

УДК 519.6

## ИССЛЕДОВАНИЕ СХОДИМОСТИ ЛАГРАНЖЕВО-ЭЙЛЕРОВЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ НА ПРИМЕРЕ ЗАДАЧИ "BLAST WAVES"

С. М. Бахрах, И. Ю. Безрукова, В. Ф. Спиридонов  
(РФЯЦ-ВНИИЭФ)

Работа посвящена исследованию точности и сходимости разностных схем лагранжево-эйлеровой методики на примере задачи "Blast Waves", отражающей плоское одномерное взаимодействие двух ударных волн разной интенсивности.

Представлено численное исследование трех эйлеровых разностных схем. Расчеты проводились в трех различных постановках — эйлеровой (на неподвижной сетке), лагранжево-эйлеровой (лагранжевы точки соответствуют начальному положению фронтов ударных волн) и с применением метода концентраций. В качестве результатов приводятся значения погрешностей плотности в интегральной норме  $L_1$  на конечный момент времени  $t = 0,038$ , а также полученные в данных расчетах порядки сходимости.

### Введение

В последнее время в связи с растущей потребностью проведения существенно трехмерных расчетов все более актуальной становится проблема исследования и повышения точности эйлеровых схем. Особый интерес вызвала работа [1], в которой, помимо исследования консервативных схем, в качестве примера отсутствия сходимости приводится расчет по неконсервативной эйлеровой схеме. В работе [1] в качестве тестовой задачи выбрана широко известная в зарубежных публикациях задача "Blast Waves", отражающая плоское одномерное взаимодействие двух ударных волн (УВ) разной интенсивности в однородном веществе [2].

В методике [3], предназначенной для расчета газодинамических осесимметричных нестационарных течений, на эйлеровом этапе используется неконсервативная схема пересчета энергии (закон сохранения выполнен для внутренней энергии) совместно со схемой согласованной аппроксимации конвективных потоков [4], которая обеспечивает второй порядок аппроксимации для кинетической энергии. Именно такой алгоритм с различными схемами расчета конвективных потоков массы, энергии и вязкости используется в расчетах задачи "Blast Waves", результаты которых приведены в данной статье.

### Обзор лагранжево-эйлеровых разностных схем

В методике [3] для счета конвективных потоков количества движения используется согласованная аппроксимация [4]. С этой целью строятся вспомогательные ячейки с вершинами в центрах двух счетных ячеек, прилегающих к данному узлу. Кроме того, при счете потоков количества движения  $(\delta K)^j$  вводится весовой множитель  $\alpha$  центрирования скоростей  $(\delta \bar{K})^j = \delta M^j [\alpha \bar{u}^d + (1 - \alpha) \bar{u}^a]$ . Здесь  $\delta M^j$  — изменение массы окрестности рассматриваемого узла за счет смещения узла  $j$ ;  $\bar{u}^d, \bar{u}^a$  — скорости в донорном и акцепторном узлах. Значение параметра  $\alpha$  в данной схеме выбирается так:  $\alpha = \frac{1}{2} + \frac{|\lambda|}{2}$ , где  $\lambda = \frac{(\bar{u} - \bar{u}^*) \tau}{h}$ ,  $\bar{u} - \bar{u}^*$  — скорость движения вещества относительно сетки.

Для расчета конвективных потоков массы, энергии и вязкости из чистых ячеек (содержащих одно вещество) существует возможность выбора одной из нескольких разностных схем, реализованных в методике [3]:

1. *Донорная схема PCM (Piecewise Constant Method) — кусочно-постоянная реконструкция.* При счете потоков всегда используются значения из донорной ячейки (откуда направлен поток):

$$\Delta M = \rho^d \Delta V; \quad \Delta G = g^d \Delta V; \quad \Delta E = e^d \Delta M,$$

где  $\Delta V$ ,  $\Delta M$ ,  $\Delta G$  и  $\Delta E$  — потоки объема, массы, вязкости и удельной внутренней энергии соответственно; верхним индексом  $d$  обозначены величины из донорной ячейки. Данная схема имеет первый порядок аппроксимации.

