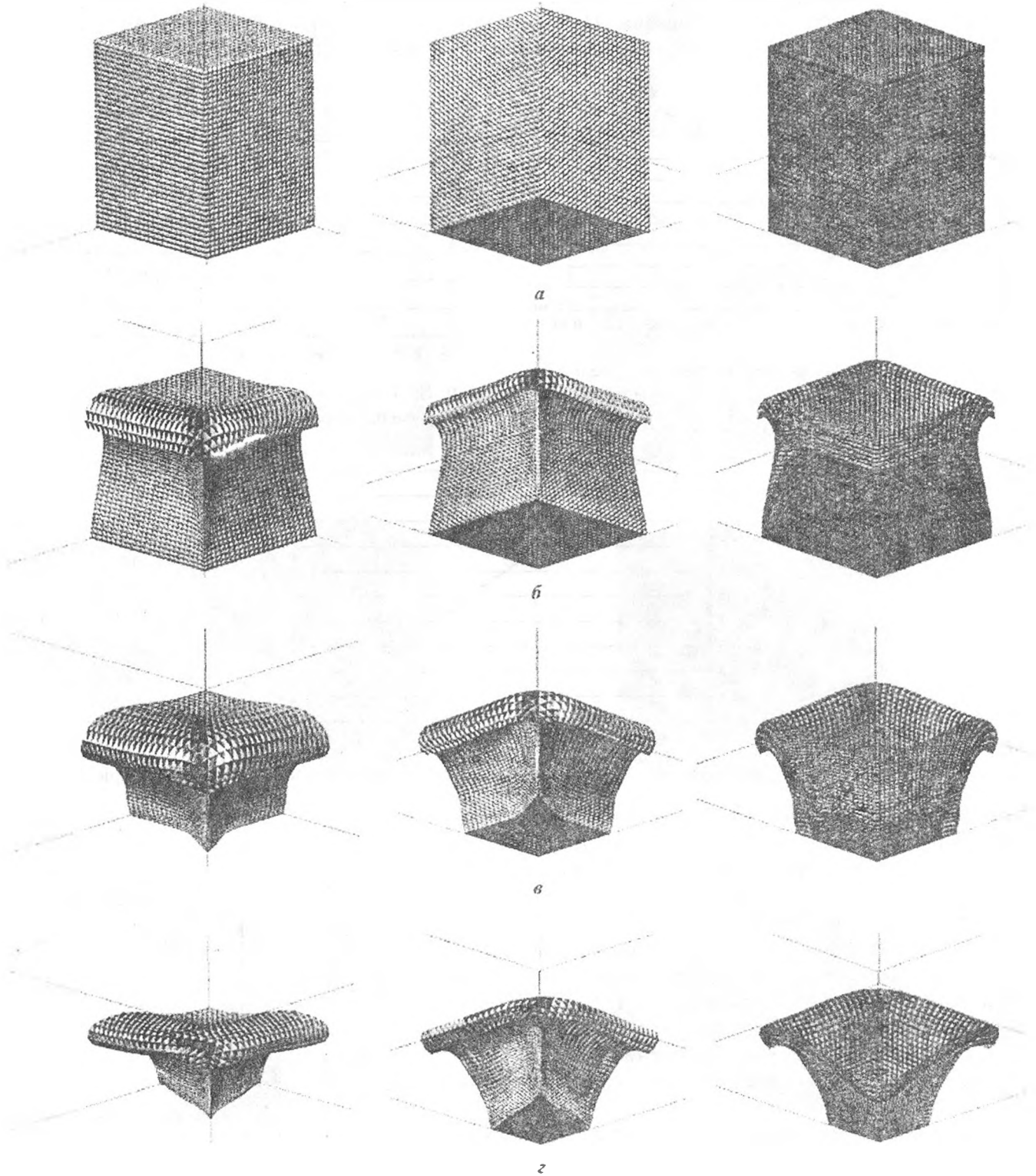


Рис. 12. Форма фреона и поле давления в различных ракурсах в задаче 2: $a - t = 0,316$ мс; $b - t = 0,508$ мс; $v - t = 0,636$ мс; $z - t = 0,764$ мс

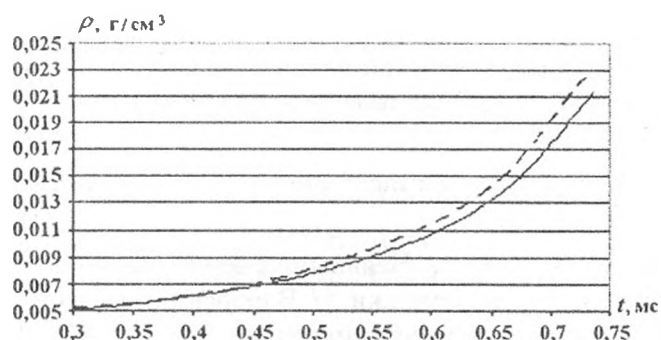


Рис. 13. Зависимость средней плотности фреона от времени в трехмерных расчетах: — — задача 1; - - - - задача 2

