

УДК 519.6

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА ФИЛЬТРАЦИИ КАЛМАНА ДЛЯ ОЦЕНКИ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА

В. М. Понятский  
(КБ приборостроения, г. Тула)

Рассматривается задача оценки параметров динамической модели летательного аппарата по телеметрическим данным. Оценка параметров модели летательного аппарата проводится методом фильтрации Калмана. Приводятся результаты оценки постоянной времени планера и рулевого привода.

### Постановка задачи

Анализ качества работы системы управления летательным аппаратом по результатам испытаний проводится на основании измеренных информационных сигналов. Исследуемым объектом является летательный аппарат, вращающийся по крену.

Рассматривается задача оценки характеристик летательного аппарата по сигналам со входа и выхода рулевого привода и по сигналам с выхода датчика перегрузок (рис. 1).

Дифференциальные уравнения движения управляемого летательного аппарата имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \vartheta'' + a_1\vartheta' + a_2\alpha &= a_3\delta_y; & \psi'' + a_1\psi' + a_2\beta &= -a_3\delta_z; \\ \Theta' &= a_4\alpha + a_5\delta_y - \frac{g}{V} \cos \Theta; & \varphi' &= a_4\beta - a_5\delta_z; \\ \alpha &= \vartheta - \Theta; & \beta &= \psi - \varphi; \\ Y' &= V(\Theta - \varepsilon_b) - D\varepsilon'_b; & Z' &= -V(\varphi - \varepsilon_r) + D\varepsilon'_r; \\ Y &= \int Y' dt; & Z &= \int Z' dt, \end{aligned}$$

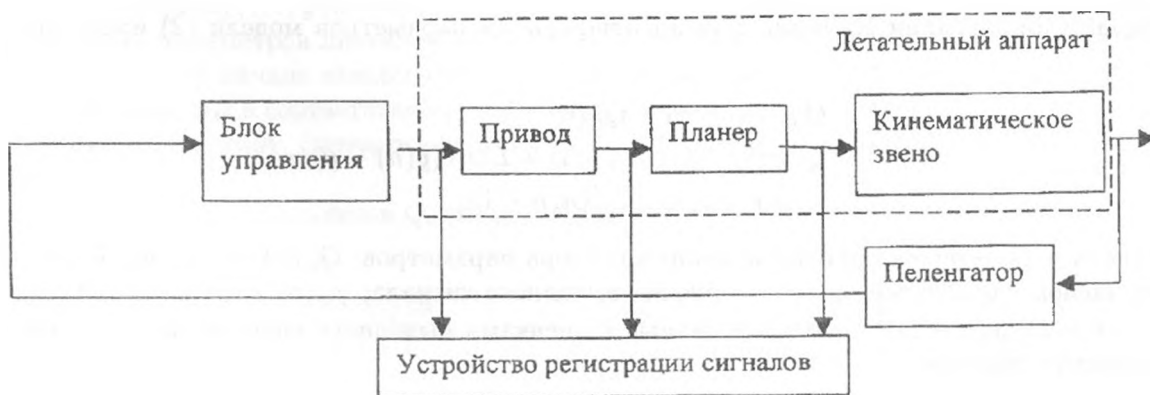


Рис. 1. Структурная схема регистрации данных летательного аппарата

где  $\vartheta, \psi$  — углы тангажа и рыскания;  $\Theta, \varphi$  — углы наклона траектории и курса;  $\alpha, \beta$  — углы атаки и скольжения;  $\delta_y, \delta_z$  — углы отклонения рулей в горизонтальной и вертикальной плоскостях;  $\varepsilon_b, \varepsilon_r$  — углы места и азимута линии визирования;  $Y, Z$  — координаты центра масс;  $V$  — скорость;  $D$  — дальность;  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  — динамические коэффициенты.

Рассмотрим передаточную функцию планера, принимая за выходные величины  $\Theta'$  и  $\varphi'$ , а за входные величины — углы отклонения  $\delta_y$  и  $\delta_z$  средств управления:

$$W_{\delta}^{\Theta'} = W_{\delta}^{\varphi'} = K \frac{\tau^2 p^2 + 2\xi_1 \tau p + 1}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1}, \quad (1)$$

где  $K = \frac{a_3 a_4 + a_2 a_5}{a_1 a_4 + a_2}$ ;  $T = \frac{1}{\sqrt{a_1 a_4 + a_2}}$ ;  $\xi = \frac{1}{2} (a_1 + a_4) T$ ;  $\tau = \sqrt{\frac{a_5}{a_3 a_4 + a_2 a_5}}$ ;  $\xi_1 = \frac{1}{2} a_1 \tau$ .

