

УДК 519.63

## АЛГОРИТМ ТОЧНОГО ПЕРЕНОСА СЕТОЧНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

Ю. В. Янилкин, В. Ю. Колобянин  
(РФЯЦ-ВНИИЭФ)

Предлагается метод точного решения уравнения адвекции. Метод реализован в рамках лагранжево-эйлеровой газодинамической методики ЭГАК для одномерного случая. Приводятся результаты тестирования разработанного метода на одномерных линейных задачах переноса, имеющих точное решение. Проведено сравнение с результатами, полученными с помощью донорного и кусочно-параболического методов. Показано, что предлагаемый метод в линейном случае дает точное решение для сеточного распределения величин.

### Введение

В лагранжево-эйлеровых методах решение уравнений газовой динамики, как правило, производится с использованием метода расщепления в два этапа. На первом этапе решаются уравнения газодинамики в лагранжевых переменных, т. е. без конвективных членов уравнений. На втором этапе, наоборот, решаются уравнения, содержащие только конвективные члены. Общая точность метода зависит от точности решения уравнений на каждом этапе вычислений. Как правило, лимитирующим в этом отношении является второй этап и общая точность определяется именно этим этапом.

Наиболее простым методом аппроксимации конвективных членов является донорный метод, который имеет первый порядок аппроксимации по пространству. Однако он характеризуется большой схемной вязкостью, которая ведет к неконтролируемому размазыванию разрывов в решении. Вследствие этого при моделировании определенного класса задач точность метода не всегда достаточна. Известен ряд методов повышения порядка аппроксимации конвективных членов (например FCT [1], MPDATE [2], TVD [3], ENO [4], PPM [5, 6]). Эти методы имеют порядок аппроксимации конвективных членов большой или равный и соответственно позволяют получить более высокую точность расчетов, особенно в задачах с контактными разрывами. Тем не менее практика использования этих методов показывает, что при решении некоторых

классов задач их точность на реальных счетных сетках оказывается недостаточной, и разработка более точных методов является весьма актуальной задачей.

Важным шагом в этом направлении является работа [7], в которой предложен метод *прыжкового переноса*, дающий точное решение при переносе сеточных распределений газодинамических величин в одномерном случае.

В настоящей работе предлагается другой метод точного решения уравнения конвективного переноса (метод КРУП), реализованный в рамках методики ЭГАК [8]. Данная работа была инициирована в процессе обсуждения результатов работы [7] с одним из ее авторов, В. М. Голвизниным.

### 1. Описание метода КРУП

Рассмотрим линейное уравнение адвекции

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial \xi} = 0;$$

$$f(\xi, 0) = f_0(\xi),$$

где  $f$  — любая газодинамическая величина (например плотность).

Пусть на некоторый момент времени имеется кусочно-постоянное распределение величины  $f$  по ячейкам, как показано на рис. 1, а.

Рассмотрим движение данного профиля с постоянной скоростью  $u$  вправо. На следующий момент времени  $t^{n+1} = t^n + \tau^{n+1}$  весь профиль

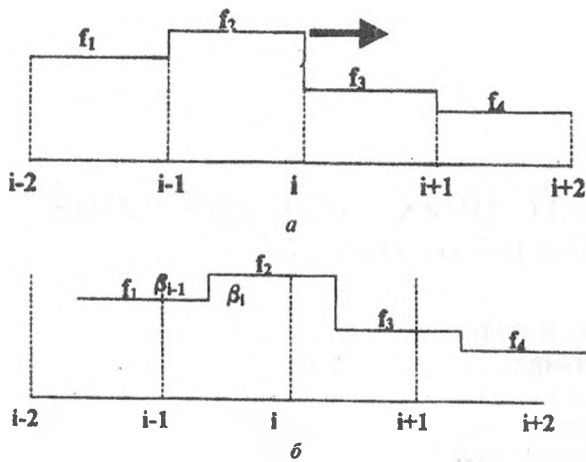


Рис. 1. Распределение величины  $f$ :  $a$  — на момент времени  $t^n$ ;  $b$  — на момент времени  $t^{n+1}$

сдвигается на расстояние  $S = \tau^{n+1}u$  и занимает положение, показанное на рис. 1, б.

Таким образом, каждое значение исходного распределения величины теперь будет содержаться в двух ячейках. Другими словами, каждая счетная ячейка будет содержать два значения параметра исходного распределения. К примеру, ячейка с индексом  $i + 1$  содержит предыдущее состояние из ячеек  $i$  и  $i + 1$ ;  $i$ -я ячейка — из ячеек  $i - 1$  и  $i$ .