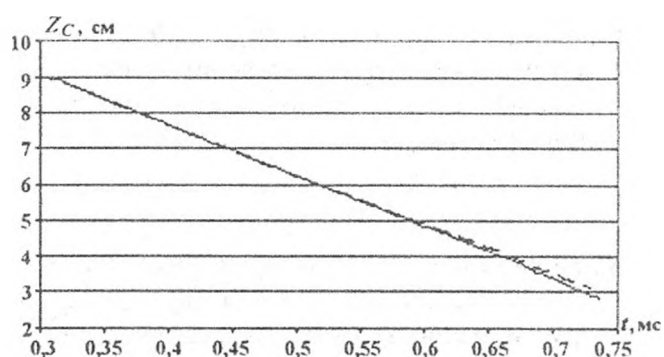


Рис. 14. Зависимость координаты точки C от времени: — — задача 1; - - - - задача 2

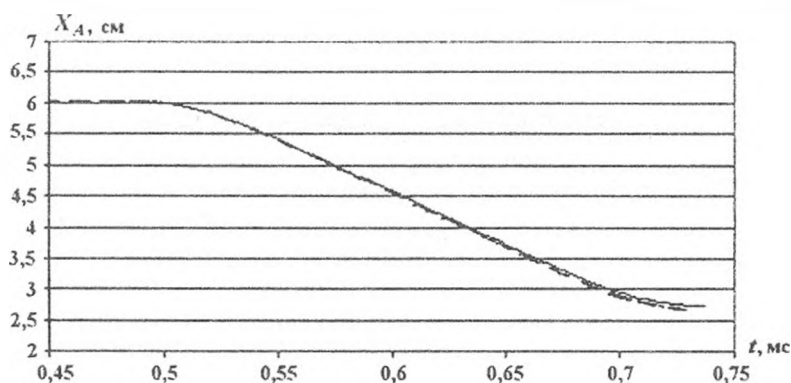


Рис. 15. Зависимость координаты точки A от времени: — — задача 1; - - - - задача 2

задаче 2 наблюдается небольшое опережение, которое достигает 3% на момент времени $t = 0,72$ мс. Динамика движения точки B в задаче 2 на рисунках не приведена, поскольку она практически не отличается от динамики точки A (см. рис. 15). Это свидетельствует о хорошем качестве симметрии полученного численного решения.

Список литературы

1. Софронов И. Д., Подливаев И. Ф., Мальшаков В. Д., Глаголева Ю. П., Жогов Б. М., Кирьянов Ю. Ф. Основы методики МЕДУЗА численного расчета двумерных нестационарных задач газодинамики // Числ. методы мех. спл. среды. 1972. Т. 3, № 2. С. 18—55.
2. Софронов И. Д., Жмайло В. А., Мальшаков В. Д., Нестеренко Л. В., Стаценко В. П., Глаголева Ю. П. Образование кольцевого вихря при всплывании легкого газа в тяжелом // Там же. 1974. Т. 5, № 1. С. 38—52.
3. Софронов И. Д., Мальшаков В. Д., Глаголева Ю. П., Родигин В. Н., Шустова Э. Ф. Численное решение задачи о перекрытии канала в стенке под действием давящего на нее газа // Там же. 1976. Т. 7, № 4. С. 48.
4. Жогов Б. М., Сапончик А. А., Урм В. Я. Методика решения газодинамических задач на нерегулярных сетках // Там же. 1975. Т. 6, № 2. С. 26—31.
5. Еременко А. Ю., Мотлохов В. Н., Рассказова В. В., Софронов И. Д. Методика решения задач трехмерной нестационарной газовой динамики на нерегулярных лагранжевых сетках // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1998. Вып. 4. С. 44—57.

6. Жогов Б. М., Клопов Б. А., Мешков Е. Е., Пастернак В. М., Толшмяков А. И. Численный расчет и сравнение с экспериментом задачи о прохождении плоской ударной волны через "тяжелый" угол // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1992. Вып. 3. С. 59—65.
7. Chan R. M. A generalized arbitrary Lagrangian-Eulerian method for incompressible flows with sharp interfaces // J. Comp. Phys. 1975. Vol. 17, No 3. P. 311—331.
8. Гаджиев А. Д., Кузьмин С. Ю., Лебедев С. Н., Писарев В. Н. Неявный конечно-разностный метод РОМБ для решения двумерных уравнений газовой динамики // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2001. Вып. 4. С. 11—21.
9. Артемьев А. Ю., Чернышев Ю. Д. Сглаживание скоростей при счете многомерных задач газовой динамики в комплексе программ Д // Межд. конф. параллельного вычисления и математического моделирования. Саров, 29 июля — 2 августа 1996 г.

Статья поступила в редакцию 17.11.04.