2. *Донорно-акцепторная схема* [5] PLM (*Piecewise Linear Method*) — кусочно-линейная реконструкция. Представляет собой замену донорной аппроксимации конвективных потоков массы, энергии и вязкости на донорно-акцепторную:

$$\rho^d \rightarrow \rho', \quad e^d \rightarrow e', \quad g^d \rightarrow g';$$

$$\rho' = \rho^d + \alpha (\rho^d - \rho^p) \max \left\{ 0, \min \left( 1, \frac{\rho^a - \rho^d}{\rho^d - \rho^p} \right) \right\};$$

$$e' = e^d + \alpha (e^d - e^p) \max \left\{ 0, \min \left( 1, \frac{e^a - e^d}{e^d - e^p} \right) \right\};$$

$$g' = g^d + \alpha (g^d - g^p) \max \left\{ 0, \min \left( 1, \frac{g^a - g^d}{g^d - g^p} \right) \right\},$$

где весовой коэффициент  $\alpha$  определяется следующим образом:

$$\alpha = \frac{1}{2} - \frac{|\Delta V|}{V^d + V^a}.$$

Здесь  $V^d$  — объем донорной ячейки;  $V^a$  — объем акцепторной ячейки;  $\rho^p$ ,  $e^p$ ,  $g^p$  — соответственно плотность, удельная внутренняя энергия и вязкость ячейки, соседней с донорной и не являющейся акцепторной;  $\rho^d$ ,  $e^d$ ,  $g^d$  — плотность, удельная внутренняя энергия и вязкость донорной ячейки (откуда течет вещество);  $\rho^a$ ,  $e^a$ ,  $g^a$  — плотность, удельная внутренняя энергия и вязкость акцепторной ячейки (куда течет вещество). Описанная схема имеет второй порядок аппроксимации и основана на построении кусочно-линейной реконструкции с использованием ограничителя  $\min\text{mod}$ .

3. *Кусочно-параболический метод* PPM (*Piecewise Parabolic Method*) [6, 7]. Основан на построении кусочно-параболического профиля газодинамических величин по известным средним значениям в соседних ячейках.

Для получения более точного профиля вблизи разрывов используется следующий переключатель:

$$\begin{aligned} \rho_{L,j} &= \rho_{L,j} (1 - \eta_j) + \rho_{L,j}^d \eta_j; \\ \rho_{R,j} &= \rho_{R,j} (1 - \eta_j) + \rho_{R,j}^d \eta_j; \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\rho_{L,j}$  и  $\rho_{R,j}$  — значения параболической функции плотности на сторонах ячейки;  $\rho_{L,j}^d$  и  $\rho_{R,j}^d$  — значения линейной функции на сторонах ячейки:

$$\rho_{L,j}^d = \rho_{j-1} + \frac{1}{2} \delta_m \rho_{j-1}; \quad \rho_{R,j}^d = \rho_{j+1} - \frac{1}{2} \delta_m \rho_{j+1};$$

$\delta_m \rho_j$  определяется с помощью ограничителя Ван-Лири:

$$\begin{aligned} \delta_m \rho_j &= \min \left( \frac{|\delta \rho_j|}{2}, 2 |\rho_j^n - \rho_{j-1}^n|, 2 |\rho_{j+1}^n - \rho_j^n| \right) \times \\ &\quad \times \text{sgn} (\rho_{j+1}^n - \rho_j^n) \\ &\quad \text{при } (\rho_{j+1}^n - \rho_j^n) (\rho_j^n - \rho_{j-1}^n) > 0. \end{aligned}$$

В формуле (1)  $\eta_j$  определяется так:

$$\eta_j = \max \left\{ 0, \min \left( \eta^{(1)} (\tilde{\eta}_j - \eta^{(2)}), 1 \right) \right\},$$