Введем в рассмотрение объемные доли величины со значениями "старого" распределения в каждой ячейке, обозначив их  $\beta_i$ . В случае ячейки с номером  $i$

$$\beta_{i-1} = \frac{u\tau^{n+1}}{h_i};$$

$$\beta_i = 1 - \frac{u\tau^{n+1}}{h_i} = 1 - \beta_{i-1},$$

где  $h_i$  — размер ячейки.

На следующий момент времени  $t^{n+2}$  ячейка  $i$  будет содержать значения первоначального распределения величины в следующей пропорции:

$$\beta_{i-1} = \frac{u(\tau^{n+1} + \tau^{n+2})}{h_i} = \frac{u(t^{n+2} - t^n)}{h_i};$$

$$\beta_i = 1 - \beta_{i-1}.$$

Через некоторое число шагов на момент времени  $t^*$  в ячейке  $i$  появится первоначальное содержимое  $(i - 2)$ -й ячейки, в этот момент ячейка будет иметь еще содержимое  $(i - 1)$ -й ячейки, а свое содержимое передаст соседней ячейке  $i + 1$ . Таким образом, ячейка  $i$  будет содержать значения первоначального распределения величины

из ячеек  $i - 1$  и  $i - 2$ , т. е. в ней будут ненулевые  $\beta_{i-1}$  и  $\beta_{i-2}$ , значения которых определяются следующим образом:

$$\beta_{i-2} = \frac{u(t^* - t_0) - h_i}{h_i}, \quad \text{если } u(t^* - t_0) > h_i;$$

$$\beta_{i-1} = 1 - \beta_{i-2}.$$

Этот процесс можно продолжать неограниченно долго, и, таким образом, на каждый момент времени сохраняется первоначальное распределение сеточной величины. То есть при таком подходе метод дает точное решение уравнения адвекции на неподвижной счетной сетке.

Если в каждой эйлеровой ячейке хранить объемные доли для каждого значения первоначального распределения величины, то можно обеспечить сколь угодно долго точный перенос первоначального профиля. Проблема состоит в том, что для этого требуются неприемлемые затраты памяти ЭВМ.

Предлагается следующее решение этой проблемы.

Введем в рассмотрение в каждой эйлеровой счетной ячейке величины  $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ , обозначающие соответственно объемные доли значений первоначального распределения величины в данной ячейке, в соседней донорной ячейке и в донорной ячейке для соседней:

$$\beta_0 = \beta_i;$$

$$\beta_1 = \beta_{i-1};$$

$$\beta_2 = \beta_{i-2}.$$

Для наглядности представим весь вышеописанный алгоритм графически на примере одной ячейки равномерной сетки. На рис. 2 показаны характерные последовательные моменты времени и соответствующие им ситуации.

В момент времени  $t = t_2$ , когда в ячейке исчезает компонент  $\beta_0$ , делается перенумерация компонентов:

$$\beta_0(t_2) = \beta_1(t_2);$$

$$\beta_1(t_2) = \beta_2(t_2);$$

$$\beta_2(t_2) = 0$$

и алгоритм повторяется.

Необходимо иметь в виду, что вытекающий из ячейки компонент в следующей акцепторной ячейке меняет номер, т. е.  $\Delta V(\beta_0)$  превращается в  $\Delta V(\beta_1)$ .

