

УДК 519.6

## ТУРБУЛЕНТНОЕ ПЕРЕМЕШИВАНИЕ ДВУХ ПОТОКОВ РАЗНОЙ ПЛОТНОСТИ И СКОРОСТИ, ДВИЖУЩИХСЯ В ПОЛЕ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

Т. В. Заболотникова, В. Е. Неуважаев  
(РФЯЦ-ВНИИТФ)

Работа посвящена теоретическому изучению турбулентного перемешивания, возникающего в результате совместного действия сдвиговой и гравитационной неустойчивостей. На основании  $k\varepsilon$ -модели построена аналитическая формула для ширины области турбулентного перемешивания в зависимости от начальных параметров задачи.

### Введение

В работе [1] проведено изучение турбулентного перемешивания (ТП), возникающего в результате совместного действия сдвиговой и гравитационной (конвективной) неустойчивостей, для  $lv$ -модели. В настоящей работе такое изучение проводится на базе полуэмпирической  $k\varepsilon$ -модели.

В отдельности оба явления, сдвиговая и гравитационная неустойчивости, изучены достаточно подробно. В простейшем случае, когда имеются два несжимаемых потока, движущихся в направлении оси  $x$  с разными скоростями  $U_1$  и  $U_2$ , граница раздела между этими потоками в отсутствие вязкости турбулизуется, а ширина области перемешивания возрастает линейно по закону

$$L = a_u A_u x, \quad (1)$$

где  $x$  — расстояние, отсчитываемое от точки  $x = 0$ , при  $x > 0$  потоки соприкасаются (рис. 1);  $a_u$  — постоянная, определяемая из эксперимента;  $A_u = \frac{U_1 - U_2}{U_1 + U_2}$ ,  $U_1 > U_2$ .

Если же две несжимаемые жидкости находятся в поле силы тяжести  $g$  в неустойчивом положении, когда тяжелая жидкость с плотностью  $\rho_1$  "лежит" на легкой жидкости с плотностью  $\rho_2$ , то граница раздела разрушается и в дальнейшем ширина области перемешивания  $L$  развивается по квадратичному закону:

$$L = a_g A_g \left( \frac{x}{U_0} \right)^2, \quad (2)$$

где  $a_g$  — постоянная, определяемая из эксперимента;  $A = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}$  — число Атвуда;  $x = U_0 t$ ,  $U_0$  — характерная скорость потоков.

Законы (1) и (2) могут быть получены из общих соображений, вытекающих из анализа размерных постоянных, который приводит к установлению факта, что оба движения, если их рассматривать отдельно, носят автомодельный характер. В данной работе будет рассматриваться совместное действие, когда два разноплотных потока движутся друг относительно друга в поле силы тяжести  $g$ , направленном перпендикулярно к разделяющей их границе. Целью проводимого исследования является установление закона развития области ТП. Ясно, что такое движение не будет автомодельным. Это сложное движение вначале приблизительно подчиняется линейному закону, описываемому формулой (1), а на больших расстояниях закон перемешивания будет квадратичным и определяется формулой (2).

Известны работы, в которых рассмотрена задача подобного рода. Здесь следует назвать экспериментальную работу [2]. Теоретические модели, которые учитывают оба вида неустойчивости,

конвективную и сдвиговую, рассматривались многими авторами. Например, это сделано в работе [3].

В работе [1] была получена формула для ширины области ТП на основании полуэмпирической  $lv$ -модели:

$$L = L_0 + \alpha_g g A \left( \frac{x}{U_0} \right)^2 + \frac{x}{U_0} \sqrt{4\alpha_g g A L_0 + \frac{1}{4} \alpha_u^2 (1 - A^2) (U_1 - U_2)^2}, \quad (3)$$

где  $U_0 = \frac{\rho_1 U_1 + \rho_2 U_2}{\rho_1 + \rho_2}$ ;  $L_0$  — начальная шероховатость.

Если поле силы тяжести отсутствует, то формула (3) переходит в формулу

$$L = L_0 + \alpha_u \sqrt{1 - A^2} \frac{A_u}{1 + A A_u} x. \quad (4)$$

Здесь  $A_u = \frac{U_1 - U_2}{U_1 + U_2}$ .

Если в (4) вместо  $x$  ввести новую переменную  $\bar{x} = \frac{(\rho_1 + \rho_2)(U_1 - U_2)}{\rho_1 U_1 + \rho_2 U_2} x = \frac{2A_u}{1 + A A_u} x$  (как это было сделано в [1]), то зависимость ширины перемешивания от числа Атвуда примет вид

$$L = L_0 + \frac{\alpha_u}{2} \sqrt{1 - A^2 \bar{x}}. \quad (5)$$

Случай, когда поле силы тяжести отсутствует, исследовался в [4, 5]. Полученная в [1] теоретическая зависимость удовлетворительно согласуется с результатами работы [4]. Из формулы (5) следует, что максимальная интенсивность перемешивания достигается при равноплотных потоках, т. е. при  $A = 0$ . Результаты сравнения показаны на рис. 2.

Целью настоящего исследования является построение формулы для ширины области ТП на основании  $k\varepsilon$ -модели и сравнение полученных результатов с результатами работы [1].