### Описание метода идентификации

Известные методы параметрической идентификации, такие как метод наименьших квадратов (МНК), фильтрация Калмана, подразумевают задание искомой структуры динамического объекта в виде разностного уравнения

$$y(n) + a_1 y(n-1) + \dots + a_{na} y(n-na) = b_0 u(n) + \dots + b_{nb} u(n-nb) + c_0 e(n) + \dots + c_{nc} e(n-nc),$$

где  $y(n)$  — выходной сигнал;  $u(n)$  — входной сигнал;  $e(n)$  — ошибка модели;  $a_1 \dots a_{na}, b_0 \dots b_{nb}, c_0 \dots c_{nc}$  — параметры модели.

Структура идентифицируемой модели (1) может быть задана следующим образом:

$$y(n) + a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2) = b_0 u(n) + b_1 u(n-1) + b_2 u(n-2), \quad (2)$$

где  $a_1 = \frac{2\xi T_d}{T} - 2$ ;  $a_2 = 1 + \frac{T_d^2}{T^2} - \frac{2\xi T_d}{T}$ ;  $b_0 = \frac{K\tau^2}{T^2}$ ;  $b_1 = \frac{2K\tau(\xi_1 T_d - \tau)}{T^2}$ ;  $b_2 = \frac{K(\tau^2 + T_d^2 - 2\xi_1 \tau T_d)}{T^2}$ ;  $T_d$  — время дискретизации.

Для идентификации параметров модели (2) с помощью алгоритма фильтрации Калмана вводится вектор данных (регрессионный вектор)  $\varphi(n) = (-y(n-1), -y(n-2), u(n), u(n-1), u(n-2))^T$  и вектор параметров  $Q(n) = (a_1, a_2, b_0, b_1, b_2)^T$ .

Тогда в качестве исходных данных для проектирования алгоритма идентификации используется входная модель (линейная регрессия) [1, 2]

$$\begin{aligned} Q(n+1) &= Q(n) + v(n); \\ y(n) &= \varphi^T(n) Q(n) + \omega(n), \end{aligned}$$

где  $v(n)$  — формирующий шум интенсивностью  $R1 = E v(n) v^T(n)$ ;  $\omega(n)$  — шумы измерения интенсивностью  $R2 = E \omega(n) \omega^T(n)$ .

Алгоритм фильтрации Калмана для идентификации параметров модели (2) имеет вид (рис. 2) [1, 2]

$$\begin{aligned} Q_o(n+1, n) &= Q_o(n); \\ Q_o(n) &= Q_o(n, n-1) + L(n) (y(n) - y_o(n)); \\ y_o(n) &= \varphi_o^T(n) Q_o(n, n-1), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $Q_o(n, n-1)$  — оценка прогнозирования вектора параметров;  $Q_o(n) = (a_{o1}, a_{o2}, b_{o0}, b_{o1}, b_{o2})^T$  — вектор оценок параметров;  $y_o(n)$  — оценка выходного сигнала;  $\varphi_o(n) = (-y_o(n-1), -y_o(n-2), u(n), u(n-1), u(n-2))^T$  — вектор данных с оценками выходного сигнала;  $L(n)$  — матрица коэффициентов фильтра:

$$\begin{aligned} P(n+1, n) &= P P(n) + R1(n); \\ L(n) &= P(n, n-1) \varphi_o(n) (\varphi_o^T(n) P(n, n-1) \varphi_o(n) + R2)^{-1}; \\ P P(n) &= P(n, n-1) - L(n) \varphi_o^T(n) P(n, n-1), \end{aligned} \quad (4)$$