где

$$\tilde{\eta}_j = \begin{cases} -\frac{\delta^2 \rho_{j+1} - \delta^2 \rho_{j-1}}{V_j + (V_{j-1} + V_{j+1})/2} \times \\ \quad \times \frac{(V_j + V_{j-1})^3 + (V_{j+1} + V_j)^3}{8 (\rho_{j+1} - \rho_{j-1})}, \\ \text{если } -\delta^2 \rho_{j+1} \delta^2 \rho_{j-1}, |\rho_{j+1} - \rho_{j-1}| - \\ \quad - \varepsilon \min (|\rho_{j+1}|, |\rho_{j-1}|) > 0; \\ 0, \text{ иначе;} \end{cases}$$

$$\delta^2 \rho_j = \frac{1}{V_{j-1} + V_j + V_{j+1}} \left( \frac{\rho_{j+1} - \rho_j}{V_{j+1} + V_j} - \frac{\rho_j - \rho_{j-1}}{V_j + V_{j-1}} \right).$$

Параметры  $\eta^{(1)}$  и  $\eta^{(2)}$  являются константами, которые определяют непрерывность между схемой с кусочно-параболическим распределением в ячейке и схемой с кусочно-линейным распределением. В представленных ниже вычислениях, как и в [2, 6], данные параметры выбирались следующим образом:

$$\eta^{(1)} = 20; \quad \eta^{(2)} = 0,05; \quad \varepsilon = 0,01.$$

Особо отметим, что схема с определением разрывов применяется только для плотности, причем данная модификация используется в случае

$$\gamma K_0 \frac{|\rho_{j+1} - \rho_{j-1}|}{\min (\rho_{j+1}, \rho_{j-1})} \geq \frac{|p_{j+1} - p_{j-1}|}{\min (p_{j+1}, p_{j-1})}.$$

Здесь  $K_0$  — константа, которая зависит от конкретной задачи. В приведенных расчетах она полагалась равной 0,5.

Для счета конвективных потоков массы, удельной внутренней энергии и вязкости значения соответствующих газодинамических величин заменяются их значениями, пересчитанными по PPM в потоке объема  $\Delta V$ :

$$\rho^d \rightarrow \rho^{PPM}; \quad e^d \rightarrow e^{PPM}; \quad g^d \rightarrow g^{PPM}.$$

На гладких решениях вдали от разрывов кусочно-параболический метод имеет третий порядок аппроксимации.

Следует особо подчеркнуть, что для расчета конвективных потоков количества движения используется схема согласованной аппроксимации [4].

Одной из особенностей методики [3] является использование концентраций веществ [8] и специального донорно-акцепторного алгоритма счета конвективных потоков массы и внутренней энергии из смешанных ячеек для предотвращения счетного размазывания контактных разрывов. Все описанные выше разностные схемы состыкованы с методом концентраций (МК) таким образом, что смешанные ячейки рассчитываются с помощью МК, а во всех остальных ячейках области применяется одна из выбранных разностных схем.

### Постановка и методика проведения расчетов задачи "Blast Waves"

Математическая постановка задачи "Blast Waves" приведена в [1, 2]. Для количественной оценки используется погрешность плотности в интегральной норме  $L_1$ . Для корректности сравнения в качестве эталонного берется лагранжев расчет из [1] на предельно большом числе точек  $N = 20\,000$ . Следует отметить, что шаг по времени в расчетах определяется автоматиче-

ски, поэтому ни один расчетный момент времени точно не совпадает с контрольным моментом  $t = 0,038$ .

Были проведены расчеты по трем эйлеровым разностным схемам методики [3]: PCM, PLM и PPM. Для лучшей их оценки представлен расчет по лагранжевой схеме методики [3].

Расчеты по всем эйлеровым схемам проводились тремя способами:

- 1) на эйлеровой сетке (на каждом временном шаге сетка возвращается в начальное положение);
- 2) на лагранжево-эйлеровой сетке, лагранжевы точки которой соответствуют начальному положению фронтов УВ ( $x = 0,1$  и  $x = 0,9$ ), между этими точками сетка равномерна по расстоянию;
- 3) с применением МК (выделение разрывов с помощью концентраций).