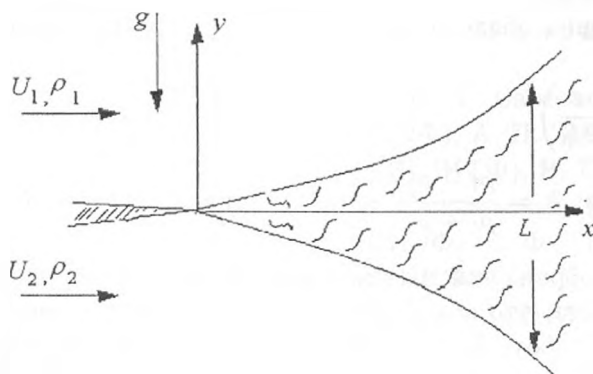


Рис. 1. Схема течения в плоскости  $(x, y)$

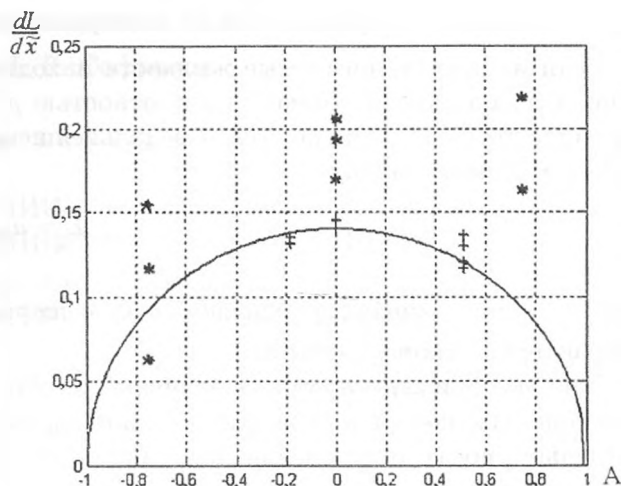


Рис. 2. Зависимость интенсивности перемешивания от числа Атвуда: \* — эксперименты Рожко; + — эксперименты Яковлевского; — — формула (5),  $\bar{x} = \frac{2A_u}{1 + A A_u} x$

### Уравнения полуэмпирической модели

В этом разделе будут получены основные уравнения полуэмпирической, так называемой  $k\varepsilon$ -модели, применяемые для описания сдвигового ТП, происходящего в поле силы тяжести.

В основе построения моделей лежит система уравнений Навье—Стокса. Она включает законы сохранения массы, импульса и внутренней энергии:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_m}{\partial x_m} &= 0; \\ \frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_m u_i}{\partial x_m} &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_m} (\mu \sigma_{im}); \\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_m E}{\partial x_m} &= -p \frac{\partial u_m}{\partial x_m} + \mu \sigma_{mn} \frac{\partial u_m}{\partial x_n}. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь  $\rho$ ,  $u(u_1, u_2, u_3)$ ,  $p$ ,  $E$  — плотность, вектор скорости, давление, внутренняя энергия соответственно;  $x_i$  — пространственные координаты (декартова система координат);  $\sigma_{ij}$  — тензор скорости сдвиговых деформаций,  $\sigma_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_m}{\partial x_m}$  (по повторяющимся индексам, как и в (6), подразумевается суммирование);  $\delta_{ij}$  — тензор второго порядка ( $\delta_{ij} = 0$ , если  $i \neq j$  и  $\delta_{ij} = 1$  в противном случае);  $\mu$  — коэффициент вязкости.

Так как рассматривается случай больших чисел Рейнольдса, то силы молекулярной вязкости не играют существенной роли. Таким образом, членами, отвечающими за молекулярную вязкость, в дальнейшем будем пренебрегать.

Далее, используя подход Рейнольдса, проводится осреднение газодинамических величин по турбулентным пульсациям. Каждая переменная представляется в виде суммы средней величины и случайной турбулентной пульсации:

$$u_i \rightarrow \bar{U}_i + U'_i; \quad \rho \rightarrow \bar{\rho} + \rho'; \quad p \rightarrow \bar{P} + P'; \quad E \rightarrow \bar{E} + E'.$$

Средние значения обозначены большими буквами (кроме плотности) с чертой, турбулентные флуктуации — большими буквами со штрихом.

Из двух первых осредненных уравнений системы (6) составляется уравнение переноса кинетической энергии. Приведем его вид после пренебрежения третьими и последующими корреляциями:

$$\frac{\partial \bar{\rho} v_i^2}{2 \partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{U}_m v_i^2}{2 \partial x_m} = \frac{\overline{U'_i \rho'}}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} - \bar{\rho} \overline{U'_i U'_m} \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial x_m} - \overline{U'_i \frac{\partial P'}{\partial x_i}}. \quad (7)$$

Здесь  $v_i^2 = \overline{U'_i U'_i}$ ,  $\tilde{U}_i = \bar{U}_i + \frac{\rho' U'_i}{\bar{\rho}}$  и по повторяющимся индексам проводится суммирование.

Уравнение (7) называют уравнением баланса турбулентной энергии. Левая часть его описывает перенос турбулентной энергии, два первых члена в правой части описывают генерацию при неоднородной средней скорости и наличии стратификации (сил плавучести), последний член в правой части описывает диссипацию турбулентности.

Уравнение баланса дополняется осредненными уравнениями исходной системы (6):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{U}_m}{\partial x_m} &= 0; \\ \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{U}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{U}_m \tilde{U}_i}{\partial x_m} + \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} &= -\frac{\partial \bar{\rho} \overline{U'_m U'_i}}{\partial x_m}; \\ \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{E}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{E} \tilde{U}_m}{\partial x_m} + \frac{\partial \bar{P} \tilde{U}_m}{\partial x_m} - \tilde{U}_m \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_m} &= -\frac{\partial \overline{U'_m P'}}{\partial x_m} + \frac{\partial}{\partial x_m} \left( \frac{\bar{P}}{\bar{\rho}} \overline{U'_m \rho'} \right) - \frac{\partial \bar{\rho} \overline{U'_m E'}}{\partial x_m} + \overline{U'_m \frac{\partial P'}{\partial x_m}}; \\ \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{c}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{U}_m \tilde{c}_i}{\partial x_m} &= -\frac{\partial \bar{\rho} \overline{U'_m c'_i}}{\partial x_m}. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь  $\tilde{E} = \bar{E} + \frac{\overline{\rho' E'}}{\rho}$ ;  $\tilde{c}_i = \bar{c}_i + \frac{\overline{\rho' c'_i}}{\rho}$ ,  $c_i = \frac{\rho_i}{\rho}$  — массовая концентрация.

