

УДК 533.6

## БЕЗУДАРНОЕ СЖАТИЕ СИММЕТРИЧНЫХ ПРИЗМ С ИЗОТЕРМИЧЕСКИМ ГАЗОМ

О. Б. Хайруллина  
(ИММ УрО РАН)

Рассмотрена задача о расчете газодинамических параметров при безударном сжатии газовой четырехгранной бесконечной призмы с квадратным поперечным сечением. Решение построено с использованием характеристических рядов. Для изотермического газа получены точные выражения потенциала скорости газа и формы сжимающего поршня при определенно заданном законе движения ребра призмы по плоскости симметрии. Решение описывает процесс полной безударной коллапсации газа в прямую линию. Исследовано поведение газодинамических величин при таком сжатии.

### Введение

Интерес к задачам конструирования процессов безударного сжатия вызван тем, что эти процессы по сравнению с ударным сжатием являются более экономичными. В работах [1–5] построены процессы неограниченного безударного сжатия газовых призм, тетраэдров, конусообразных тел специальных форм. Показано, что при сжатии таких конструкций для достижения больших плотностей газа требуется энергии существенно меньше, чем при одномерных безударных сферических сжатиях, используемых для инициирования лазерного термоядерного синтеза [6]. Более полный обзор работ по кумуляции энергии при безударном сжатии газов приведен в [7].

Задачи построения законов управления неограниченным безударным сжатием газов являются нестандартными задачами газовой динамики, очень трудны и требуют для своего решения применения как точных аналитических методов для построения полей течений газов в зонах максимальных значений возрастающей плотности, так и прецизионных численных методов расчета. Актуальным является вопрос получения точных решений, которые могут быть использованы, в частности, как тесты для сложных численных расчетов.

При исследовании возможностей реализации процессов неограниченного безударного сжатия газовых тел с помощью различных физических полей [2] оказалось, что предпочтительнее замкнутые конструкции [8], в которых отсутствуют неподвижные непроницаемые стенки. В [9, 10] рассмотрена задача о безударном сжатии такой конструкции — бесконечной четырехгранной призмы с политропным газом, имеющей две плоскости симметрии. В качестве математической модели использовалось полное нелинейное уравнение для потенциала скоростей. Закон движения сжимающих поршней был заранее неизвестен. У решения допускались лишь слабые разрывы — разрывы вторых производных искомой функции. Решение строилось в виде характеристических рядов. Было показано, что параметры течения газа и формы поршня при безударном сжатии газовой призмы с двумя плоскостями симметрии находятся с точностью до произвольных функций времени. Они определялись заданным законом движения некоторых частей граней призмы [9], являющихся поршнями, либо законом движения одного из ее ребер [10].

В области возмущенного течения газа выделялись три подобласти, в каждой из которых потенциал скорости строился в виде характеристического ряда по своим переменным. В одной из подобластей решение определялось заданным законом движения части поршня либо ребра, в двух других — условиями непротекания газа через плоскости симметрии и непрерывности его параметров на границах стыковки подобластей, являющихся характеристиками. Уравнения их определялись в

процессе получения искомого решения. В случае, когда показатель адиабаты  $\gamma$  ( $1 < \gamma < 3$ ) и величина полураствора двугранного угла призмы  $\alpha < 45^\circ$  связаны соотношением  $\sin \alpha = \sqrt{3-\gamma}/2$  (согласованный случай), в двух подобластях получены точные выражения для потенциала скорости и формы стенки сжимаемой газовой призмы, в третьей — выражения в виде рядов, коэффициенты которых находятся из решения расщепляющихся подсистем алгебраических уравнений.

В данной работе на основе использования характеристических рядов и алгоритма, разработанного в [10], во всей области найдены точные выражения для параметров течения газа и формы поршня при сжатии газовой призмы, когда  $\gamma = 1$  и  $\alpha = 45^\circ$ . Это — четырехгранная прямая бесконечная призма с квадратным поперечным сечением. Весь изотермический газ призмы при определенно заданном законе движения ее ребра по плоскости симметрии безударно коллапсирует в прямую, являющуюся линией пересечения плоскостей симметрии призмы.

### Постановка задачи

В начальный момент времени  $t = 0$  идеальный газ при постоянном давлении  $p_0$  и постоянной плотности  $\rho_0$  покоится внутри четырехгранной бесконечной призмы, симметричной относительно координатных плоскостей  $x = 0$ ,  $y = 0$ . Призма с поперечным сечением  $A_1B_1C_1D_1$  (рис. 1) сжимается симметрично и безударно при условии, что ее стенки вдвигаются в газ с нулевой начальной скоростью, а ребро  $A$  перемещается по плоскости симметрии  $y = 0$  по определенному закону. Требуется определить в произвольный момент времени  $t$  параметры течения газа и закон движения стенки призмы  $ABCD$ , являющейся поршнем.

В силу симметрии призмы решение строится в ее четверти  $A_1B_1O$ . В момент  $t$  область возмущенного газа  $ABFE$  примыкает к области покоя  $EFO$ , где скорость звука  $c = \sqrt{\gamma p_0 \rho_0^{-1}} = 1$  ( $\gamma$  — показатель адиабаты). Будем считать, что время прохождения расстояния  $|OH| = 1$  звуковой волной  $EF$ , отрывающейся от  $A_1B_1$  в начальный момент времени, соответствует  $t = 1$ .

Закон движения ребра призмы — заданная функция времени, которая должна определяться величиной  $|A_1O|$  и заданной скоростью газа в  $A_1$  при  $t = 0$  или заданной степенью кумуляции скорости. При произвольном задании закона безударное сжатие газа можно осуществлять лишь до некоторого момента  $t = t_k$ .