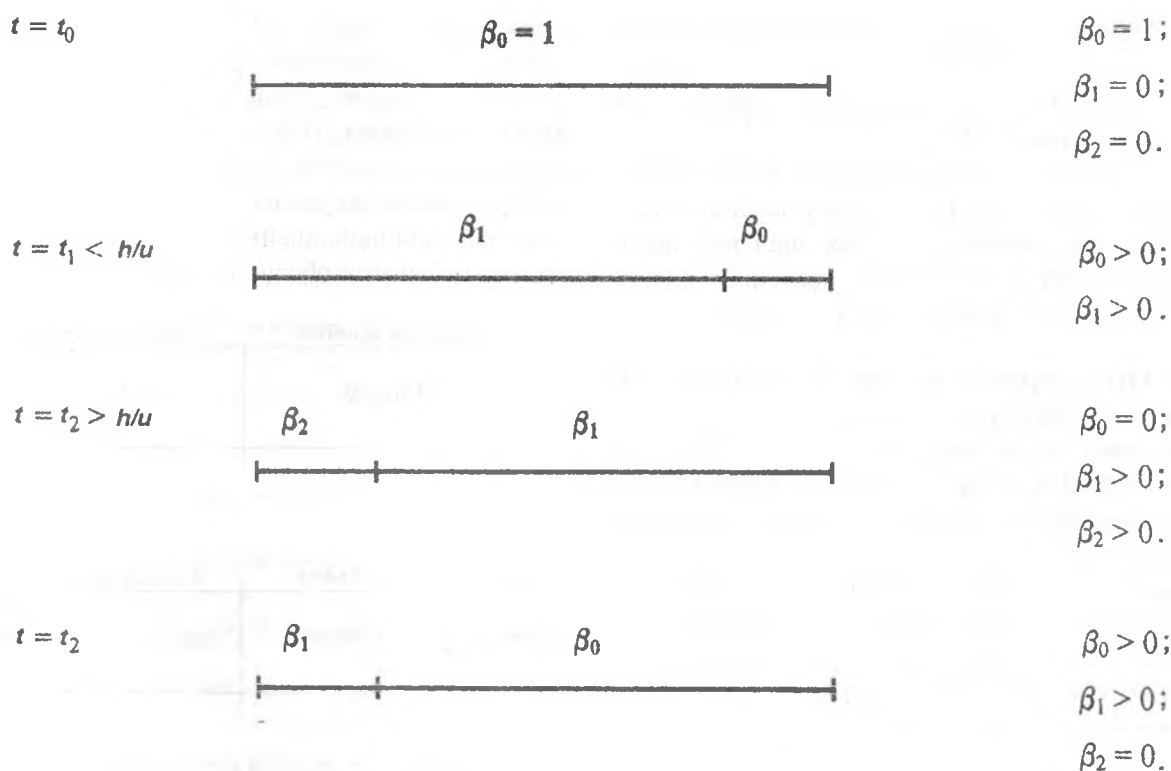


Рис. 2. Характерные последовательные моменты времени и соответствующие им ситуации для одной ячейки равномерной сетки

При использовании неравномерной сетки возможны ситуации, отличающиеся от вышеизложенных идеальных случаев заполнения ячеек компонентами (некоторые такие случаи рассматриваются ниже).

## 2. Реализация метода КРУП

**2.1. Разностные уравнения сохранения массы и энергии.** При аппроксимации уравнений сохранения массы и энергии необходимо вычислять потоки объемов, масс и энергий компонентов из одной ячейки в другую. При этом используются следующие два положения:

- 1) считается, что потоки существуют только из ячейки в ячейку, имеющую общую сторону с рассматриваемой (потоки в соседнюю по диагонали ячейку считаются равными нулю);
- 2) за один счетный шаг из ячейки не может вытекать одновременно три компонента, а только либо один, либо два (это достигается соответствующим ограничением на счетный шаг). Вообще говоря, это предположение не обязательно, оно используется лишь для упрощения алгоритмов.

В соответствии с идеей метода КРУП введем в рассмотрение три компонента, которые представляют собой содержимое текущей ячейки, соседней донорной и соседней для донорной, соответственно обозначим их номерами 0, 1, 2; для каждого такого компонента определим плотности и энергии. После лагранжева этапа вычислений имеются некоторые сеточные распределения этих величин, которые обозначим индексом  $n + 1/2$ , а распределения величин после эйлерова этапа вычислений обозначим индексом  $n + 1$ .

В общем виде разностные уравнения, аппроксимирующие уравнения сохранения объема, массы и энергии для используемых трех компонентов, имеют следующий вид:

$$M_i^{n+1} = M_i^{n+1/2} + \sum_{\xi=1}^2 \Delta M_i^\xi;$$

$$V_i^{n+1} = V_i^{n+1/2} + \sum_{\xi=1}^2 \Delta V_i^\xi;$$

$$E_i^{n+1} = E_i^{n+1/2} + \sum_{\xi=1}^2 \Delta E_i^\xi;$$

где  $\Delta M_i^\xi$ ,  $\Delta V_i^\xi$ ,  $\Delta E_i^\xi$  — потоки массы, объема

и энергии  $i$ -го компонента через стороны ячейки ( $\xi = 1, 2$ );  $M_i^{n+1/2}, V_i^{n+1/2}, E_i^{n+1/2}$  — масса, объем и энергия  $i$ -го компонента в ячейке после лагранжева этапа;  $M_i^{n+1}, V_i^{n+1}, E_i^{n+1}$  — масса, объем и энергия  $i$ -го компонента в ячейке после эйлерова этапа;  $i = 0, 1, 2$  — номер компонента.