В результате осреднения уравнений газовой динамики, кроме членов для средних величин, появляются дополнительные, содержащие корреляции пульсаций второго порядка  $\overline{U'_m U'_i}$ ,  $\overline{U'_m P}$ ,  $\overline{U'_m \rho'}$ ,  $\overline{U'_m \varepsilon'}$ . То есть система (7), (8) становится незамкнутой. Для замыкания системы требуется определить эти неизвестные. Обычно они, согласно гипотезе Прандтля, определяются через соответствующие потоки осредненного течения:

$$\overline{U'_m \rho'} = -D \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x_m};$$

$$\overline{U'_m E'} = -D \frac{\partial \tilde{E}}{\partial x_m};$$

$$\overline{U'_m c'_i} = -D \frac{\partial \tilde{c}_i}{\partial x_m};$$

$$\overline{U'_m U'_i} = \frac{1}{3} v_t^2 \delta_{mi} - \alpha_2 D \left[ \left( \frac{\partial \tilde{U}_m}{\partial x_i} + \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial x_m} \right) + \frac{2}{3} \delta_{mi} \left( \frac{\partial \ln \bar{\rho}}{\partial t} + \tilde{U}_m \frac{\partial \ln \bar{\rho}}{\partial x_m} \right) \right];$$

$$\overline{U'_m \frac{\partial P'}{\partial x_m}} = \nu \bar{\rho} \frac{v_t^3}{\alpha L},$$

где  $\delta_{mi}$  — символ Кронекера;  $D$  — коэффициент турбулентной диффузии;  $\alpha$ ,  $\alpha_2$ ,  $\nu$  — эмпирические постоянные.

Положим  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ ; значки осреднения опустим. Ограничимся случаем несжимаемых жидкостей и стационарным случаем. Тогда система уравнений (7), (8) примет вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \rho U + \frac{\partial}{\partial y} \rho V = 0; \tag{9}$$

$$U \frac{\partial \ln \rho}{\partial x} + V \frac{\partial \ln \rho}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( D \frac{\partial \ln \rho}{\partial y} \right); \tag{10}$$

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = \alpha_2 \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left( D \rho \frac{\partial U}{\partial y} \right); \tag{11}$$

$$U \frac{\partial \rho k}{\partial x} + V \frac{\partial \rho k}{\partial y} = D \frac{\partial \rho}{\partial y} g + \alpha_2 \rho D \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 - \nu \rho \frac{v_t^3}{\alpha L}. \tag{12}$$

Здесь  $g = -\frac{\partial P}{\rho \partial y}$ ;  $k = \frac{v_t^2}{2}$ ;  $U_1 = U$ ;  $U_2 = V$ .

В рамках  $k\varepsilon$ -модели диссипативный член (третий в правой части уравнения (12)) объявляется неизвестной функцией  $\varepsilon$  и для  $\rho\varepsilon$  по аналогии с уравнением баланса для кинетической энергии турбулентности составляется уравнение баланса [6]. В принятых выше обозначениях оно будет иметь вид

$$U \frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial x} + V \frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial y} = C_\mu C_{\varepsilon 1} k \frac{\partial \rho}{\partial y} g + C_\mu C_{\varepsilon 1} \alpha_2 \rho k \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 - C_{\varepsilon 2} \rho \frac{\varepsilon^2}{k}; \tag{13}$$

$$D = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}. \tag{14}$$

Здесь  $C_\mu$ ,  $C_{\varepsilon 1}$ ,  $C_{\varepsilon 2}$ ,  $\alpha_2$  — постоянные  $k\varepsilon$ -модели.

Таким образом, для описания ТП двух потоков соответственно с плотностями  $\rho_1$  и  $\rho_2$  и скоростями  $U_1$  и  $U_2$ , находящихся в поле силы тяжести  $g$ , перпендикулярном направлению движения, получена замкнутая система (9)–(14). Эта система должна решаться в переменных  $x$ ,  $y$  (см. рис. 1). Ее решение может быть найдено численно. Однако, сделав некоторые допущения, найдем аналитическое решение сформулированной задачи.

### Приближенное интегрирование

Основная идея проводимого упрощения системы (9)–(14) состоит в предположении, что кинетическая энергия турбулентности  $k$  и скорость диссипации  $\varepsilon$  в направлении  $y$  постоянны. В таком предположении коэффициент диффузии  $D$  будет функцией только переменной  $x$ .

Следующее допущение относится к определению функции  $V$ . Положив  $U = V$ , найдем, что

$$V = -D \frac{\partial \ln \rho}{\partial y}.$$

Будем считать, что это решение справедливо и при  $U \neq V$ . Далее в уравнениях (10)–(13) скорость  $U$  перед производными положим постоянной:

$$U = U_0, \quad U_0 = \frac{\rho_1 U_1 + \rho_2 U_2}{\rho_1 + \rho_2}.$$

Этот способ вычисления  $U_0$  предложен в работе [4] и получен из закона сохранения массы. Тогда уравнения (10), (11) примут следующий вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2}; \quad (15)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} - (1 + \alpha_2) \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial \ln \rho}{\partial y} = \alpha_2 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}; \quad (16)$$

$$U_0 \partial \tau = D \partial x. \quad (17)$$

Начальные условия:  $\rho(0, y) = \begin{cases} \rho_1, & y > 0; \\ \rho_2, & y < 0; \end{cases} \quad U(0, y) = \begin{cases} U_1, & y > 0; \\ U_2, & y < 0 \end{cases}$ . Ускорение  $g$  полагаем постоянным.