В работе [10] аналитически решена задача о безударном сжатии газовой призмы, когда закон движения ребра имел вид

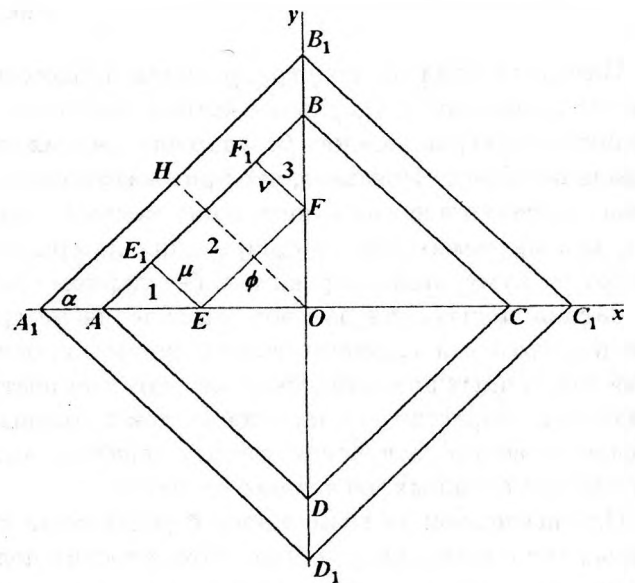


Рис. 1. Схема расчетных подобластей

$$x|_A = \frac{t-1}{(a-1)\sin\alpha} \left[ a - (1-t)^{a-1} \right], \quad a \neq 1,$$

где

$$a = \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{3-\gamma}{\gamma+1}, \quad \alpha < 45^\circ, \quad 1 < \gamma < 3$$

( $\alpha$  — угол наклона грани призмы к плоскости симметрии  $y = 0$ ).

В данной работе рассмотрим закон

$$x|_A = \frac{t-1}{\sin\alpha} \left[ 1 - \ln(1-t) \right], \quad a = 1, \quad \alpha = 45^\circ, \quad \gamma = 1. \quad (1)$$

Оба закона [10] относятся к согласованному случаю, когда двугранный угол призмы и показатель адиабаты связаны определенным соотношением [4].

При безударном сжатии возмущенное течение изотермического газа с уравнением состояния  $p = p_0 \rho_0^{-1} \rho$  потенциально. Его параметры удовлетворяют нелинейному уравнению для потенциала скорости  $\Phi(x, y, t)$  [11]

$$\Phi_{tt} - (1 - \Phi_x^2) \Phi_{xx} - (1 - \Phi_y^2) \Phi_{yy} + 2\Phi_x \Phi_{tx} + 2\Phi_y \Phi_{ty} + 2\Phi_x \Phi_y \Phi_{xy} = 0. \quad (2)$$

Компоненты вектора скорости  $u_1, u_2$  связаны с потенциальной функцией  $\Phi$  следующими соотношениями:

$$u_1 = \Phi_x, \quad u_2 = \Phi_y. \quad (3)$$

### Потенциал скорости газа

Решив уравнение (2), получим потенциал скорости газа. Для этого в области возмущенного газа выделим три подобласти 1, 2, 3 (рис. 1), состыковывающиеся вдоль характеристик  $EE_1, FF_1$  этого уравнения. Подобласть 2 стыкуется по характеристике  $EF$  с областью покоящегося газа. Каждая подобласть примыкает к какой-либо части подвижного поршня, а подобласти 1 и 3 примыкают к плоскостям симметрии по  $AE, BF$ .

Построение решения начинается с подобласти 1, в которой задано краевое условие (1), и смежной с ней подобласти 2. В этих подобластях вводятся характеристические переменные

$$\mu(x, y, \tau) = m(x, y, \tau), \quad \phi(x, y, \tau) = \tau - \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y), \quad \tau = t - 1, \quad (4)$$

где  $m(x, y, \tau)$  — пока неизвестная функция. Уравнение характеристики  $\phi(x, y, \tau) = 0$  получено из системы уравнений для характеристической полосы [12] уравнения (2) и условия примыкания области возмущенного газа к области покоя  $EFO$ , где  $u_1 = 0, u_2 = 0$ . После замены переменных (4) уравнение (2) для функции  $\Psi(\mu, \phi, \tau) = \Phi(x, y, t)$  примет вид

$$\Psi_{\tau\tau} + \Psi_{\mu\mu}(V^2 - Q) + \Psi_{\phi\phi}(W^2 - 1) + 2\Psi_{\mu\tau}V + 2\Psi_{\phi\tau}W + 2\Psi_{\mu\phi}(VW - P) + \Psi_{\mu}(m_{\tau\tau} - R) + 2\Psi_{\mu}\Psi_{\phi}P_{\tau} + \Psi_{\mu}^2R_{\tau} - \frac{\sqrt{2}}{2}\Psi_{\mu}\Psi_{\phi}^2(P_x - P_y) + 2\Psi_{\mu}^2\Psi_{\phi}(m_x P_x + m_y P_y) + \Psi_{\mu}^3(m_{xx}m_x^2 + 2m_{xy}m_x m_y + m_{yy}m_y^2) = 0, \quad (5)$$

где

$$V = m_{\tau} + Q\Psi_{\mu} + P\Psi_{\phi}; \quad W = 1 + P\Psi_{\mu} + \Psi_{\phi}; \quad P = \frac{\sqrt{2}}{2}(-m_x + m_y); \quad Q = m_x^2 + m_y^2; \quad R = m_{xx} + m_{yy}.$$

Краевое условие (1) в характеристических переменных примет вид

$$\phi_A = \tau \ln(-\tau). \quad (6)$$

Как и в [10], решение в подобластях представим в виде характеристических рядов:

– в подобласти 1 по переменным  $\mu, \phi$ :

$$\Psi(\mu, \phi, \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} H_{k,j}(\tau) \mu^k \phi^j, \quad (7)$$

– в подобласти 2 по переменной  $\phi$ :

$$\Psi(\mu, \phi, \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(\mu, \tau) \phi^k. \quad (8)$$

