УДК 519.6

ЗАГАДКА МЕТОДА ГОДУНОВА

Г. П. Прокопов
(ИПМ им. М. В. Келдыша РАН)

В методе Годунова для численного решения газодинамических задач успех достигается благодаря использованию дополнительного закона сохранения энтропии на гладких решениях и постулату о ее неубывании на разрывах. Всегда ли авторы, заявляющие о *методах типа Годунова*, с должным вниманием относятся к этому?

Во избежание недоразумений следует изложить предысторию настоящего текста, который по своему "жанру" и объему близок к письму в Редколлегию. Мне было поручено рецензирование статьи некоторого Автора. Рецензия получилась отрицательной, с заключением о нецелесообразности публикации. Заглавная буква в инкогнито "Автор" вызвана вовсе не иронией и не излишним почтением. Просто это способ надежнее избежать путаницы, как и нетрадиционное изложение от первого лица.

Мне стало жаль, что (в случае принятия рекомендации) высказанные в рецензии математические аргументы пропадут в архиве Редколлегии, а, кроме того, остается открытой "дверь" для возможных повторений пройденного.

Я заранее благодарен Редколлегии и Автору, если настоящая заметка будет опубликована (возможно, без этого предисловия). Единственное сожаление и трудность: не могу использовать текст статьи Автора, чтобы не быть обвиненным в плагиате и нарушении запрета ссылок на неопубликованные работы.

1. Переходя к сути дела, предлагаю посмотреть пример, изложенный в монографии [1] на с. 115—116. Поскольку она библиографической редкостью не является, позволю себе никаких формул не выписывать, а делать прямые ссылки на ее текст. В примере рассматривается задача о распаде разрыва с симметричными данными относительно границы раздела.

В случае *встречных* потоков образуется известная конфигурация с ударной волной. Это решение получается на основе пары соотношений Ренкина—Гюгонио и уравнения состояния сплошной среды. Для краткости назову их *ударными соотношениями*.

В случае *разбегающихся* потоков (при некотором дополнительном ограничении, на котором останавливаться не будем) возникает конфигурация с волной разрежения. Она хорошо известна всем, кто занимается газовой динамикой. Назовем ее решением I. Заметим, что для его конструирования ударных соотношений недостаточно — нужно привлекать энтропию, или, что то же самое, адиабату Пуассона. Но, кроме решения I, — и в этом состояла суть и цель конструирования примера — существует еще и решение II рассматриваемой задачи. Оно получается с помощью только упомянутых ударных соотношений и называется иногда *ударной волной разрежения* (см., например, [2], с. 466, или [1], с. 117).

Концепция метода Годунова основана на том, что из этих двух решений правомочным является только I, а II отвергается, поскольку оно не удовлетворяет закону неубывания энтропии (это доказывается в [1] на с. 116). Таким образом, привлечением этого закона достигается единственность решения рассматриваемой задачи. Без этой единственности вопрос о корректности математической постановки обсуждать не имеет смысла.

2. Задача о распаде разрыва является одним из основных структурных элементов метода Годунова. Поначалу это витиевато отражалось в его наименовании, до тех пор пока решительные поклонники метода справедливо не отдали должное творцу его исходного варианта.

Когда по поручению С. К. Годунова я писал для монографии [1] § 13 о расчете распада разрыва, очень хотелось упомянуть в качестве *альтернативной* возможность в случае волны разрежения производить расчет по той же формуле, что и для ударной волны. При этом весьма существенно упростились бы формулы — без "противных" степеней $(\varkappa - 1)/(2\varkappa)$, где $\varkappa$ — показатель адиабаты. Замечу, что в те времена небольшого быстродействия ЭВМ это было бы очень весомым аргументом для практики расчетов. Мои рассуждения были связаны с тем обстоятельством, что скачок энтропии (положительный!) в ударной волне есть величина третьего порядка по сравнению со скачком давления. Это является следствием удивительного свойства адиабат Пуассона и Ренкина–Гюгонио касаться друг друга в точке их пересечения (см. [2], с. 462). Соответственно в волне разрежения при расчете по "неправильной" формуле отрицательный скачок энтропии тоже будет величиной третьего порядка (см. [1], с. 116). Ну не все ли равно для схемы первого порядка, каковой является схема Годунова? Используют же приближенный расчет распада разрыва. Нет, не все равно. Волна разрежения может быть сколь угодно "сильной", так что последствия такого сознательного занижения энтропии непредсказуемы. И я при подготовке монографии [1] к изданию принял решение "не мутить воду".