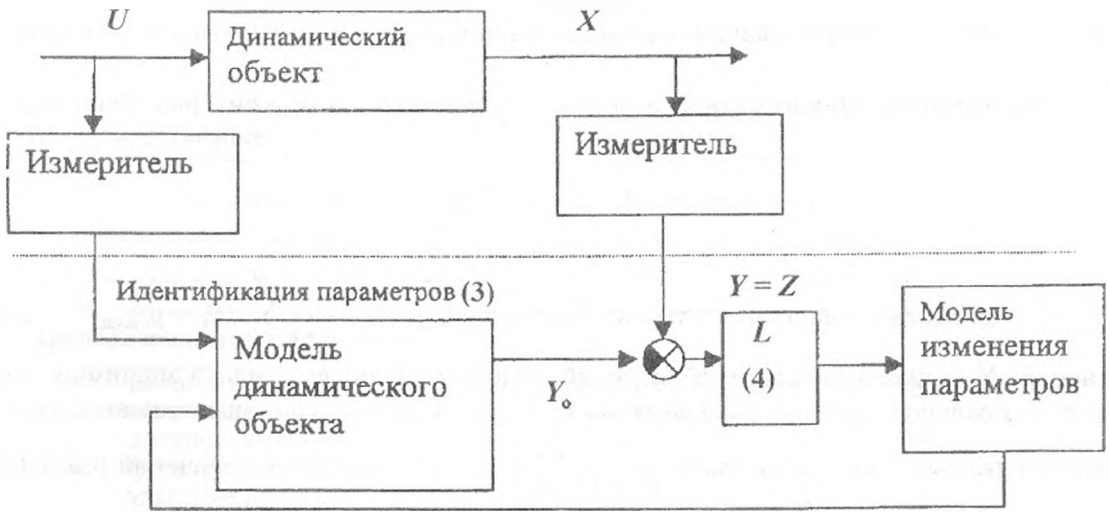


Рис. 2. Оценка параметров модели динамического объекта с помощью фильтрации Калмана

где  $P(n+1, n)$  — дисперсионная матрица ошибок прогнозирования оценки вектора параметров;  $PP(n)$  — дисперсионная матрица ошибок оценки вектора параметров.

$R1(n)$  вычисляется по следующей зависимости:

$$R1(n+1) = R1(n) + (v(n)v^T(n) - R1(n)) \tau(n), \quad (5)$$

где  $\tau(n)$  — коэффициент забывания предыдущих значений.

Расчет начальных значений  $Q_{ny}(n) = (a_{ny1}, a_{ny2}, b_{ny0}, b_{ny1}, b_{ny2})^T$  и  $R1_{ny}(n)$  проводится методом МНК:

$$\begin{aligned} R1_{ny} &= \sigma^2 (\Phi^T \Phi)^{-1}; \\ Q_{ny} &= R1_{ny} \Phi^T Y_m, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\Phi = \begin{pmatrix} -y(n-1) & -y(n-2) & u(n) & u(n-1) & u(n-2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -y(n+m-1) & -y(n+m-2) & u(n+m) & u(n+m-1) & u(n+m-2) \end{pmatrix}$  — матрица

наблюдений;  $Y_m = (y(n), \dots, y(n+m))^T$  — вектор выходного сигнала;  $\sigma$  — дисперсия шума.

Идентификация параметров линейной нестационарной модели (2) осуществляется на интервалах времени  $\Delta T_n = kT_d$ . В начале каждого интервала времени задаются начальные условия (6) и рассчитываются параметры в соответствии с (3)–(5). В конце каждого интервала времени получаются текущие оценки параметров. Затем осуществляется смещение интервала времени  $\Delta T_n$  на величину  $\Delta t_n \leq \Delta T_n$  [2].

После идентификации параметров  $Q_o(n)$  осуществляется переход к параметрам искомой передаточной функции (1):

$$\begin{aligned} K_0(n) &= \frac{b_{o0}(n) + b_{o1}(n) + b_{o2}(n)}{a_{o1}(n) + a_{o2}(n) + 1}; & T_0(n) &= \frac{T_d}{\sqrt{a_{o1}(n) + a_{o2}(n) + 1}}; \\ \xi_0(n) &= \frac{a_{o1}(n) + 2}{2\sqrt{a_{o1}(n) + a_{o2}(n) + 1}}; & \tau_0(n) &= T_d \sqrt{\frac{b_{o0}(n)}{b_{o0}(n) + b_{o1}(n) + b_{o2}(n)}}; \\ \xi_{o1}(n) &= \frac{b_{o1}(n) + 2b_{o0}(n)}{2\sqrt{b_{o0}(n)(b_{o0}(n) + b_{o1}(n) + b_{o2}(n))}}. \end{aligned}$$

## Оценка качества идентификации

Оценка качества идентификации осуществляется по критериям адекватности и критериям точности.