Течение газа в подобласти 2 по характеристике  $\phi = 0$  примыкает к области покоя, где

$$\Phi = C = \text{const}; \quad u_1 = \Phi_x = \Psi_{\mu} m_x - \frac{\sqrt{2}}{2} \Psi_{\phi} = 0; \quad u_2 = \Phi_y = \Psi_{\mu} m_y + \frac{\sqrt{2}}{2} \Psi_{\phi} = 0,$$

откуда при  $m_x + m_y \neq 0$

$$\Psi_\phi(\mu, 0, \tau) = \Psi_\mu(\mu, 0, \tau) = 0.$$

Из этих соотношений получим первые коэффициенты ряда (8):

$$a_0(\mu, \tau) = C = \text{const}; \quad \frac{\partial a_0(\mu, \tau)}{\partial \mu} = a_1(\mu, \tau) = 0. \quad (9)$$

В силу непрерывности потенциала скорости во всей заданной области значения выражений (7), (8) в подобластях 1, 2 на характеристике  $\mu = 0$  должны совпадать. В результате будем иметь условие стыковки:

$$H_{0,j}(\tau) = a_j(0, \tau). \quad (10)$$

Из соотношений (9), (10) следует

$$H_{0,0}(\tau) = a_0(0, \tau) = C = \text{const}; \quad H_{0,1}(\tau) = a_1(0, \tau) = 0. \quad (11)$$

В уравнение (5) подставим разложение (7), перемножим ряды, приравняем нулю коэффициенты при  $\mu^k \phi^j$  ( $k, j = 0, 1, \dots$ ) и получим уравнения вида

$$(m_t^2 - Q + 2m_t Q H_{1,0} + Q^2 H_{1,0}^2) (k+2)(k+1) H_{k+2,j} + 2 [m_t - P + (Q + m_t P) H_{1,0} + P Q H_{1,0}^2] \times \\ \times (k+1)(j+1) H_{k+1,j+1} + P(2+P)(j+2)(j+1) H_{1,0} H_{k,j+2} = F_{k,j}. \quad (12)$$

Уравнения (12) являются алгебраическими относительно  $H_{i,l}$  с суммарным индексом  $i+l = k+j+2$ , которые выписаны в левых частях этих уравнений с учетом (11). Правые части  $F_{k,j}$  — громоздкие выражения, зависящие от  $H_{i,l}$  и их производных при  $i+l < k+j+2$ .

Искомое решение в подобласти 1 должно удовлетворять уравнениям (12), краевому условию (1) и условию непротекания газа через плоскость симметрии  $y = 0$ :

$$u_2 = \Phi_y(x, 0, \tau) = \Psi_\mu(\mu_X, \phi_X, \tau) m_y(x, 0, \tau) + \frac{\sqrt{2}}{2} \Psi_\phi(\mu_X, \phi_X, \tau) = 0. \quad (13)$$

На ребре  $A$  будем иметь

$$u_1 = \Phi_x(x_A, 0, \tau) = \Psi_\mu(\mu_A, \phi_A, \tau) m_x(x_A, 0, \tau) - \frac{\sqrt{2}}{2} \Psi_\phi(\mu_A, \phi_A, \tau) = x'_i|_A. \quad (14)$$

Здесь  $(\mu_A, \phi_A)$ ,  $(\mu_X, \phi_X)$  — координаты точек ребра и плоскости симметрии  $y = 0$  в системе характеристических переменных.

Представим характеристическую переменную  $\mu$  в виде

$$\mu(x, y, \tau) = x - g(y, \tau). \quad (15)$$

Исключим  $x$  из  $\mu^0 = \mu(x, 0, \tau)$  и  $\phi^0 = \phi(x, 0, \tau)$  и получим на плоскости симметрии связь

$$\mu^0 = (\sqrt{2}\tau - g(0, \tau)) - \sqrt{2}\phi^0 = A + B\phi^0. \quad (16)$$

В силу симметрии характеристики  $\mu = 0$  и  $\phi = 0$  имеют точку пересечения на оси  $y = 0$ , откуда из (16)

$$A = \sqrt{2}\tau - g(0, \tau) = 0. \quad (17)$$

Выразим  $x'_i|_A$  через  $\phi_A$  (см. (6)):

$$x'_i|_A = -\sqrt{2} \ln(-\tau) = -\frac{\sqrt{2}}{\tau} \phi_A. \quad (18)$$

Подставив соотношения (7), (16), (18) в условия (13), (14), приравняем нулю коэффициенты при  $\phi_A^j$ ,  $\phi_X^j$  ( $j = 0, 1, 2, \dots$ ). При  $j = J = \text{const}$  получим условие симметрии

$$g_y(0, \tau) \sum_{j=0}^J (J-j+1) H_{J-j+1, j} B^{J-j} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{j=0}^J (j+1) H_{J-j, j+1} B^{J-j} \quad (19)$$

и краевое условие

$$\sum_{j=0}^J (J-j+1) H_{J-j+1, j} B^{J-j} - \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{j=0}^J (j+1) H_{J-j, j+1} B^{J-j} = c_J, \quad (20)$$

связывающие коэффициенты  $H_{i, l}$ , где  $c_0 = 0$ ;  $c_1 = -\sqrt{2}/\tau$ ;  $c_k = 0$  ( $k > 1$ );  $B = -\sqrt{2}$ .

Функцию  $g_y(0, \tau)$  определим из характеристического уравнения [12] для (2)

$$g_\tau - \Phi_{x0} + \Phi_{y0} g_y - \sqrt{1 + g_y^2} = 0 \quad (21)$$

с учетом того, что  $\Phi_{x0} = \Phi_{y0} = 0$  при  $y = 0$ . При этом  $g_\tau(0, \tau)$  определяется из соотношения (17) (индекс 0 показывает, что значения соответствующих функций берутся вдоль характеристики  $\mu = 0$ ).

В результате

$$g_\tau(0, \tau) = \sqrt{2}; \quad g_y(0, \tau) = -1 \quad (22)$$

( $g_y(0, \tau) = 1$  соответствует характеристике  $\phi = 0$ ).