Вычисление потоков и новых значений величин происходит в следующей последовательности: 1) объема; 2) плотности; 3) энергии.

**2.2. Определение потоков объемов компонентов.** При определении потока объема возможны два случая: первый случай — поток вытекает из ячейки, второй — поток втекает в ячейку. При вычислении потоков рассмотрим ситуации наличия в ячейке только двух компонентов, так как поток третьего компонента полагается равным нулю по предположению 2 подразд. 2.1 (отметим, что это предположение не ограничивает количества компонентов в ячейке, в ней может быть и третий компонент).

*Вытекающий поток.* Исходя из вышесказанного могут возникнуть два варианта, которые показаны на рис. 3 (вытекающий поток окрашен в серый цвет).

Тогда вытекающие потоки для каждого компонента равны

$$\begin{aligned} \Delta V_0 &= \min(V_{я}\beta_0, \Delta V); \\ \Delta V_1 &= \Delta V - \Delta V_0; \\ \Delta V_2 &= 0, \end{aligned}$$

где  $V_{я}$  — объем текущей ячейки;  $\beta_0$  — объемная концентрация нулевого компонента в ячейке;  $\Delta V$  — полный вытекающий объем.

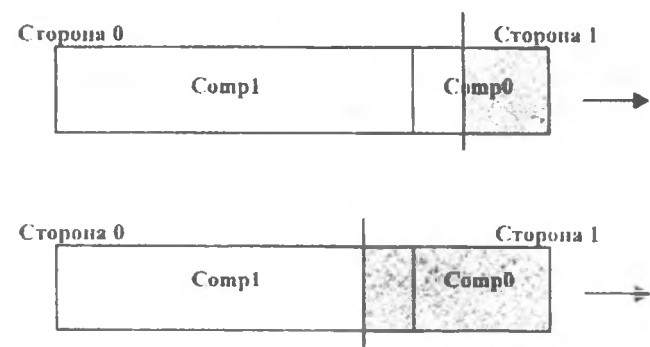


Рис. 3. Варианты для случая вытекающего потока: а — вытекает нулевой компонент; б — вытекает полностью нулевой компонент и часть первого

*Втекающий поток.* Втекающий поток объема для каждого компонента равен вытекающему потоку из соседней донорной ячейки, взятому с обратным знаком. При этом номер каждого втекающего компонента будет на единицу больше номера соответствующего компонента, вытекающего из донорной ячейки (рис. 4). На рисунке втекающий поток обозначен серым цветом.

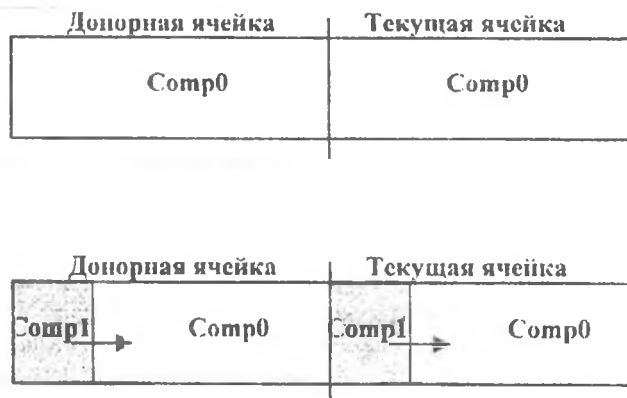


Рис. 4. Изменение номера втекающего компонента с течением времени

Таким образом, для втекающего потока имеем

$$\Delta V_0 \rightarrow \Delta V_1; \quad \Delta V_1 \rightarrow \Delta V_2; \quad \Delta V_2 = 0.$$

При указанных выше переобозначениях могут возникнуть нестандартные ситуации (рис. 5), например при использовании сильно неравномерной сетки. На рис. 5 компонент 2 "зажат" между компонентами 1, представляющими разные ячейки. Такая ситуация в ячейке допускаться не должна. Поэтому если в ячейке нет второго компонента, используется стандартное переобозначение компонентов:

$$\Delta V_0 \rightarrow \Delta V_1; \quad \Delta V_1 \rightarrow \Delta V_2; \quad \Delta V_2 = 0.$$