Уравнение баланса для кинетической энергии турбулентности и уравнение баланса для скорости диссипации будут иметь вид

$$\frac{\partial \rho k}{\partial \tau} = g \frac{\partial \rho}{\partial y} + \alpha_2 \rho \frac{\rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + \rho_2)^2} \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 - \frac{\rho \varepsilon}{D}; \quad (18)$$

$$\frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial \tau} = C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} g \frac{\partial \rho}{\partial y} + C_{\varepsilon 1} \alpha_2 \rho \frac{\rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + \rho_2)^2} \frac{\varepsilon}{k} \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 - C_{\varepsilon 2} \frac{\rho \varepsilon^2}{k D}. \quad (19)$$

Здесь следует отметить появление в правой части уравнений (18) и (19) множителя  $\frac{\rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + \rho_2)^2}$ . Так же, как в [7] и [1], значения источниковых членов (первый и второй члены в правой части уравнений (12) и (13)) связаны с инкрементом, характеризующим развитие малых начальных возмущений с волновым числом  $K$ . Как известно [8], при отсутствии вязкости этот инкремент имеет вид

$$\omega = K \frac{\rho_1 U_1 + \rho_2 U_2}{\rho_1 + \rho_2} \pm \sqrt{\frac{g(\rho_1 - \rho_2)K}{\rho_1 + \rho_2} - \frac{\rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + \rho_2)^2} K^2 (U_1 - U_2)^2}.$$

Введение таким способом источникового члена является существенным усовершенствованием модели.

Решение уравнения (15) при заданных начальных условиях есть

$$\rho = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} + \frac{\rho_1 - \rho_2}{2} \Phi \left( \frac{y}{2\sqrt{\tau}} \right),$$

где  $\Phi(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-z^2} dz$  — интеграл вероятности,  $\eta = \frac{y}{2\sqrt{\tau}}$ .

Уравнения (18) и (19) проинтегрируем в направлении  $y$  и проведем осреднение по области ТП  $L \in [-L_2; L_1]$ .

Хотя известно из экспериментов и расчетов, что ТП протекает несимметрично — интенсивность перемешивания в сторону легкого вещества больше интенсивности перемешивания в сторону тяжелого, будем искать решение в предположении, что перемешивание протекает симметрично, т. е.  $L_2 = L_1$ . Ширину области ТП будем определять эффективно, а именно, интегральным способом, основанным на законе сохранения перемешанной массы:

$$L = 2 \left( \int_{-\infty}^0 \frac{f_1 dy}{f_1(0)} + \int_0^{\infty} \frac{f_2 dy}{f_2(0)} \right),$$

где  $f_1$  и  $f_2$  — объемные концентрации,  $f_1 = \frac{\rho - \rho_2}{\rho_1 - \rho_2}$ ,  $f_2 = \frac{\rho_1 - \rho}{\rho_1 - \rho_2}$ . Тогда  $L = 4\eta_1\sqrt{\tau}$ , где  $\eta_1 = \int_0^{\infty} (1 - \Phi(\eta)) d\eta = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$ .

В результате осреднения (18) и (19) по области перемешивания получим

$$\frac{d\bar{k}}{d\tau} = \frac{\bar{g}A\Phi(\eta_1)}{2\eta_1\sqrt{\tau}} + B_0\alpha_2 \frac{\rho_1\rho_2}{(\rho_1 + \rho_2)^2} \overline{\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2} - \frac{1}{2} \frac{\bar{k}}{\tau} - \frac{\bar{\varepsilon}^2}{C_\mu \bar{k}^2}; \quad (20)$$

$$\frac{d\bar{\varepsilon}}{d\tau} = C_{\varepsilon 1} \frac{\bar{g}A\Phi(\eta_1)}{2\eta_1\sqrt{\tau}} \frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{k}} + C_{\varepsilon 1}\alpha_2 B_0 \frac{\rho_1\rho_2}{(\rho_1 + \rho_2)^2} \overline{\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2} \frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{k}} - \frac{1}{2} \frac{\bar{\varepsilon}}{\tau} - C_{\varepsilon 2} \frac{\bar{\varepsilon}^3}{C_\mu \bar{k}^3}. \quad (21)$$

При выводе (20) и (21) были использованы следующие приближенные вычисления:

- 1)  $\int_{|y| \leq L/2} \rho k dy = \bar{k} \left( \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} L \right);$
- 2)  $\int_{|y| \leq L/2} g \frac{\partial \rho}{\partial y} dy = \bar{g} (\rho_1 - \rho_2) \Phi(\eta_1);$
- 3)  $\int_{|y| \leq L/2} \rho \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 dy = B_0 \overline{\left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2} \left( \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} L \right);$
- 4)  $\int_{|y| \leq L/2} \rho \frac{\varepsilon}{D} dy = \frac{\bar{\varepsilon}^2}{C_\mu \bar{k}^2} \left( \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} L \right);$
- 5)  $\int_{|y| \leq L/2} \rho \varepsilon dy = \bar{\varepsilon} \left( \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} L \right);$
- 6)  $\int_{|y| \leq L/2} \frac{\varepsilon}{k} g \frac{\partial \rho}{\partial y} dy = \bar{g} \frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{k}} (\rho_1 - \rho_2) \Phi(\eta_1);$
- 7)  $\int_{|y| \leq L/2} \frac{\varepsilon}{k} \rho \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 dy = B_0 \overline{\left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2} \frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{k}} \left( \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} L \right);$
- 8)  $\int_{|y| \leq L/2} \rho \frac{\varepsilon^2}{kD} dy = \frac{\bar{\varepsilon}^3}{C_\mu \bar{k}^3} \left( \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} L \right).$

При вычислении производной  $\frac{\partial U}{\partial y}$  воспользуемся решением для  $U$ :

$$U = \frac{U_1 + U_2}{2} + \frac{U_1 - U_2}{2} \Phi \left( \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} \frac{y}{2\sqrt{\tau}} \right).$$

Оно получается, если в (16) пренебречь вторым членом в левой части уравнения. Это приближение верно при малом градиенте плотности. Таким образом,

$$\overline{\left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2} = \frac{1}{\alpha_2} \frac{(U_1 - U_2)^2}{16\tau}.$$

Отметим, что постоянная  $B_0$  возникла при осреднении (18) и (19) второго члена в правой части.