Система алгебраических уравнений (12), (19), (20) расщепляется на подсистемы, формируемые последовательно для  $J = 0, 1, 2, \dots$ , из которых будут определяться группы коэффициентов  $H_{i, l}$  ( $i + l = J + 1$ ).

Из (19), (20) при  $J = 0$  следует

$$H_{1, 0} = 0.$$

При  $J = 1$  подсистема уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} (g_\tau^2 - 1 - g_y^2) H_{2, 0} + \left( -g_\tau + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} g_y \right) H_{1, 1} &= 0; \\ 2H_{2, 0} - H_{0, 2} &= 0; \\ 2H_{2, 0} - \sqrt{2}H_{1, 1} + H_{0, 2} - \frac{1}{\tau} &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\frac{H_{1, 1}}{H_{2, 0}} = \frac{h_1}{h_2}; \quad H_{0, 2} = 2H_{2, 0}; \quad H_{2, 0} \left( 4 - \sqrt{2} \frac{h_1}{h_2} \right) = \frac{1}{\tau}, \quad (23)$$

где

$$h_1 = 1 - g_\tau^2 + g_y^2; \quad h_2 = -g_\tau + \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + g_y).$$

Коэффициенты  $H_{i, j}$  — функции времени  $\tau$  (7), поэтому правая часть первого соотношения (23) может зависеть только от времени. Следовательно, равенство справедливо при любом значении  $y$ . При  $y = 0$  будем иметь

$$h_1|_{y=0} = 1 - g_\tau^2(0, \tau) + g_y^2(0, \tau) = 0; \quad h_2|_{y=0} = -g_\tau(0, \tau) + \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + g_y(0, \tau)) = -\sqrt{2} \neq 0.$$

В результате из (23) получим

$$h_1 = 1 - g_\tau^2(y, \tau) + g_y^2(y, \tau) = 0 \quad (24)$$

и коэффициенты группы при  $J = 1$

$$H_{1,1} = 0; \quad H_{0,2} = \frac{1}{2\tau}; \quad H_{2,0} = \frac{1}{4\tau}.$$

Решение следующей системы четырех уравнений при  $J = 2$

$$\begin{aligned} H_{1,2} &= -\frac{\sqrt{2}}{8h_2\tau^2}g_\tau(g_y + 1); & H_{2,1} &= \left[2h_2 + g_\tau^3 + \tau(g_{\tau\tau} - g_{yy})\right]\frac{1}{8h_2\tau^2}; \\ H_{0,3} &= \frac{2}{3}(\sqrt{2}H_{1,2} - H_{2,1}); & H_{3,0} &= \frac{1}{6}(-H_{1,2} + 2\sqrt{2}H_{2,1}) \end{aligned} \quad (25)$$

зависит от неизвестной функции  $g(y, \tau)$  (15).

Функция  $g(y, \tau)$  должна удовлетворять системе обыкновенных дифференциальных уравнений характеристической полосы [12] для квазилинейного уравнения (2) и краевым условиям (17), (22). Функцию  $g(y, \tau)$  будем определять итерационно, подключая к расчету на каждой итерации очередную группу найденных коэффициентов  $H_{i,l}$  ( $i + l = J + 1$ ). Так, используя коэффициенты, полученные при  $J = 1$ , найдем первое приближение функции  $g(y, \tau)$ , которое должно с учетом (24) удовлетворять следующей системе уравнений характеристической полосы:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\tau} &= F_{g_y} = \Phi_{y0} - \frac{g_y}{\sqrt{1 + g_y^2}}; \\ \frac{dg_\tau}{d\tau} &= -F_\tau = \Phi_{x0\tau} - \Phi_{y0\tau}g_y; \\ \frac{dg_y}{d\tau} &= -F_y = \Phi_{x0y} - \Phi_{y0y}g_y; \\ \frac{dg}{d\tau} &= g_\tau + g_y \frac{dy}{d\tau}. \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь  $F = F(\tau, x, y, g, g_\tau, g_y)$  — левая часть характеристического уравнения (21);

$$\Phi_0(x, y, t) = \Psi(0, \phi, \tau) = a_0 + H_{0,2}\phi_0^2; \quad \phi_0(x, y, \tau) = \tau + \frac{\sqrt{2}}{2}(y - g(\tau, y))$$

— значения соответствующих функций вдоль характеристики  $\mu = 0$ .

Проинтегрируем систему уравнений (26) при краевых условиях (17), (22) и получим  $g = \sqrt{2}\tau - y$ . Характеристическая переменная (15) принимает вид

$$\mu(x, y, \tau) = x - \sqrt{2}\tau + y. \quad (27)$$

После этого из соотношений (25) окончательно вычисляются коэффициенты ряда (7) при  $J = 2$ :

$$H_{1,2} = H_{2,1} = H_{0,3} = H_{3,0} = 0.$$

Продолжив вычисления, получим, что системы уравнений для групп коэффициентов при  $J \geq 3$  имеют также нулевые решения. В результате потенциал скорости в подобласти 1, построенный по заданному закону (1) движения ребра призмы, имеет точное выражение

$$\Psi_1 = C + \frac{1}{2\tau}\phi^2 + \frac{1}{4\tau}\mu^2 \quad (28)$$

и уравнение характеристики (27) сохраняет вид.

Найдем потенциал скорости в подобласти 2. Для этого ряд (8) подставим в уравнение (5), приравняем нулю коэффициенты при одинаковых степенях  $\phi$ , получим дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка для коэффициентов  $a_{k+1}$  ( $k \geq 1$ ) вида

$$\frac{\partial a_{k+1}}{\partial \tau} + S \frac{\partial a_{k+1}}{\partial \mu} + 2(k+1)a_2 a_{k+1} = F_k, \quad S = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + g_y) - g_\tau = -\sqrt{2}. \quad (29)$$

Правые части  $F_k$  уравнений зависят от  $a_i$  при  $i \leq k$ .

Первые коэффициенты  $a_0(\mu, \tau)$ ,  $a_1(\mu, \tau)$  ряда (8) определены в (9), уравнение (29) при  $k = 0$  удовлетворяется автоматически.