Если второй компонент в ячейке есть, то

$$\begin{aligned} \Delta W_{01} &= \Delta V_0; \quad \Delta W_{11} = \Delta V_1; \\ \Delta V_0 + \Delta V_1 &\rightarrow \Delta V_2; \quad \Delta V_1 = 0; \quad \Delta V_2 = 0. \end{aligned}$$

Здесь величины  $\Delta W_{01}, \Delta W_{11}$  — фиктивные (временные) переменные, которые понадобятся в

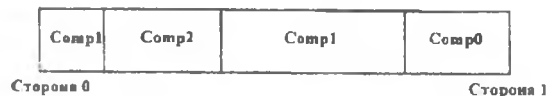


Рис. 5. Одна из возможных нестандартных ситуаций в ячейке

дальнейшем при вычислении потоков массы и энергии.

Итак, для каждой ячейки получено три вытекающих потока (по одному на каждый компонент) и три вытекающих.

После определения потоков объема происходит пересчет объемных концентраций во всех ячейках счетной сетки для каждого компонента.

### 2.3. Определение потоков массы.

*Вытекающий поток.* Сначала происходит обратное переобозначение потоков объема, а именно:

$$\Delta V_1 \rightarrow \Delta V_0; \quad \Delta V_2 \rightarrow \Delta V_1; \quad \Delta V_2 = 0,$$

если в ячейке нет второго компонента, и

$$\Delta V_2 = 0; \quad \Delta V_1 = \Delta W_{11}; \quad \Delta V_0 = \Delta W_{01},$$

если второй компонент есть.

Данная процедура выполняется по той причине, что в донорной ячейке плотности компонентов хранятся в соответствии с собственной нумерацией, а именно, вытекающие компоненты имеют номера, на единицу меньшие по сравнению с номером данной ячейки.

Вычисляем новые потоки масс:

$$\Delta M_i^{n+1} = \rho_{id}^n \Delta V_i, \quad (1)$$

где  $\rho_{id}^n$  — плотность  $i$ -го компонента в донорной ячейке.

Снова делаем переобозначение:

$$\Delta M_1 \rightarrow \Delta M_2; \quad \Delta M_0 \rightarrow \Delta M_1; \quad \Delta M_0 = 0,$$

если второго компонента в ячейке нет. Если второй компонент в ячейке есть, то

$$\begin{aligned} \Delta W_{01} &= \Delta M_0; \quad \Delta W_{11} = \Delta M_1; \\ \Delta M_0 + \Delta M_1 &\rightarrow \Delta M_2; \quad \Delta M_1 = 0; \quad \Delta M_0 = 0. \end{aligned}$$

*Вытекающий поток.* Вычисление вытекающего потока также происходит по формуле (1), где  $\rho_i^n$  — плотность  $i$ -го компонента в текущей ячейке.

После определения потоков массы происходит пересчет плотности во всех ячейках счетной сетки для каждого компонента.

**2.4. Определение потоков энергии.** Алгоритм вычисления потоков энергии аналогичен алгоритму, описанному в подразд. 2.3 для пото-

ков масс, если  $\Delta V_i$  заменить на  $\Delta M_i$ ,  $\Delta M_i$  — на  $\Delta E_i$ ,  $\rho_i$  — на  $e_i$ .

**2.5. Заключительный этап.** В завершение каждого шага по времени в конце эйлерова этапа необходимо сделать переобозначения компонентов, а именно, если в ячейке не осталось нулевого компонента, то необходимо уменьшить номера оставшихся компонентов на единицу.

## 3. Тестирование метода

С использованием метода КРУП были проведены расчеты ряда тестовых задач. Результаты некоторых расчетов приводятся ниже.

**3.1. Одномерная задача 1 о движении прямоугольных скачков плотности и энергии на равномерной сетке.** Прямоугольные скачки плотности и энергии движутся с постоянной скоростью. Задавалась область из 100 ячеек, расчет проводился на неподвижной равномерной счетной сетке с размером ячейки  $h_x = 1$ . Полагалось, что в области три компонента, при этом компонент с номером 0 в начальный момент времени заполняет всю область и имеет параметры  $\rho = 1$ ,  $e = 10$ ,  $p = 20$ ,  $u_x = 1$ , а с 10-й по 29-ю ячейку — параметры  $\rho = 10$ ,  $e = 1$ ,  $p = 20$ ,  $u_x = 1$ . Остальные два компонента в начальный момент времени отсутствуют.