3. Между тем, эта ситуация довольно интересна в идейном и методологическом плане. Как описано на с. 104 монографии [1], "при создании первой математической теории ударных волн (еще до их экспериментального открытия) Риман положил в основу своей теории *закон сохранения энтропии* на разрывах. Но при этом ему пришлось не учитывать закон сохранения *энергии*. Эта знаменитая ошибка Римана была исправлена Ренкиным и Гюгонио. Оказалось, что закон сохранения энтропии на разрывах не выполняется. При прохождении элемента среды через разрыв энтропия в нем возрастает".

В изложенной выше ситуации возникла *формальная* возможность отказаться от рассмотрения энтропии и обойтись одними соотношениями Ренкина–Гюгонио. (А они, между прочим, на это не претендовали!). Но вопрос об энтропии очень небезобиден — на энтропийные "грабли" наступали уже не один раз. В обзорной работе [3], в частности, обсуждались принципиальные недостатки подхода с использованием полностью консервативных разностных схем и последствия, к которым неправильный расчет энтропии привел при численном моделировании обжатия оболочечных мишеней в задачах управляемого термоядерного синтеза (см. [3], с. 9).

4. В качестве еще одного примера стоит упомянуть и недавно опубликованные работы [4, 5]. Они были инициированы работой [6], в которой использовалась аппроксимация табличных уравнений состояния в форме $p = p(T, \rho)$, $\varepsilon = \varepsilon(T, \rho)$ *билинейными* функциями. При этом энтропия вообще не может быть определена! По-видимому, это и привело к определенным неблагоприятным эффектам в численных расчетах. В качестве еще одной из причин, выявленных в ходе исследования "блеска и нищеты" билинейной аппроксимации (см. [5], с. 15—20), может рассматриваться вырождение якобиана уравнения состояния.

Цель работ [4, 5] состояла в том, чтобы сделать критику использования билинейной аппроксимации конструктивной, предложив подход, позволяющий преодолеть ее принципиальные недостатки. При этом подходе уравнение состояния в отдельной табличной ячейке конструируется как линейная комбинация *термодинамически согласованных* частных решений. Чтобы такая комбинация обеспечивала нужные табличные значения двух функций $p(T, \rho)$ и $\varepsilon(T, \rho)$ в четырех углах табличной ячейки, она должна содержать 8 свободных параметров. При удачном выборе базисных частных решений для вычисления параметров выписываются не слишком громоздкие формулы.

Необходимость такого подхода диктуется и тем обстоятельством, что описываемые в литературе формулы для уравнений состояния условию термодинамического согласования, вытекающему из основного термодинамического тождества, могут и не удовлетворять. В этом нет ничего удивительного. При конструировании таких формул для реальных сред используются не только термодинамические потенциалы, что автоматически обеспечивает термодинамическую согласованность, но и соображения полуэмпирического характера, имеющие целью получить удовлетворительное согласие с экспериментальными данными. В работе [5] приведены некоторые примеры.

В такой ситуации аппроксимация табличных данных с использованием термодинамически-согласованных функций представляется последним "форпостом", необходимым для обеспечения корректности математической постановки газодинамической задачи.

5. Когда говорится о загадке метода Годунова, имеется в виду следующее. Система дифференциальных уравнений газовой динамики замыкается уравнением состояния (может быть, заданным в параметрической или табличной форме). Формально этого уже достаточно для конструирования разностного метода численного решения газодинамических задач.

Но, как хорошо известно из курсов газовой динамики (см., например, [2]), привлечение термодинамического тождества позволяет определить энтропию и получить в качестве дополнительного следствия закон ее изменения (сохранения — при отсутствии внешних источников) на гладких решениях. Соответствующий алгоритм расчета распада разрывов обеспечивает сохранение энтропии в волнах разрежения и ее возрастание (неубывание) на разрывах при расчете вспомогательного (промежуточного) временного слоя. За этим следует пересчет, основанный на традиционных законах сохранения.