При  $k = 1$  будем иметь

$$\frac{\partial a_2}{\partial \tau} + S \frac{\partial a_2}{\partial \mu} + 2a_2^2 = 0. \quad (30)$$

Решение уравнения (30)

$$a_2(\mu, \tau_0) = \frac{S}{2(\mu - f_2(\tau_0))} = \frac{S}{2T(\tau_0, \mu)},$$

где

$$\tau_0 = \mu - S\tau, \quad (31)$$

зависит от произвольной функции  $f_2(\tau_0)$ , определяемой из условия стыковки (10) решений в подобластях 1 и 2 по характеристике  $EE_1$  ( $\mu = 0$  на рис. 1):

$$f_2(-S\tau) = \sqrt{2}\tau = -S\tau = \tilde{\tau} = f_2(\tilde{\tau}).$$

В результате будем иметь

$$a_2(\mu, \tau) = \frac{1}{2\tau}.$$

После замены переменных (31) в (29) для коэффициентов  $a_{k+1}$  ( $k \geq 2$ ) получим уравнения

$$S \frac{\partial a_{k+1}(\mu, \tau_0)}{\partial \mu} + 2(k+1)a_2(\mu, \tau_0)a_{k+1}(\mu, \tau_0) = F_k(\mu, \tau_0), \quad (32)$$

решения

$$a_{k+1} = a_2^{k+1} \left( \frac{2}{S} \right)^{k+1} \left( \frac{1}{2^{k+1}} \int \frac{S^k F_k}{a_2^{k+1}} d\mu - f_{k+1}(\tau_0) \right) \quad (33)$$

которых зависят от произвольных функций  $f_{k+1}(\tau_0)$ , также определяемых из условия стыковки (10).

Рекуррентная формула (33) позволяет последовательно вычислять коэффициенты ряда (8). Так, при  $k = 2$  из уравнения (32) будем иметь

$$a_3 = \frac{1}{6T^3} \int [f_2''T + 2(f_2' - 1)^2] d\mu + f_3(\tau_0). \quad (34)$$

Так как

$$f_2(\tau_0) = \tau_0; \quad f_2' = 1; \quad f_2'' = 0,$$

то в соотношении (34) для коэффициента  $a_3$  подынтегральное выражение обращается в нуль. Из условия стыковки (10)  $f_3(\tau_0) = 0$  и  $a_3 = 0$ . Продолжив вычисления, получим, что все последующие коэффициенты ряда (8) равны нулю и потенциал скорости газа в подобласти 2 имеет точное выражение

$$\Psi_2 = C + \frac{1}{2\tau} \phi^2. \quad (35)$$

Решения в подобластях 2 и 3 стыкуются по характеристике  $\nu = 0$  ( $FF_1$  на рис. 1).

Для построения решения в подобласти 3 введем переменные

$$\nu = n(x, y, \tau); \quad \phi(x, y, \tau) = \tau - \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y); \quad \Lambda(\nu, \phi, \tau) = \Phi(x, y, t),$$

после чего уравнение (2) примет вид (5), но при этом следует заменить  $\mu$  на  $\nu$ ,  $m$  на  $n$  ( $n(x, y, \tau)$  — неизвестная функция),  $\Psi$  на  $\Lambda$ .

Потенциал скорости в подобласти 3 представим в виде двойного ряда:

$$\Lambda(\nu, \phi, \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} G_{k,j}(\tau) \nu^k \phi^j. \quad (36)$$

Найденное решение в подобласти 2 перестроим в виде ряда

$$\Lambda(\nu, \phi, \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(\nu, \tau) \phi^k, \quad (37)$$

коэффициенты  $b_k(\nu, \tau)$  которого зависят от характеристической переменной  $\nu$ . Для согласованности решений (8), (37) в подобласти 2 должно выполняться равенство

$$a_k(\mu, \tau) = b_k(\nu, \tau). \quad (38)$$

Для построения решения в подобласти 3 необходимо найти уравнение характеристики  $\nu(x, y, \tau) = 0$ , для чего представим  $\nu$  в виде

$$\nu(x, y, \tau) = x - q(\tau, y).$$

Система уравнений для характеристической полосы будет аналогична системе (26).

Краевые условия получим из условия пересечения характеристики  $\nu = 0$  с характеристикой  $\phi = 0$  на оси  $x = 0$  (точка  $F$  на рис. 1). В этой точке (см. [9])

$$\phi(0, y_F, \tau) = \nu(0, y_F, \tau); \quad \sqrt{2}\tau + y_F = -q(\tau, y_F); \quad q_t(\tau, y_F) = -\sqrt{2}; \quad q_y(\tau, y_F) = -1.$$

Проинтегрировав систему уравнений для характеристической полосы, получим уравнение характеристики

$$\nu(x, y, \tau) = \sqrt{2}\tau + x + y = 0.$$

Решения (36), (37) в подобластях 2 и 3 на характеристике  $\nu = 0$  должны совпадать. Следовательно, условие стыковки будет следующим:

$$G_{0,j}(\tau) = b_j(0, \tau). \quad (39)$$

В подобласти 3 на плоскости  $x = 0$  должно выполняться условие симметрии

$$u_1(0, y, t) = \Phi_x(0, y, t) = \Lambda_\nu n_x - \frac{\sqrt{2}}{2} \Lambda_\phi = 0. \quad (40)$$

Если исключить  $y$  из  $\nu = \nu^0$  и  $\phi = \phi^0$  при  $x = 0$ , то на плоскости симметрии получим соотношение  $\nu(0, y, \tau) = \sqrt{2}\phi(0, y, \tau)$ . Подставив его и (36) в условие (40), приравняв нулю коэффициенты при  $\phi^J$  ( $J = 0, 1, 2, \dots$ ), получим условие симметрии, выраженное через коэффициенты ряда (36):

$$\sum_{j=0}^J (J-j+1) (\sqrt{2})^{J-j} G_{J-j+1,j} - \sum_{j=0}^J (j+1) (\sqrt{2})^{J-j-1} G_{J-j,j+1} = 0. \quad (41)$$

Уравнения для  $G_{k,j}$  будут аналогичны уравнениям (12) для  $H_{k,j}$ . Схема построения решения в подобласти 3 та же, что и при построении решения в подобласти 1, но при учете другого условия симметрии (41), условия согласованности (38), а также условия стыковки (39) вместо краевого условия (20); при этом уравнение характеристики  $\nu = 0$  уже известно.