Расчетные профили плотности и энергии на момент времени  $t = 34,11$  представлены на рис. 6, где результаты расчета по методу КРУП сравниваются с полученными донорным и кусочно-параболическим методами, а также с аналитическим решением.

**3.2. Одномерная задача 2 о движении треугольного скачка уплотнения на равномерной сетке.** Треугольный скачок уплотнения движется с постоянной скоростью. Задавалась область из 160 ячеек, расчет проводился на неподвижной счетной сетке с размером ячейки  $h_x = 1$ . Полагалось, что в области три компонента, при этом компонент с номером 0 в начальный момент времени заполняет всю область с параметрами  $\rho = 1$ ,  $e = 0$ ,  $u_x = 1$ ,  $p = 0$ , а с 10-й по 50-ю ячейку имеет профиль в виде равнобедренного треугольника с максимальным значением  $\rho = 10$  в 30-й ячейке. Остальные два компонента в начальный момент отсутствуют.

Результаты на момент времени  $t = 72,5$  представлены на рис. 7, где результаты расчета по

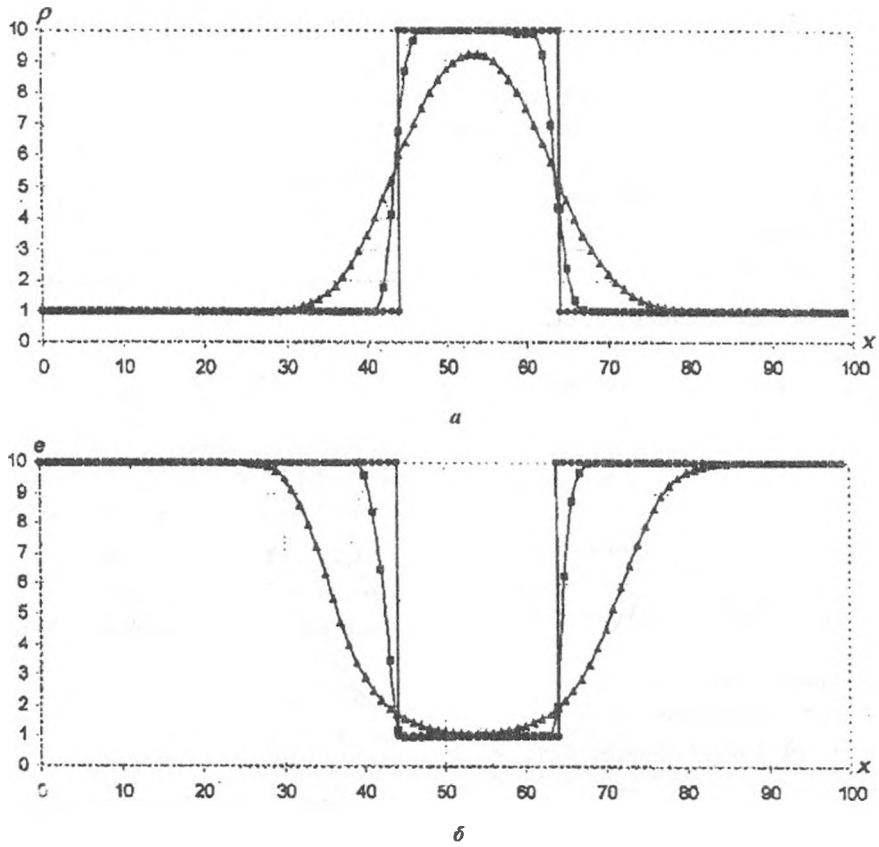


Рис. 6. Задача 1. Профили плотности (а) и энергии (б) на момент времени  $t = 34,11$ : -o- — метод КРУП; -□- — параболический метод; -△- — донорный метод; — — аналитическое решение