Подставив последнее выражение в уравнения (20) и (21), получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\bar{k}}{d\tau} = -\frac{1}{2} \frac{\bar{k}}{\tau} - \frac{\bar{\varepsilon}^2}{C_\mu \bar{k}^2} + \frac{Q_0}{\tau} + \frac{Q_1}{\sqrt{\tau}}; \quad (22)$$

$$\frac{d\bar{\varepsilon}}{d\tau} = -\frac{1}{2} \frac{\bar{\varepsilon}}{\tau} - C_{\varepsilon 2} \frac{\bar{\varepsilon}^3}{C_\mu \bar{k}^3} + C_{\varepsilon 1} \frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{k}} \left( \frac{Q_0}{\tau} + \frac{Q_1}{\sqrt{\tau}} \right), \quad (23)$$

где  $Q_0 = B_0 \frac{(1 - A^2)(U_1 - U_2)^2}{64}$ ;  $Q_1 = \frac{\bar{g}A\Phi(\eta_1)}{2\eta_1}$ .

Здесь согласно (17)  $\frac{d\tau}{dx} = \frac{C_\mu \bar{k}^2}{U_0 \bar{\varepsilon}}$ . Значение  $L$  с переменной  $\tau$  связано соотношением  $L = 4\eta_1 \sqrt{\tau}$ . В дальнейшем знак осреднения ( $\bar{\quad}$ ) будем опускать.

### Свойства решений системы (22), (23) при постоянном ускорении

Исследуем свойства решений системы уравнений (22), (23). Рассмотрим случай, когда  $g = \text{const}$  ( $Q_1 = \text{const}$ ).

Имеем систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dk}{d\tau} = -\frac{1}{2} \frac{k}{\tau} - \frac{\varepsilon^2}{C_\mu k^2} + \frac{Q_0}{\tau} + \frac{Q_1}{\sqrt{\tau}}; \quad (24)$$

$$\frac{d\varepsilon}{d\tau} = -\frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{\tau} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^3}{C_\mu k^3} + C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \left( \frac{Q_0}{\tau} + \frac{Q_1}{\sqrt{\tau}} \right), \quad (25)$$

где  $Q_0 = B_0 \frac{(1 - A^2)(U_1 - U_2)^2}{64}$ ;  $Q_1 = \frac{gA\Phi(\eta_1)}{2\eta_1}$ ;  $C_\mu, C_{\varepsilon 2}, C_{\varepsilon 1}, B_0$  — эмпирические постоянные;

$A = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}$  — число Атвуда;  $\rho_1, \rho_2, U_1, U_2$  — начальные плотности и скорости потоков,  $\eta_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$ ;

$\Phi(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-z^2} dz$  — интеграл вероятности.

Начальные условия:  $k(\tau = 0) = 0$  и  $\varepsilon(\tau = 0) = 0$ .

Разделив уравнение (25) на уравнение (24), получим

$$\frac{d\varepsilon}{dk} = \frac{\varepsilon}{k} \frac{k + 2C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{C_\mu k^2} \tau - 2C_{\varepsilon 1} (Q_0 + Q_1 \sqrt{\tau})}{k + 2 \frac{\varepsilon^2}{C_\mu k^2} \tau - 2(Q_0 + Q_1 \sqrt{\tau})}.$$

В случае, если  $\tau = \tau_0 \neq 0$ , получим следующее уравнение:

$$\frac{d\varepsilon}{dk} = \frac{\varepsilon}{k} \frac{k + 2C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{C_\mu k^2} \tau_0 - 2C_{\varepsilon 1} (Q_0 + Q_1 \sqrt{\tau_0})}{k + 2 \frac{\varepsilon^2}{C_\mu k^2} \tau_0 - 2(Q_0 + Q_1 \sqrt{\tau_0})}. \quad (26)$$

Начальное условие:  $\varepsilon(k = 0) = 0$ .

Решение этого уравнения ищем в виде  $\varepsilon = \sqrt{C_\mu} C_0 k^{3/2}$ , где  $C_0$  — постоянная, которую будем искать таким образом, чтобы искомое решение удовлетворяло последнему уравнению. Подставив в обе части уравнения выражение для  $\varepsilon$ , получим

$$\frac{3}{2} \sqrt{C_\mu} C_0 k^{1/2} = \sqrt{C_\mu} C_0 k^{1/2} \frac{k(1 + 2C_{\varepsilon 2} \tau_0 C_0^2) - 2C_{\varepsilon 1} (Q_0 + Q_1 \sqrt{\tau_0})}{k(1 + 2\tau_0 C_0^2) - 2(Q_0 + Q_1 \sqrt{\tau_0})},$$

или

$$k \left[ \frac{1}{2} + \tau_0 C_0^2 (3 - 2C_{\varepsilon 2}) \right] + (2C_{\varepsilon 1} - 3) (Q_0 + Q_1 \sqrt{\tau_0}) = 0.$$

Чтобы полученное равенство выполнялось тождественно, необходимо, чтобы  $\frac{1}{2} + \tau_0 C_0^2 (3 - 2C_{\varepsilon 2}) = 0$  и  $(2C_{\varepsilon 1} - 3) (Q_0 + Q_1 \sqrt{\tau_0}) = 0$ . Отсюда получаем  $C_0^2 = \frac{3}{2\tau_0 (2C_{\varepsilon 2} - 3)}$  при условии, что

$$C_{\varepsilon 1} = 1,5 \tag{27}$$

(получается из второго равенства, так как  $Q_0 + Q_1 \sqrt{\tau_0} \neq 0$ ). Как замечено в [9], при  $C_{\varepsilon 1} = 1,5$  уравнения (24) и (25) заметно упрощаются благодаря наличию интеграла, в принятых обозначениях имеющего вид

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{3C_{\mu}}{2\tau_0 (2C_{\varepsilon 2} - 3)}} k^{3/2}. \tag{28}$$

Построим фазовый портрет интегральных кривых уравнения (26). Их поведение на плоскости  $(k, \varepsilon)$  изображено на рис. 3.