В результате потенциал скорости в подобласти 3 будет следующим:

$$\Psi_3 = C + \frac{1}{2\tau} \phi^2 + \frac{1}{4\tau} \nu^2. \quad (42)$$

Таким образом, в каждой подобласти возмущенного газа сжимаемой призмы получено точное выражение (28), (35), (42) потенциала скорости.



### Исследование картины сжатия газовой призмы

**Закон движения сжимающего поршня.** Найдем закон  $Z(x, y, t) = 0$  движения стенки призмы, являющейся поршнем. Условие непротекания газа через стенку приводит к линейному однородному уравнению в частных производных первого порядка

$$Z_t + u_1 Z_x + u_2 Z_y = 0$$

для неизвестной функции  $Z$  от трех независимых переменных. Считаем, что коэффициенты уравнения  $u_1, u_2$ , задаваемые соотношениями (3), и их частные производные в области определения  $Z$  непрерывны. Характеристики, покрывающие поверхность  $Z = 0$ , будут удовлетворять уравнениям

$$dx = \Phi_x d\tau; \quad dy = \Phi_y d\tau. \quad (43)$$

Уравнение поршня начнем определять с подобласти 2, так как в ней известно его начальное положение

$$Z(x, y, 0) = -\frac{\sqrt{2}}{2}(x - y) - 1 = 0. \quad (44)$$

Подставим потенциал скорости (35) в уравнения (43). Скомбинировав и проинтегрировав их, получим интегралы

$$x + y = C_1; \quad \frac{\sqrt{2}}{2\tau}(x - y) + \ln(-\tau) - 1 = C_2,$$

где  $C_1, C_2$  — произвольные постоянные. Функцию связи  $C_2 = \chi(C_1)$  определим из условия, что искомая поверхность при  $t = 0$  описывается уравнением (44). В результате будем иметь  $C_2 = 0$ . Уравнение поршня в подобласти 2 примет вид

$$\frac{\sqrt{2}}{2\tau}(x - y) + \ln(-\tau) - 1 = 0. \quad (45)$$

Теперь найдем форму поршня в подобласти 1. Подставив (28) в (43), проинтегрируем уравнения и получим интегралы

$$\frac{x}{\tau} + \sqrt{2} \ln(-\tau) = C_3; \quad \frac{y}{\tau} = C_4.$$

Функциональную зависимость  $C_4 = \psi(C_3)$  найдем из условия прохождения кривой через точку  $E_1(x_e, y_e)$  (см. рис. 1), которая лежит на пересечении поршня в подобласти 2 и характеристики  $\mu = 0$ ,

$$x_e = \frac{\sqrt{2}\tau[2 - \ln(-\tau)]}{2}; \quad y_e = \frac{\sqrt{2}\tau \ln(-\tau)}{2}. \quad (46)$$

После этого уравнение формы поршня в подобласти 1 примет вид (45).

Аналогично интегрируются уравнения характеристик (43), покрывающих искомую поверхность в подобласти 3, но при условии прохождения ее через линию пересечения поршня с характеристикой  $\nu = 0$ . На рис. 1 эта линия представлена точкой  $F_1$  с координатами

$$x_f = -\frac{\sqrt{2}\tau \ln(-\tau)}{2}; \quad y_f = -\frac{\sqrt{2}\tau [2 - \ln(-\tau)]}{2}. \quad (47)$$

Уравнение сжимающего поршня в подобласти 3 также имеет вид (45).

Итак, получен закон движения стенки призмы, являющейся сжимающим поршнем, когда заданный закон движения ее ребра имеет вид (1) (рис. 2). При сжатии поршень сохраняет форму, оставаясь плоским, перемещается параллельно своему начальному положению, что заранее не очевидно.

На рис. 3 приведены положения поршня, рассчитанные на моменты времени  $t = 0; 0,3; 0,6; 0,9$ . Линии  $EO, FO$  — траектории точек  $E_1, F_1$  (см. рис. 1), описываемые параметрическими уравнениями (46), (47).

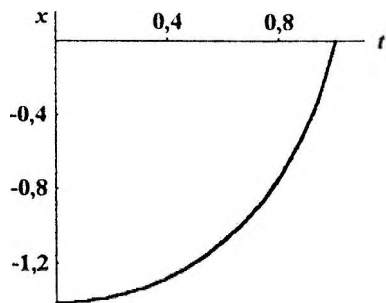


Рис. 2. Заданный закон движения ребра призмы

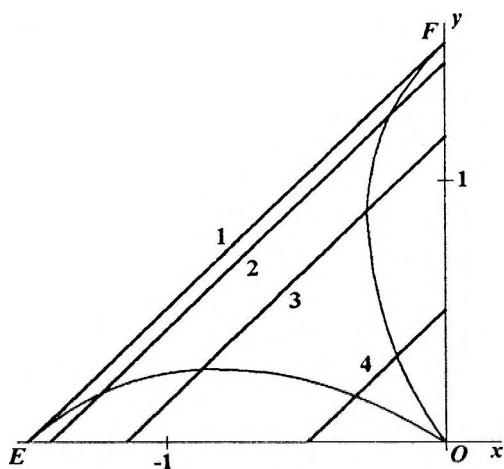


Рис. 3. Положения поршня в разные моменты времени: 1 —  $t = 0$ ; 2 —  $t = 0,3$ ; 3 —  $t = 0,6$ ; 4 —  $t = 0,9$