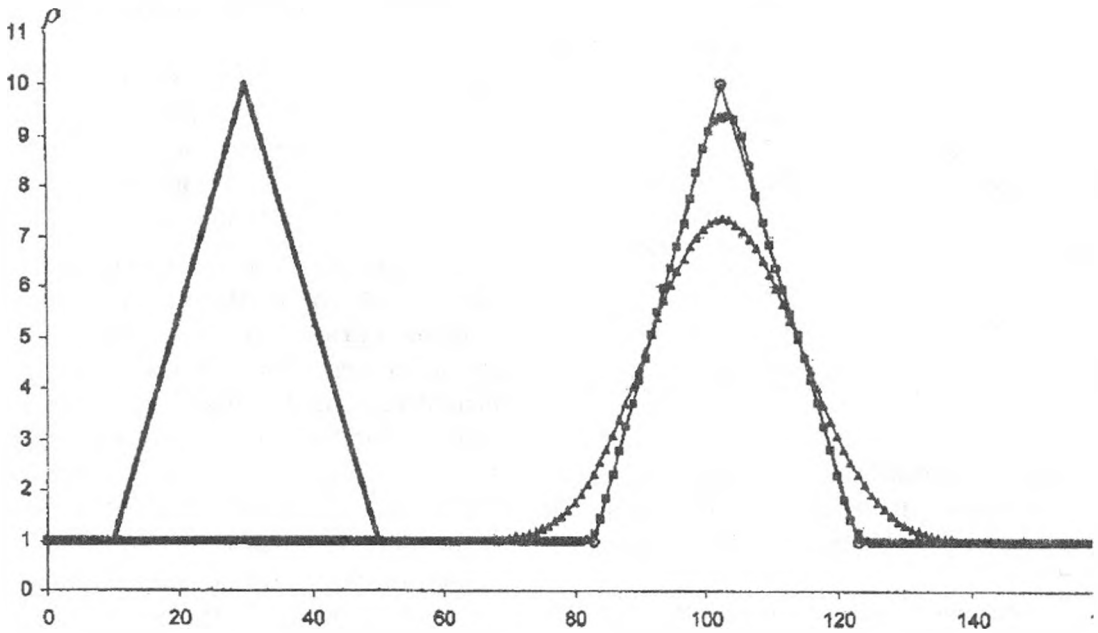


Рис. 7. Задача 2. Профили плотности на момент времени  $t = 72,5$ : — — начальный профиль; -□- — кусочно-параболический метод; -△- — донорный метод; --- — аналитическое решение; -o- — метод КРУП

методу КРУП сравниваются с полученными донорным и кусочно-параболическим методами, а также с аналитическим решением.

**3.3. Одномерная задача 3 о движении прямоугольных скачков плотности и энергии на неравномерной сетке.** Задавалась область с неравномерной неподвижной сеткой в 28 ячеек. Первые три ячейки имели размер  $h_x = 5$ , а дальше размер ячеек уменьшался в геометрической прогрессии со знаменателем  $z =$

$= 0,97$ . В области три компонента. В начальный момент времени нулевой компонент заполняет всю область и имеет параметры  $\rho = 1, e = 10, p = 20, u_x = 1$ , а с 5-й по 9-ю ячейку — параметры  $\rho = 10, e = 1, p = 20, u_x = 1$ . Остальные два компонента в начальный момент отсутствуют.

Профили плотности и энергии на момент времени  $t = 40$  представлены на рис. 8, где результаты расчета по методу КРУП сравниваются с полученными донорным методом, а также с аналитическим решением.