### Результаты

Полученные погрешности плотности в интегральной норме  $L_1$  приведены в табл. 1, построены кривые сходимости в логарифмическом масштабе (рисунок). Для качественного сравнения на рисунке представлена также кривая сходимости метода PPMDE из работы [2], где наименьшее число точек в расчетах составило  $N = 200$ . Порядок сходимости рассчитывался по известным погрешностям с помощью формулы

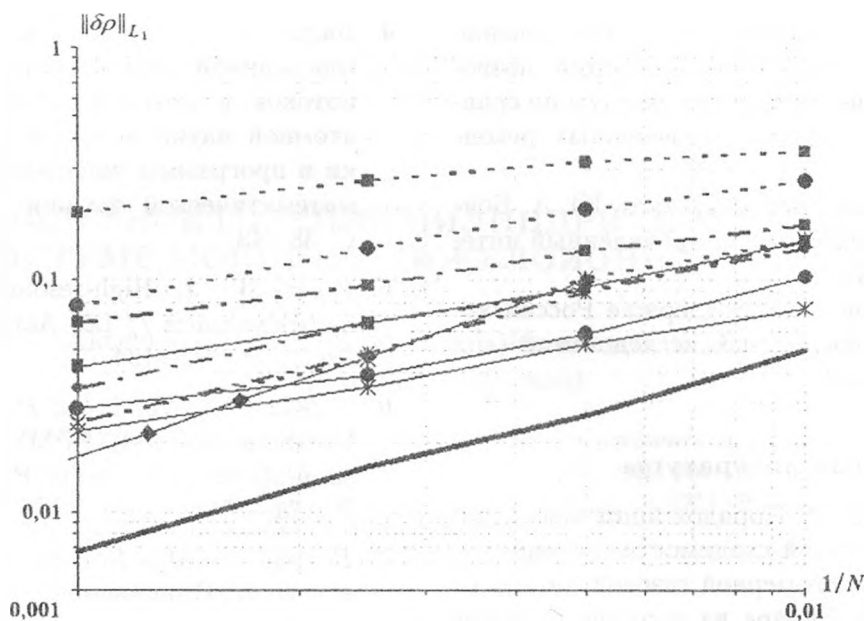
$$\alpha = \ln \frac{\|\delta\rho\|_{L_1}^{N_1}}{\|\delta\rho\|_{L_1}^{N_2}} / \ln \frac{N_2}{N_1},$$

где  $N_1 < N_2$ . Полученные значения порядков сходимости на каждом интервале представлены в табл. 2.

Таблица 1

Интегральная погрешность плотности в норме  $L_1$  для разностных схем методики [3] на момент времени  $t = 0,038$

$N$	PCM	PLM	PPM	PCM, лагр.- эйлер. сетка	PLM, лагр.- эйлер. сетка	PPM, лагр.- эйлер. сетка	PCM+МК	PLM+МК	PPM+МК	Лагранжев расчет
100	0,353	0,263	0,149	0,147	0,103	0,0760	0,188	0,137	0,147	0,0498
200	0,318	0,199	0,102	0,0933	0,0587	0,0527	0,134	0,0908	0,0881	0,0261
400	0,264	0,136	0,0458	0,0651	0,0389	0,0347	0,0915	0,0656	0,0486	0,0156
1 000	0,193	0,0770	0,0243	0,0425	0,0278	0,0225	0,0610	0,0340	0,0242	0,00672



Расчетные зависимости интегральной погрешности плотности в сеточной норме  $L_1$  от счетной сетки:  $\dots \blacksquare \dots$  — PCM;  $\text{---} \blacksquare \text{---}$  — PCM, лагранжево-эйлерова сетка;  $\text{-} \blacksquare \text{-}$  — PCM+МК;  $\dots \bullet \dots$  — PLM;  $\text{---} \bullet \text{---}$  — PLM, лагранжево-эйлерова сетка;  $\text{-} \bullet \text{-}$  — PLM+МК;  $\dots \times \dots$  — PPM;  $\text{---} \times \text{---}$  — PPM, лагранжево-эйлерова сетка;  $\text{-} \times \text{-}$  — PPM+МК;  $\text{---} \blacklozenge \text{---}$  — PPMDE [2];  $\text{---}$  — лагранжев расчет