**Скорость газа.** Проанализируем, как меняется скорость газа при сжатии призмы. В каждой подобласти выпишем выражения для компонент вектора скорости  $u_1, u_2$  (3), модуля скорости  $U = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$ , модуля скорости  $U_p$  на поршне, где  $x, y$  связаны соотношением (45):

— подобласть 1:

$$u_1 = -\sqrt{2} + \frac{x}{\tau}; \quad u_2 = \frac{y}{\tau};$$

$$U = -\frac{1}{\tau} (2\tau^2 + x^2 + y^2 - 2\sqrt{2}x\tau)^{1/2};$$

$$U_p = -\frac{\sqrt{2}}{\tau} (\tau^2 \ln^2(-\tau) - \sqrt{2}y\tau \ln(-\tau) + y^2)^{1/2} \quad (0 \leq y \leq y_e).$$

— подобласть 2:

$$u_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2\tau}(x - y); \quad u_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2\tau}(x - y);$$

$$U = -\frac{1}{\tau} \left[ \tau - \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y) \right];$$

$$U_p = -\ln(-\tau) \quad (y_e \leq y \leq y_f).$$

— подобласть 3:

$$u_1 = \frac{x}{\tau}; \quad u_2 = \sqrt{2} + \frac{y}{\tau};$$

$$U = -\frac{1}{\tau} (2\tau^2 + x^2 + y^2 + 2\sqrt{2}y\tau)^{1/2};$$

$$U_p = -\frac{\sqrt{2}}{\tau} \left[ \tau^2 \ln^2(-\tau) - \sqrt{2}y\tau \ln(-\tau) + y^2 + \right. \\ \left. + 2\tau (\tau - \tau \ln(-\tau) + \sqrt{2}y) \right]^{1/2} \quad (y_f \leq y \leq y_b).$$

Здесь  $y_e$  из (46),  $y_f$  из (47),  $y_b = \sqrt{2}\tau(\ln(-\tau) - 1)$  — соответственно ординаты точек  $E_1, F_1, B$  (см. рис. 1).

Из приведенных выражений видно, что поле скоростей симметрично относительно плоскости  $x = -y$ . В каждый момент времени максимальное значение скорости достигается на плоскостях симметрии  $x = 0, y = 0$ . Эти значения возрастают с ростом времени  $t$ . Для иллюстрации полученных выводов на рис. 4 представлены графики значений модуля скорости на пор-

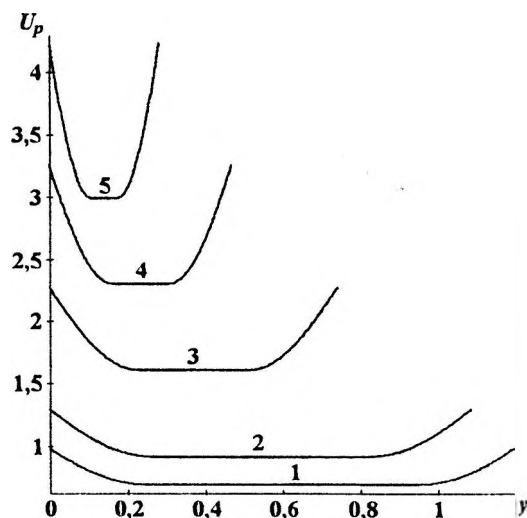


Рис. 4. Модуль скорости на поршне в разные моменты времени: 1 —  $t = 0,1$ ; 2 —  $t = 0,2$ ; 3 —  $t = 0,4$ ; 4 —  $t = 0,5$ ; 5 —  $t = 0,95$

шне, рассчитанные для моментов времени  $t = 0,1; 0,2; 0,4; 0,5; 0,95$ . В подобласти 2 движение газа одномерное и направлено перпендикулярно поршню, при этом значение модуля скорости на поршне зависит только от времени.

**Плотность газа.** Определим плотность газа из решения уравнения сохранения массы

$$\rho_t + u_1 \rho_x + u_2 \rho_y + \rho(u_{1x} + u_{2y}) = 0 \quad (48)$$

на уже известном поле скоростей при условии, что область возмущенного газа примыкает к области покоя с известной плотностью газа, где

$$\rho = \rho_0; \quad u_1 = 0; \quad u_2 = 0. \quad (49)$$

С целью удовлетворения условию (49) решение уравнения (48) в частных производных первого порядка начинается с подобласти 2. Оно сводится к решению его характеристической системы. В результате в подобласти 2 будем иметь

$$\ln \rho = \ln \rho_0 - 1 + \frac{\sqrt{2}(x - y)}{2\tau} = \ln \rho_0 + \frac{\sqrt{2}}{2}(u_1 - u_2). \quad (50)$$

При построении решения в подобластях 1 и 3 необходимо на характеристиках  $\mu = 0$  и  $\nu = 0$  (см. рис. 1) выполнить условие непрерывности решения (50), после чего получим выражения для плотности в подобласти 1

$$\ln \rho = \ln \rho_0 - 2 + \sqrt{2} \frac{x}{\tau} = \ln \rho_0 + \sqrt{2} u_1$$

и в подобласти 3

$$\ln \rho = \ln \rho_0 - 2 - \sqrt{2} \frac{y}{\tau} = \ln \rho_0 - \sqrt{2} u_2.$$

На рис. 5 представлены изолинии плотности  $\rho$  на момент времени  $t = 0,6$ . Значение плотности  $\rho_i$  на изолинии с номером  $i$  вычисляется по формуле

$$\rho_i = \rho_0(1 - t)^{-2i/(n+1)},$$

где  $n$  — количество всех построенных изолиний (на рис. 5  $n = 5$ ).