Система (24), (25) имеет три особые точки:  $(0,0)$ ;  $(2(Q_0 + Q_1 \sqrt{\tau_0}), 0)$ ;  $\left( 2 \frac{C_{\varepsilon 2} - C_{\varepsilon 1}}{C_{\varepsilon 2} - 1} (Q_0 + Q_1 \sqrt{\tau_0}), 2\sqrt{C_{\mu}} \sqrt{\frac{(C_{\varepsilon 1} - 1)(C_{\varepsilon 2} - C_{\varepsilon 1})^2}{(C_{\varepsilon 2} - 1)^3}} \frac{1}{\sqrt{\tau_0}} (Q_0 + Q_1 \sqrt{\tau_0})^{3/2} \right)$ . На рис. 3 эти точки обозначены как I, II, III соответственно. Особая точка III является узлом, интегральные кривые выходят из этой точки. Особые точки I и II — типа седло. В точках  $\varepsilon = \frac{\sqrt{C_{\mu}}}{\sqrt{2}\sqrt{\tau_0}} k \sqrt{2(Q_0 + Q_1 \sqrt{\tau_0})} - k \frac{d\varepsilon}{dk} = \infty$  (на рис. 3 линия  $++$ ). В точках  $\varepsilon = \frac{\sqrt{C_{\mu}}}{\sqrt{2C_{\varepsilon 2}\sqrt{\tau_0}}} k \sqrt{2C_{\varepsilon 1}(Q_0 + Q_1 \sqrt{\tau_0})} - k \frac{d\varepsilon}{dk} = 0$  (на рис. 3 линия

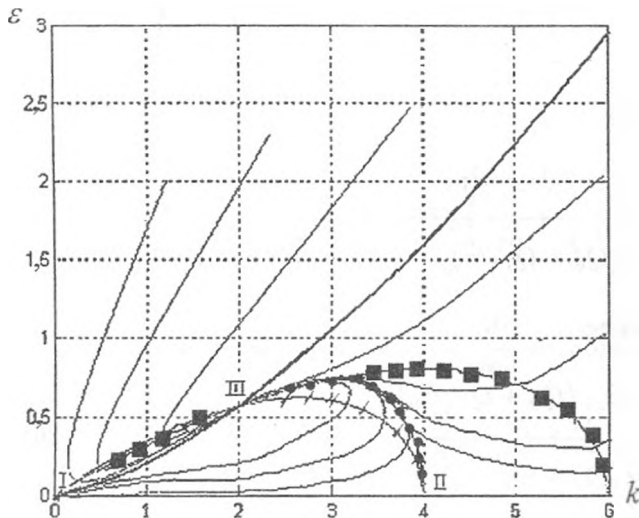


Рис. 3. Поведение интегральных кривых в плоскости  $(k, \varepsilon)$  системы (24), (25): — — аналитическое решение (28), исходящее из точки  $(0,0)$ ;  $-\cdot-\cdot-$  — численное решение, исходящее из точки  $(2(Q_0 + Q_1 \sqrt{\tau_0}), 0)$ ;  $++$  —  $\frac{d\varepsilon}{dk} = \infty$ ;  $-\blacksquare-\blacksquare-$  —  $\frac{d\varepsilon}{dk} = 0$

$-\blacksquare-\blacksquare-$ ). Также было найдено численное решение уравнения (26) с начальным условием  $\varepsilon(k = 2(Q_0 + Q_1 \sqrt{\tau_0})) = 0$  (на рис. 3 линия  $-\cdot-\cdot-$ ).

Полагаем, что в окрестности  $\tau = \tau_0$   $\varepsilon = \sqrt{\frac{3C_{\mu}}{2\tau(2C_{\varepsilon 2} - 3)}} k^{3/2}$ . Это соответствует следующему решению системы (24), (25):

$$k = \frac{2C_{\varepsilon 2} - 3}{4C_{\varepsilon 2} - 3} \left( \frac{4C_{\varepsilon 2} - 3}{2C_{\varepsilon 2}} Q_0 + Q_1 \sqrt{\tau} \right);$$

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{3C_{\mu}}{4C_{\varepsilon 2} - 3}} \frac{2(2C_{\varepsilon 2} - 3)}{4C_{\varepsilon 2} - 3} \left( \frac{4C_{\varepsilon 2} - 3}{2C_{\varepsilon 2}} Q_0 + Q_1 \sqrt{\tau} \right)^{3/2}. \tag{29}$$

Воспользовавшись решением (29) системы (24), (25), решим уравнение  $\frac{d\tau}{dx} = \frac{C_{\mu} k^2}{U_0 \varepsilon}$ . Найдем  $\tau$  в зависимости от  $x$ , а затем (так как ширина области перемешивания  $L$  с переменной  $\tau$  связана соотношением  $L = 4\eta_1 \sqrt{\tau}$ ) найдем  $L$ . Начальное условие:  $\tau(x = 0) = \tau_0$  либо  $L(x = 0) = L_0$ . После интегрирования получим следующее выражение для  $\tau$ :



$$\sqrt{\tau} = \sqrt{\tau_0} + \frac{Q_1}{12} \cdot \frac{(2C_{\varepsilon 2} - 3)^2}{4C_{\varepsilon 2} - 3} C_{\mu} \left( \frac{x}{U_0} \right)^2 + \sqrt{\frac{C_{\mu} (2C_{\varepsilon 2} - 3)^2 Q_0}{6C_{\varepsilon 2}} + \frac{C_{\mu} (2C_{\varepsilon 2} - 3)^2 Q_1 \sqrt{\tau_0}}{3(4C_{\varepsilon 2} - 3)} \frac{x}{U_0}},$$