Таблица 2

Порядок сходимости для разностных схем методики [3]

$N$	PCM	PLM	PPM	PCM, лагр.- эйлер. сетка	PLM, лагр.- эйлер. сетка	PPM, лагр.- эйлер. сетка	PCM+МК	PLM+МК	PPM+МК	Лагранжев расчет
100 ÷ 200	0,15	0,40	0,55	0,66	0,81	0,53	0,49	0,59	0,74	0,93
200 ÷ 400	0,27	0,55	1,16	0,52	0,59	0,60	0,55	0,47	0,86	0,74
400 ÷ 1000	0,34	0,62	0,69	0,47	0,37	0,47	0,44	0,72	0,76	0,92
Среднее значение	0,25	0,52	0,80	0,55	0,59	0,53	0,49	0,59	0,79	0,86

Как видно из результатов расчетов, аппроксимация кинетической энергии со вторым порядком точности обеспечивает правильную сходимость для всех исследуемых разностных схем. Ошибка зависит от порядка аппроксимации схемы и уменьшается при измельчении счетной сетки. Из всех представленных схем она наименьшая у PPM.

Использование в данных расчетах лагранжево-эйлеровой сетки привело к существенному уменьшению интегральной ошибки плотности для всех трех реконструкций. Это объясняется тем, что на область непосредственного взаимодействия УВ приходится более подробная сетка, обеспечивающая учет особенностей процес-

сов взаимодействия с хорошей точностью. В данной серии расчетов средние порядки сходимости для всех трех реконструкций приблизительно одинаковы и составляют  $\sim 0,53 \div 0,59$ .

Применение донорно-акцепторного алгоритма расчета смешанных ячеек совместно с различными реконструкциями также привело к улучшению результатов, но не настолько, насколько в случае с использованием лагранжево-эйлеровой счетной сетки.

Для расчетов на эйлеровой сетке наибольший средний порядок сходимости получен для кусочно-параболического метода,  $\alpha_{PPM}^{ср} = 0,80$ . На отрезке 200 ÷ 400 точек для метода PPM зафиксирован порядок сходимости, равный 1.

Из табл. 1 и 2 следует, что использование кусочно-параболической реконструкции позволяет получать более точные результаты по сравнению с другими видами приведенных реконструкций.

Авторы выражают благодарность Ю. А. Бондаренко за сотрудничество и проявленный интерес к данной работе.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05-01-00083).

### Список литературы

1. Бондаренко Ю. А. Порядок аппроксимации, порядок численной сходимости и экономичность счета многомерной газовой динамики в переменных Эйлера на примере расчетов на сходимость задачи "Blast Waves" // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2004. Вып. 4. С. 51–61.
2. Woodward P. R., Colella Ph. The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks // J. Comp. Phys. 1984. Vol. 54. P. 115–174.
3. Бахрах С. М., Спиридонов В. Ф., Шанин А. А. Метод расчета гидродинамических течений неоднородной среды в лагранжево-эйлеровых переменных // Докл. АН СССР. 1984. Т. 278, № 4. С. 829–833.
4. Бахрах С. М., Спиридонов В. Ф. Схема согласованной аппроксимации конвективных потоков в методике ЛЭГАК // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики. 1988. Вып. 4. С. 38–43.
5. Rider W. J. High-resolution methods for hydrodynamics // Los Alamos Science. 2003. No 28. P. 132–134.
6. Colella Ph., Woodward P. R. The Piecewise Parabolic Method (PPM) for gas-dynamical simulations // J. Comp. Phys. 1984. Vol. 54. P. 174–201.
7. Бахрах С. М., Безрукова И. Ю., Проневич С. Н. Применение кусочно-параболического метода для счета конвективных потоков на лагранжево-эйлеровой сетке // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2004. Вып. 1. С. 3–11.
8. Бахрах С. М., Спиридонов В. Ф. Метод концентраций расчета нестационарных течений сплошной среды // Там же. 1999. Вып. 4. С. 32–36.

Статья поступила в редакцию 20.10.04.