На с. 23 работы [7] читаем: "При прохождении газа через ударную волну (разрыв в решении) энтропия возрастает. Это утверждение составляет содержание теоремы Цемплена, которая с точки зрения теории квазилинейных уравнений представляет *постулат*, входящий в определение обобщенных решений. *С помощью этого постулата* из числа обобщенных решений *исключаются* разрывные решения, удовлетворяющие законам сохранения массы, импульса и энергии, но такие, что с течением времени полная энтропия для некоторой выделенной массы газа убывает". По-видимому, это обеспечивает приемлемый уровень достоверности получаемых результатов, особенно в случае присутствия в течении сильных разрывов.

В сочетании с дополнительными возможностями (типа использования подвижных сеток для выделения важных элементов рассчитываемого течения и адаптации к ним расчетных сеток — откровенно пользуюсь случаем упомянуть о работе [8]) это сделало метод Годунова одним из наиболее популярных методов расчета газодинамических задач. Популярным настолько, что проводятся специальные международные научные мероприятия, ему посвященные. Работа [7] представляет доклад на одном из таких симпозиумов.

Система уравнений газовой динамики с дополнительным законом сохранения энтропии на гладких решениях не является чем-то уникальным. В §4 работы [7] обсуждается история вопроса об описании класса квазилинейных систем уравнений для n неизвестных функций, классические решения которых автоматически удовлетворяют $(n+1)$-му закону сохранения.

Реализованная в методе Годунова идея использования точных (или приближенных) решений с кусочно-постоянными начальными данными — распадов разрывов — получила широкое распространение и для других гиперболических систем (см., например, [9]). В некоторых случаях обобщение происходит достаточно естественно, хотя и требует определенных усовершенствований. В качестве такого примера можно привести трехтемпературную газодинамическую модель [10], используемую при моделировании процессов в микромишенях при экстремальных условиях сжатия и нагрева. Более совершенный по сравнению с описанным в [10] алгоритм решения задачи о распаде разрыва для этой модели представлен в работе [11].

И уж совсем противоестественным выглядел бы отказ от энтропии при конструировании численного метода для газодинамических задач. В первую очередь по этой причине выше было уделено внимание работам [4—6].

Следует признать, что предложенный в [4, 5] подход имеет недостаток: неоднозначность конструируемого решения. Это связано с неопределенностью выбора базисных функций, участвующих в построении аппроксимационных формул. Устранение указанного недостатка должно быть следующим этапом в бесконечном процессе познания истины (или, например, будет предложено другое, более простое решение проблемы определения энтропии в случае простейшей и однозначной билинейной аппроксимации). Что касается других систем гиперболических уравнений, то всегда ли авторы работ, заявляющие об использовании *методов типа Годунова*, с должным вниманием относятся к одному из принципиальных элементов, положенных в его основу, — дополнительному закону сохранения для гладких решений?

Список литературы

1. Численное решение многомерных задач газовой динамики / Под общей ред. С. К. Годунова М.: Наука, 1976.

2. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Гидродинамика. Т. 6. М.: Наука, 1986.

3. *Забродин А. В., Софронов И. Д., Ченцов Н. Н.* Адаптивные разностные методы математического моделирования нестационарных газодинамических течений. (Обзор) // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики. 1988. Вып. 4. С. 3—22.

4. *Прокопов Г. П.* Аппроксимация табличных уравнений состояния для расчета газодинамических задач: Препринт №80. М.: ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, 2004.

5. *Прокопов Г. П.* Исследование формул аппроксимации табличных уравнений состояния в переменных температура — плотность: Препринт №26. М.: ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, 2005.

6. *Чарахчьян А. А.* Об алгоритмах расчета распада разрыва для схем С. К. Годунова // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 2000. Т. 40, №5. С. 782—796.

7. *Годунов С. К.* Воспоминания о разностных схемах // Межд. симпозиум "Метод Годунова в газовой динамике". США, Мичиганский университет. Май, 1997. Новосибирск: Научная книга, 1997.

8. *Прокопов Г. П.* Вариационные методы расчета двумерных сеток при решении нестационарных задач: Препринт №4. М.: ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, 2004.

9. *Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов А. Ю.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001.

10. *Забродин А. В., Прокопов Г. П.* Методика численного моделирования двумерных нестационарных течений теплопроводного газа // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1998. Вып. 3. С. 3—16.

11. *Прокопов Г. П.* Задача о распаде разрыва в трехтемпературной газовой динамике: Препринт № 66. М.: ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, 2004.

Статья поступила в редакцию 20.04.05.