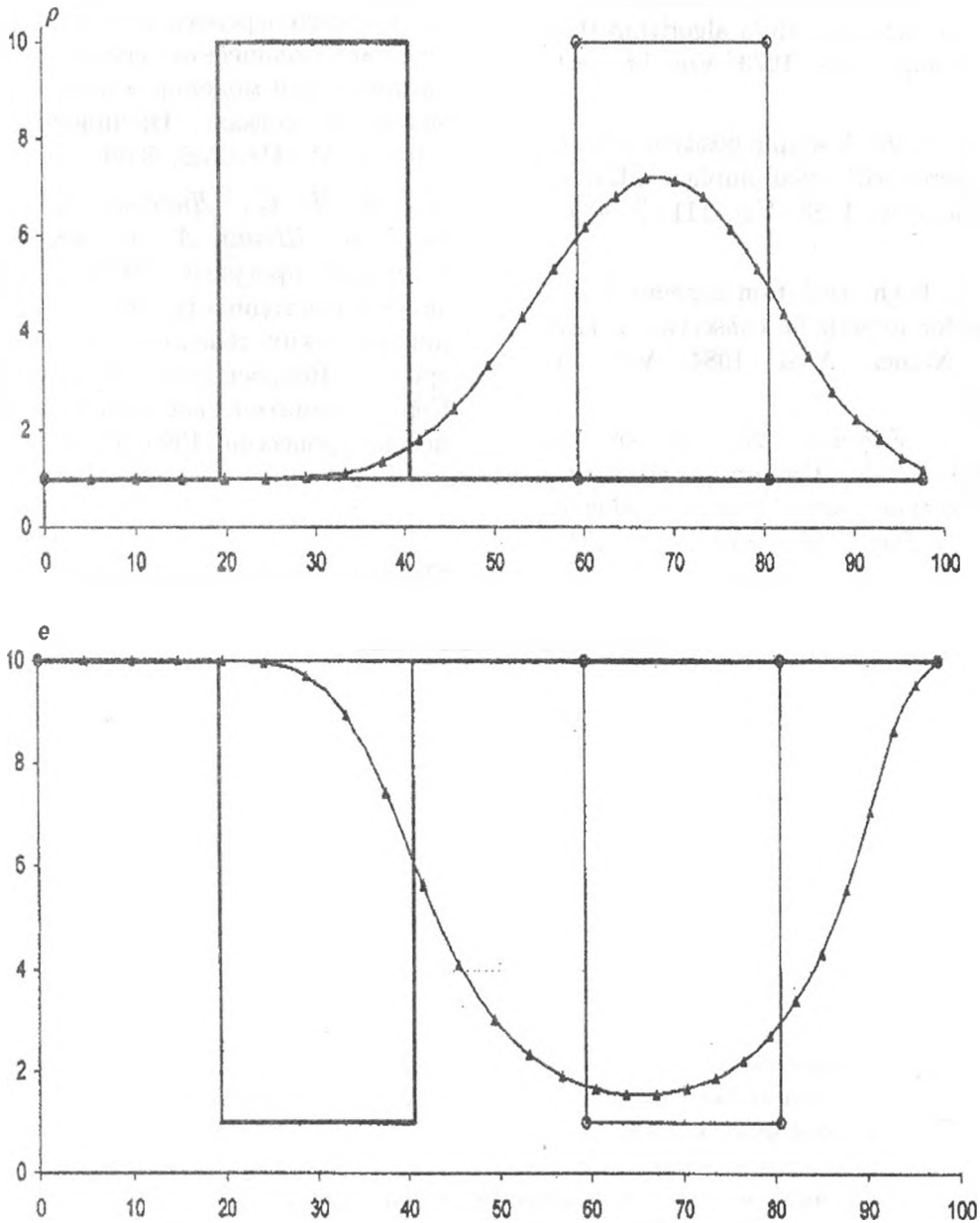


Рис. 8. Задача 3. Профили плотности и энергии на момент времени  $t = 40$ : — — начальный профиль; - - - точное решение; -o- — метод КРУП; -Δ- — донорный метод

### Заклучение

В работе предложен метод КРУП точного решения уравнения адвекции для одномерного случая. Работоспособность и эффективность метода проверена на тестовых расчетах, которые показали, что метод позволяет получить точное решение уравнения переноса для сеточного распределения газодинамических величин.

### Список литературы

1. *Boris J. P., Book D. L.* Flux-corrected transport. I. SHASTA, a fluid algorithm that works // *J. Comp. Phys.* 1973. Vol. 11, No 1. P. 38–69.
2. *Smolarkiewicz P. K.* A simple positive definite advection scheme with small implicit diffusion // *Mon. Wea. Rev.* 1983. Vol. 111. P. 479–486.
3. *Sweby P. K.* High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws // *SIAM J. Numer. Anal.* 1984. Vol. 21. P. 995–1011.
4. *Harten A., Engquist B., Oster S., Chakravarthy S. R.* Uniformly high-order accurate essentially non-oscillatory schemes III // *J. Comp. Phys.* 1987. Vol. 71. P. 231–303.
5. *Woodward P. R., Colella Ph.* The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks // *Ibid.* 1984. Vol. 54. P. 115–174.
6. *Кучерова П. А., Янилкин Ю. В., Гончаров Е. А.* Применение кусочно-параболического метода для решения уравнения адвекции в комплексе ЭГАК++ // *Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов.* 2002. Вып. 1. С. 29–35.
7. *Головизнин В. М., Карабасов С. А.* Метод прыжкового переноса для численного решения гиперболических уравнений. Точный алгоритм для моделирования конвекции на эйлеровых сетках: Препринт № ИБРАЭ-2000-04. М.: ИБРАЭ, 2000.
8. *Дарова Н. С., Дибиров О. А., Жарова Г. В., Шанин А. А., Янилкин Ю. В.* Комплекс программ ЭГАК. Лагранжево-эйлерова методика расчета двумерных газодинамических течений многокомпонентной среды // *Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов.* 1994. Вып. 2. С. 51–58.

Статья поступила в редакцию 10.11.04.