Проверка гипотезы об адекватности модели осуществляется по критерию Фишера:

$$F_{\text{расч}} = \frac{S_{\text{ад}}}{S_y},$$

где  $F_{\text{расч}}$  — расчетное значение критерия Фишера;  $S_{\text{ад}} = \frac{1}{N-m} \sum_{i=1}^N (y_i - y_{i \text{ мод}})^2$  — дисперсия адекватности;  $N$  — число дискретных значений выхода модели;  $m$  — число значимых параметров модели;  $y_i$  — реальное значение выхода объекта на  $i$ -м такте;  $y_{i \text{ мод}}$  — значение выхода объекта на  $i$ -м такте, рассчитанное по модели;  $S_y = \frac{1}{N-m} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2$  — дисперсия значений реального выходного сигнала;  $\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i$  — выборочное среднее выходного сигнала.

Модель считается адекватной экспериментальным данным, если выполняется неравенство

$$F_{\text{расч}} < F_{\text{табл}},$$

где  $F_{\text{табл}}$  — табличное значение критерия Фишера при выбранном уровне значимости и двух степенях свободы: числителя  $\nu_1 = N - m$  и знаменателя  $\nu_2 = N - 1$ .

Уровень значимости обычно выбирается из ряда 0,05; 0,01; 0,005; 0,001.

## ε-критерий

Для оценки точности идентификации используется ε-критерий. Суть данного критерия заключается в проведении сравнения выходного сигнала с модели, на вход которой подается фактический входной сигнал реальной системы, и наблюдаемого на выходе системы выходного сигнала:

$$\varepsilon = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (\hat{y}(k) - y(k))^2,$$

где  $\varepsilon$  — значение критерия качества;  $N$  — число опытов;  $\hat{y}(k)$  — предсказанное по модели значение выхода системы;  $y(k)$  — реальное значение выхода системы.

Возможным способом оценки качества моделирования также является наблюдение за графиком невязок, который отображает поведение величины  $\hat{y}(k) - y(k)$  на протяжении всей процедуры идентификации. Если на графике присутствуют резкие "всплески" или глубокие "падения", то, возможно, так проявляется не учтенная нестационарность входного сигнала, сильная зашумленность выходного сигнала или низкий порядок модели. Однако следует отметить, что на начальных этапах работы многих рекуррентных оценщиков в невязках наблюдаются частые колебания большой амплитуды. Такие колебания не являются показателем ухудшения качества оценок и, как правило, быстро затухают в ходе эксперимента.

Полученные алгоритмы идентификации параметров динамических объектов реализованы в виде программы (рис. 3) для ОС Windows в среде программирования Visual C++ с использованием MFC [3].



Рис. 3. Структура взаимодействия основных режимов функционирования программного комплекса "Идентификация"

## Результаты расчетов

По результатам телеметрических данных о полете летательного аппарата осуществлена идентификация параметров планера. В качестве входного сигнала используется сигнал с выхода привода, а выходным сигналом является сигнал с датчика перегрузок. На рис. 4, 5 приведены результаты оценки постоянной времени  $T_{пл}(n)$  и значения критерия Фишера [4] для модели планера.

По сигналам со входа и выхода осуществлена идентификация привода в виде аperiodического звена. Получена оценка постоянной времени  $T_{пр}(n)$  и значения критерия Фишера (рис. 6, 7) [5].

Использование алгоритмов на основе фильтрации Калмана позволило получить оценки нестационарных динамических параметров летательного аппарата.