откуда формула для вычисления ширины области перемешивания будет следующая:

$$L = L_0 + \frac{\eta_1 Q_1}{3} \cdot \frac{(2C_{\varepsilon 2} - 3)^2}{4C_{\varepsilon 2} - 3} C_{\mu} \left( \frac{x}{U_0} \right)^2 + \sqrt{\frac{8C_{\mu} (2C_{\varepsilon 2} - 3)^2 \eta_1^2 Q_0}{3C_{\varepsilon 2}} + \frac{4\eta_1 C_{\mu} (2C_{\varepsilon 2} - 3)^2 Q_1 L_0}{3(4C_{\varepsilon 2} - 3)} \frac{x}{U_0}}.$$

Подставив в последнюю формулу значения постоянных  $Q_0 = B_0 \frac{(1 - A^2)(U_1 - U_2)^2}{64}$  и  $Q_1 = \frac{gA\Phi(\eta_1)}{2\eta_1}$ , получим

$$L = L_0 + \frac{(2C_{\varepsilon 2} - 3)^2}{6(4C_{\varepsilon 2} - 3)} C_{\mu} g A \Phi(\eta_1) \left( \frac{x}{U_0} \right)^2 + \sqrt{\frac{B_0 C_{\mu} (2C_{\varepsilon 2} - 3)^2 (1 - A^2) (U_1 - U_2)^2 \eta_1^2}{24C_{\varepsilon 2}} + \frac{2C_{\mu} g A \Phi(\eta_1) (2C_{\varepsilon 2} - 3)^2 L_0}{3(4C_{\varepsilon 2} - 3)} \frac{x}{U_0}}. \quad (30)$$

Осталось определить значения постоянных  $C_{\mu}$ ,  $C_{\varepsilon 2}$ ,  $C_{\varepsilon 1}$ ,  $B_0$ . Значение  $C_{\varepsilon 1} = 1,5$  было определено выше в (27).

### О выборе постоянных модели

В результате приближенного интегрирования уравнений  $k\varepsilon$ -модели удалось получить формулу для ширины области ТП (30).

В случае, когда ускорение  $g$  равно нулю, имеем

$$L = L_0 + \frac{(2C_{\varepsilon 2} - 3)(U_1 - U_2)\eta_1}{U_0} \sqrt{\frac{B_0 C_{\mu} (1 - A^2)}{24C_{\varepsilon 2}}} x. \quad (31)$$

В формуле (31) перейдем к новой переменной  $\bar{x} = \frac{(\rho_1 + \rho_2)(U_1 - U_2)}{\rho_1 U_1 + \rho_2 U_2} x = \frac{2A_u}{1 + AA_u} x$ , тогда

$$L = L_0 + \eta_1 (2C_{\varepsilon 2} - 3) \sqrt{\frac{B_0 C_{\mu} (1 - A^2)}{24C_{\varepsilon 2}}} \bar{x}.$$

Отсюда

$$\frac{dL}{d\bar{x}} = \eta_1 (2C_{\varepsilon 2} - 3) \sqrt{\frac{B_0 C_{\mu} (1 - A^2)}{24C_{\varepsilon 2}}}. \quad (32)$$

Здесь  $\bar{x} = \frac{(\rho_1 + \rho_2)(U_1 - U_2)}{\rho_1 U_1 + \rho_2 U_2} x = \frac{2A_u}{1 + AA_u} x$ ;  $\eta_1 = 2 \int_0^{\infty} (1 - \Phi(\eta)) d\eta = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$ .

На рис. 4 представлены значения  $\frac{dL}{d\bar{x}}$  в зависимости от числа Атвуда в сравнении с данными экспериментов [5] и результатами численных расчетов [3, 4, 10, 11]. Совпадения с экспериментами и расчетами можно достигнуть с помощью постоянной  $B_0$ .

При наборе постоянных  $C_{\varepsilon 2} = 2$ ;  $C_{\mu} = 0,18$  и  $B_0 = 0,7$  (на рис. 4 линия 1) получено согласие с результатами расчета [4]. Значения при  $A = -0,75$ , полученное по формуле (32) и полученное в [11], отличаются друг от друга на 0,005.

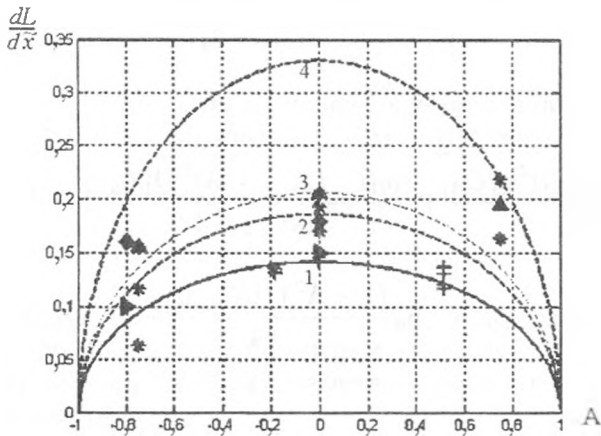


Рис. 4. Зависимость интенсивности перемешивания от числа Атвуда:  $\blacktriangle$  — результаты расчета [11];  $*$  — данные экспериментов [5];  $+$  — результаты расчета [4];  $\blacklozenge$  — расчет по двумерной методике ЭГАК [3];  $\blacktriangleright$  — расчет по трехмерной методике ТРЭК [10]; 1–4 — результаты расчета по формуле (32) при различных значениях  $B_0$ ,  $\bar{x} = \bar{x}$

При  $C_{\varepsilon 2} = 2$ ;  $C_{\mu} = 0,18$ ;  $B_0 = 3,8$  имеется совпадение значения, полученного по формуле при  $A = 0,75$ , со значением, полученным в [11]. Результаты расчета по формуле (32) при таком наборе постоянных представлены на рис. 4 линией 4. В этом случае нет согласия между формулой, данными экспериментов и численным расчетом.