Видно, что более плотный газ концентрируется в подобластях 1 и 3 около ребер  $A$  и  $B$ . Для сравнения приведем выражения для плотности на ребрах  $A$  и  $B$ , участке поршня  $E_1F_1$ , полученные с учетом (1), (46), (47), и на границе  $EF$  с областью покоя:

$$\rho|_A = \rho|_B = \rho_0(1 - t)^{-2}; \quad \rho|_{E_1F_1} = \rho_0(1 - t)^{-1}; \\ \rho|_{EF} = \rho_0.$$

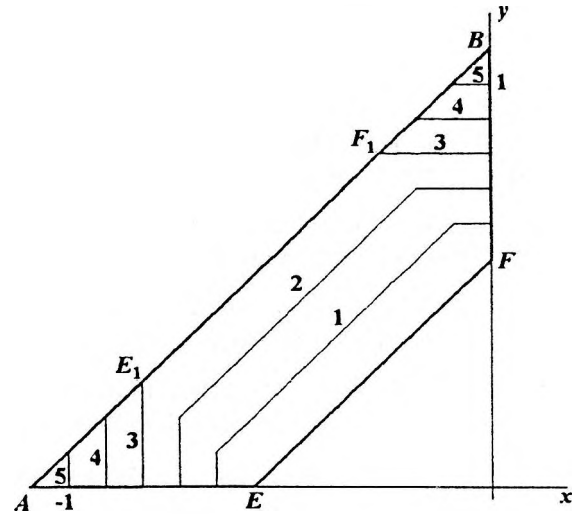


Рис. 5. Изолинии плотности,  $t = 0,6$

**Энергия.** Энергия  $E(\tau)$ , необходимая для движения поршня  $AB$  на промежутке времени  $[0, t]$ , является совокупностью энергий  $E_k(\tau)$  ( $k = 1, 2, 3$ ), затрачиваемых на движение участков  $AE_1$ ,  $E_1F_1$ ,  $F_1B$  поршня:

$$E(\tau) = \sum_{k=1}^3 \int_{-1}^{\tau} \left( \int_{L_k} p_{l_k(\tau)} U_{nk} dl \right) d\tau,$$

где  $p_{l_k(\tau)}$  — давление на участке  $l_k(\tau)$  поршня, определяемое из уравнения состояния;  $U_{nk}$  — нормальная скорость движения этого участка;  $dl$  — элемент длины поршня.

Вычислив интегралы на всех участках, получим

$$E_2(\tau) = 2p_0 [(1-t)\ln(1-t) + t]; \quad E(\tau) = p_0 \ln^2(1-t).$$

При переходе в этих выражениях к пределу при  $t \rightarrow 1$  видно, что энергия, затрачиваемая на участке  $E_1 F_1$ , конечна, практически вся энергия тратится на движение участков  $AE_1$ ,  $F_1 B$  поршня.

### Заключение

С использованием характеристических рядов решена задача о расчете газодинамических параметров при безударном сжатии четырехгранной бесконечной призмы с квадратным поперечным сечением, внутри которой покоился изотермический газ. Аналитические выражения потенциала скорости газа и формы сжимающего поршня получены при определенно заданном законе движения ребра призмы по плоскости симметрии. Решение описывает процесс полной безударной коллапсации газа в прямую, образом которой на рис. 1 является точка  $O$ . Решение согласуется с результатами, полученными ранее в [5] в части заданной области при другой постановке задачи с помощью классов простых и двойных волн.

Алгоритм построения и исследования решения, предложенный в данной работе, можно использовать и при задании других законов движения ребра. При произвольном же задании закона безударное сжатие газа можно осуществлять лишь до некоторого момента  $t = t_k$ . В общем случае решение в явном виде не находится. Для расчета потенциала скорости в виде рядов следует привлечь группы их коэффициентов с  $J \geq 2$ , а для нахождения формы поршня — численный метод интегрирования уравнений характеристик, покрывающих поверхность поршня [13].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05-01-00097) и целевой программы фундаментальных исследований, выполняемой в УрО РАН совместно с учеными СО и ДВО РАН.

### Список литературы

1. Сидоров А. Ф. Оценки предельных степеней кумуляции энергии при безударном сжатии газа // Докл. РАН. 1993. Т. 329, № 4. С. 444–448.
2. Сидоров А. Ф. Исследование особенностей нестационарных конических течений газа // Там же. 1994. Т. 335, № 6. С. 732–735.
3. Сидоров А. Ф., Хайруллина О. Б. Процессы безударного конического сжатия и разлета газа // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 4. С. 81–92.
4. Sidorov A. F. Mathematical modelling of the processes of unshocked gas compression // Russ. J. Numer. Anal. and Math. Modelling. 1995. Vol. 10, No 3. P. 255–277.
5. Сидоров А. Ф. Математическое моделирование процессов сверхсильного сжатия газов // VII Всерос. школа-семинар "Современные проблемы мат. моделирования". Тез. докл. Ростов н/Д: Изд-во РГУ, 1997. С. 127–129.
6. Забабахин Е. И., Забабахин И. Е. Явления неограниченной кумуляции. М.: Наука, 1984.
7. Dolgoleva G. V., Khairullina O. B., Zabrodin A. V. Computational construction of the microtargets on the basis of realization of the shockless compression conception // Proc. of the Steklov Institute of Mathematics, Suppl. 2003. № 2. P. S8–S23.
8. Гао Я. М. Расчетная реализация безударного сжатия и термоядерного горения двумерных (цилиндрических и осесимметричных) конфигураций DT-газа: Препринт № 21. М.: ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, 2000.
9. Хайруллина О. Б. О начальной стадии коллапса симметричных газовых призм // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 4. С. 584–596.

10. *Khairullina O. B.* On computation of the initial stage of the shock-free compression of symmetric gas prisms // Proc. of the Steklov Institute of Mathematics, Suppl. 2003. № 2. P. S55—S70.
11. *Мизес Р.* Математическая теория течения сжимаемой жидкости. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1961.
12. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964.
13. *Бронина Т. Н.* Численные расчеты движения поршня при безударном сжатии конуса с идеальным газом // Вычислительные технологии. 1996. Т. 1, № 2. С. 47—56.

Статья поступила в редакцию 08.06.05.

Исправленный вариант — 20.09.05.

---