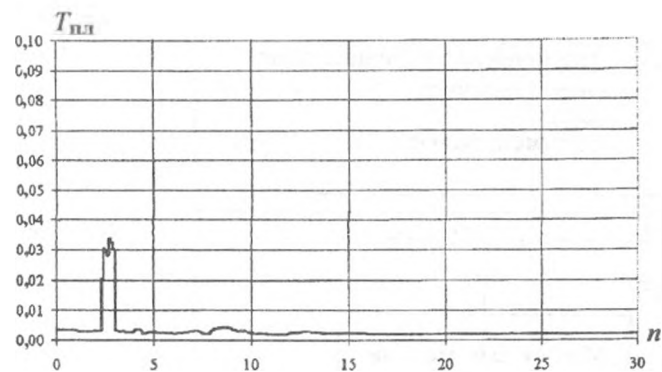


Рис. 4. Результаты оценки постоянной времени планера

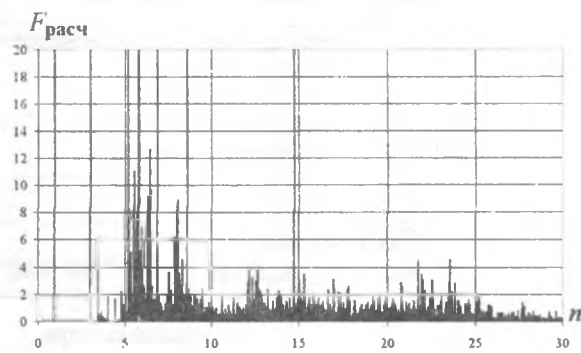


Рис. 5. Расчетные значения критерия Фишера для модели планера (табличное значение равно 0,6)

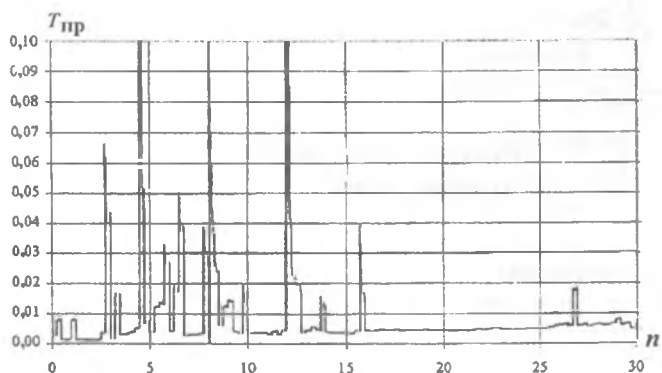


Рис. 6. Результаты оценки постоянной времени рулевого привода

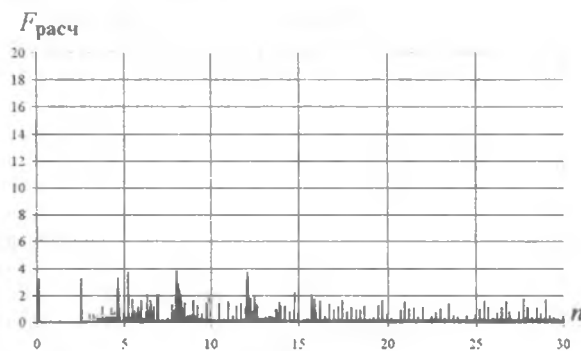


Рис. 7. Расчетные значения критерия Фишера для модели рулевого привода (табличное значение равно 0,6)

## Список литературы

1. Льюнг Л. Идентификация систем. Теория для пользователя. М.: Наука, 1991.
2. Понятский В. М. Компьютерная технология идентификации методом фильтрации Калмана параметров линейной нестационарной модели динамического объекта // Тр. межд. науч.-практ. конф. "Третьи Окуневские чтения". Ч. 3. С.-Пб.: БГТУ, 2003. С. 146–150.

3. *Понятский В. М., Оберман М. С.* Программа для идентификации методом фильтрации Калмана параметров линейной нестационарной модели динамического объекта // Там же. С. 151—158.
4. *Понятский В. М.* Идентификация динамических характеристик летательного аппарата методом фильтрации Калмана // Сб. материалов IV Межд. школы-семинара "Внутрикамерные процессы, горение и газовая динамика дисперсных систем". С.-Пб.: БГТУ, 2004. Т. 2. С. 126—130.
5. *Понятский В. М.* Идентификация многомерных нестационарных динамических объектов методом фильтрации Калмана // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2004. Вып. 1. С. 81—86.

Статья поступила в редакцию 5.10.04.

---