На рис. 4 также представлены значения для наклона, полученные путем прямого численного моделирования по двумерной методике ЭГАК [3] и трехмерной методике ТРЭК [10]. Эти результаты согласуются с результатами [11].

Скорость изменения ширины области перемешивания слабо зависит от числа Атвуда.

При  $C_{\varepsilon 2} = 2$ ;  $C_{\mu} = 0,18$ ;  $B_0 = 0,7$  результаты, полученные по аналитической формуле (32), согласуются с данными [4] и расчетами [10] (см. рис. 4).

При  $C_{\varepsilon 2} = 2$ ;  $C_{\mu} = 0,18$ ;  $B_0 = 1,48$  или  $C_{\varepsilon 2} = 1,85$ ;  $C_{\mu} = 3,5$ ;  $B_0 = 0,13$  результаты, полученные по аналитической формуле, согласуются с данными экспериментов [5] и с расчетами [11] (см. рис. 4).

### Заключение

На основании полуэмпирической  $k\varepsilon$ -модели, описывающей ТП двух потоков разной плотности и скорости, построено приближенное решение, позволяющее определять закон развития ширины области ТП от исходных параметров задачи: числа Атвуда, числа  $A_u$ , ускорения  $g$  и начальной шероховатости  $L_0$ . При постоянном ускорении этот закон описывается формулой, сочетающей в себе квадратичный и линейный законы, что согласуется с результатами работы [1].

Если в случае, когда ускорение равно нулю, перейти к новой системе координат, связанной с движением центра масс,  $\bar{x} = \frac{2A_u}{1 + AA_u}x$ , то в этой системе координат интенсивность турбулентного перемешивания симметричным образом будет зависеть от числа Атвуда и достигнет своего максимального значения, когда потоки равноплотны, т. е.  $A = 0$ . Это согласуется с результатами расчетов [4].

В дальнейшем предполагается рассмотреть подобную задачу с учетом несимметрии ТП.

При  $C_{\varepsilon 2} = 2$ ;  $C_{\mu} = 0,18$  и  $B_0 = 1,21$  наклон, полученный по аналитической формуле (32) при  $A = 0$ , совпадает с результатом, полученным в [5]. Результаты расчета по формуле (32) при таком наборе постоянных представлены на рис. 4 линией 2. При  $A = -0,75$  отличие между данными эксперимента и значением, полученным по формуле (32) составляет 0,01, в случае  $A = 0,75$  — 0,04. При таких значениях постоянных формула удовлетворительно согласуется с экспериментом [5].

При  $C_{\varepsilon 2} = 2$ ;  $C_{\mu} = 0,18$ ;  $B_0 = 1,48$  либо  $C_{\varepsilon 2} = 1,85$ ;  $C_{\mu} = 3,5$  (такие значения для  $C_{\varepsilon 2}$  и  $C_{\mu}$  были предложены в [12]) и  $B_0 = 0,13$  наклон, полученный по формуле (32) при  $A = 0$ , совпадает с результатом расчетов [11], а также с данными эксперимента [5]. Результаты расчета по формуле (32) при таком наборе постоянных представлены на рис. 4 линией 3. Отличие между значением, полученным в [11], и значением, полученным по формуле (32), для  $A = -0,75$  составляет 0,02, а для  $A = 0,75$  — 0,028. При таком наборе постоянных значения наклона, полученные по аналитической формуле, удовлетворительно согласуются с данными эксперимента [5] для  $A \leq 0$ .

Список литературы

1. *Neuvazhaye V. E.* Turbulent mixing of two fluids moving in gravitational field / 6<sup>th</sup> Int. Work. on the Physics of Compressible Turbulent Mixing. Marseille, 1997. P. 362.
2. *Snider D. M., Andrews M. J.* Rayleigh-Taylor and shear driven mixing with an unstable thermal stratification // *Phys. Fluids*. 1994. Vol. 6(10). P. 3324–3334.
3. *Бахрах С. М., Жмайло В. А., Стаценко В. П., Янилкин Ю. В.* Численное моделирование турбулентного перемешивания в сдвиговых течениях // *Числ. методы мех. спл. среды*. 1983. Т. 14, № 2. С. 11–27.
4. *Яковлевский О. В.* К вопросу о толщине зоны турбулентного перемешивания на границе двух потоков газа разной скорости и плотности // *Изв. АН СССР*. 1958. № 10. С. 153–155.
5. *Brown G. L., Roshko A.* On density effects and large structure in turbulent mixing layers // *J. of Fluid Mechanics*. 1974. Vol. 64(4). P. 775–815.
6. *Харша П.* Модели переноса кинетической энергии // *Турбулентность. Принципы и применение*. М.: Мир, 1980. С. 207–261.
7. *Беленький С. З., Фрадкин Е.С.* Теория турбулентного перемешивания // *Труды ФИАН им. П. Н. Лебедева*. 1965. Т. 29. С. 207–238.
8. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. М.: Физматгиз. 1955. С. 439–444.
9. *Неуважаев В. Е., Яковлев В. Г.* Турбулентное перемешивание двух жидкостей при произвольном законе ускорения // *ПМТФ*. 2001. Т. 42, № 4. С. 11–20.
10. *Stadnik A. A., Statsenko V. P., Yanilkin Yu. V., Zhmailo V. A.* Direct numerical simulation of turbulent mixing in shear flows // *Laser and Particle Beams*. 1997. Vol. 15(1). P. 115–125.
11. *Еськов Н. С., Козловских А. С., Неуважаев Д. В.* Численное моделирование развитой сдвиговой турбулентности // *ПМТФ*. 2000. Вып. 1. С. 77–83.
12. *Неуважаев В. Е., Яковлев В. Г.* Расчет гравитационного перемешивания по  $k\epsilon$ -модели // *Вопросы атомной науки и техники. Сер. Теоретическая и прикладная физика*. 1998. Вып. 1. С. 28–36.

Статья поступила в редакцию 25.03.05.