

УДК 519.6

МЕТОДИКА ПОСТРОЕНИЯ МНОГОГРАННОЙ ЛИСТОВОЙ СЕТКИ НА ОСНОВЕ МНОГОУГОЛЬНОЙ НЕРЕГУЛЯРНОЙ СЕТКИ

А. А. Воропинов, С. С. Соколов, А. И. Панов
(РФЯЦ-ВНИИЭФ)

Описывается методика построения нерегулярной трехмерной сетки на основе двумерной регулярной четырехугольной или нерегулярной многоугольной сетки. Приводится алгоритм построения двумерной сетки. Построение трехмерной сетки осуществляется полистовым образом путем "перемещения" двумерной сетки в пространстве вдоль заданного вектора или путем вращения вокруг заданной оси.

Методики ТИМ и ДМК

Методика ТИМ [1] предназначена для решения задач газодинамики с учетом процессов упругопластики и теплопроводности на нерегулярных многогранных лагранжевых сетках.

В качестве начальных расчетных сеток для методики ТИМ могут быть использованы следующие типы сеток:

- многогранная нерегулярная сетка, на основе тел Дирихле–Вороного. Такая сетка используется, например, в методике ТМК [2];
- регулярная шестигранная сетка (с нерегулярным хранением). Регулярные шестигранные сетки используются, например, в методиках ДЗ [3], МИМОЗА [4];
- нерегулярная полистовая сетка.

Регулярная шестигранная сетка может быть рассчитана, например, по программе 3D-РНД [5], однако для методики ТИМ "в чистом виде" она использоваться не может. В данной работе представляется методика, предназначенная для расчета трехмерной многогранной сетки на основе двумерной сетки методики ДМК.

Методика ДМК [6–8] предназначена для решения задач газодинамики с учетом процессов упругопластики и теплопроводности на регулярных четырехугольных и нерегулярных многоугольных лагранжевых сетках. Для ДМК создана методика расчета начальной сетки (как нерегулярной, так и регулярной). Она является хорошо развитой, имеет большое количество преобразований сетки. Поэтому желатель-

но использовать возможности двумерной методики расчета начальной сетки в трехмерной методике ТИМ путем преобразования сетки в трехмерную *по листам*.

Кроме того, возможен расчет задач сначала по двумерной программе, пока течения являются двумерными, а затем, после преобразования двумерной сетки в трехмерную, продолжить счет по методике ТИМ.

С целью обеспечения указанных возможностей была разработана методика построения нерегулярной многогранной сетки с полистовым заполнением для методики ТИМ на основе сетки ДМК.

Краткая характеристика сеток методики ДМК

В методике ДМК в настоящее время используется два типа сеток: нерегулярная многоугольная и регулярная четырехугольная.

Нерегулярная сетка характеризуется следующими параметрами:

- в узле сходится три ребра сетки (за исключением угловых узлов);
- ячейка содержит произвольное количество узлов;
- ячейки и узлы имеют сквозную нумерацию.

Регулярная сетка методики ДМК характеризуется следующими параметрами:

- в узле сходится четыре ребра сетки (за исключением угловых и граничных точек);

- ячейка содержит четыре узла;
- узлы и ячейки пронумерованы по строкам и столбцам, при этом узлы имеют сквозную нумерацию, а для ячеек вводится один фиктивный столбец и одна фиктивная строка.

Основные шаги построения двумерной сетки

Построение сетки в различных математических областях выполняется полностью независимо.

Для каждой математической области выполняются следующие шаги:

1. Геометрическая декомпозиция — разбиение области на подобласти. Рассчитываемая область может состоять из произвольного числа подобластей произвольной формы (рис. 1).
2. Построение начальной сетки в каждой подобласти независимо от других подобластей.
3. Сшивание сеток построенных для разных подобластей в единую сетку всей области.
4. Исправление вогнутостей сетки, возникающих при сшивании сетки, во всей области.

Расчет двумерной сетки в подобласти выполняется следующим образом.

1. Осуществляется переход от ортогональной системы координат к криволинейной (рис. 2). Переход от одной системы координат к другой производится при помощи специальных преобразований, например, таких как сжатие сетки, конформные отображения, полярное преобразование.
2. Полученная фигура покрывается сеткой. Стандартный случай — покрытие фигуры правильными шестиугольниками (рис. 3,а). К нестандартным относятся следующие

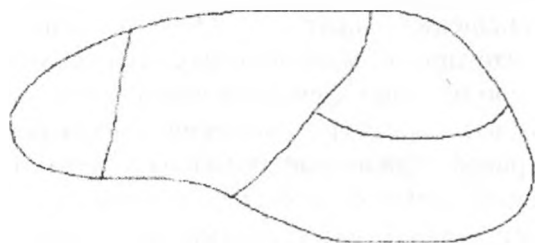


Рис. 1. Разбиение двумерной математической области на подобласти

типы сеток: регулярная и регулярно-нерегулярная.

3. Шестиугольники на границе обрезаются для получения подобласти с готовой сеткой (рис. 3,б).
4. Удаление мелких ячеек на границе подобласти (рис. 3,в).
5. Выполняется обратное преобразование из криволинейной системы координат в ортогональную (рис. 4).

Алгоритм построения трехмерной листовой сетки из двумерной сетки методики ДМК

Укажем основные особенности метода построения трехмерной *листовой* сетки:

1. Построение сетки возможно как из нерегулярной, так и из регулярной сетки ДМК.
2. Сетка может быть получена вращением вокруг оси OX или оси OY либо путем перемещения сетки в пространстве вдоль заданного вектора.
3. Двумерная сетка может быть предварительно отображена относительно одной из осей: OX или OY .
4. Возможно построение сетки для нескольких математических областей. Параметры построения сетки для разных математических областей задаются независимо друг от друга.
5. В качестве начальной сетки может использоваться как сетка, рассчитанная по специальному алгоритму методики ДМК, так и взятая после расчета начальной стадии по программам методики ДМК.

Алгоритм полистового построения нерегулярной многогранной сетки на основе двумерной сетки ДМК базируется на том, что после формирования первого слоя сетки остальные слои могут быть получены простым смещением в нумерации элементов.

Алгоритм состоит из следующих этапов:

1. Определение количественных характеристик двумерной сетки: подсчет количества ячеек, узлов, ребер. Если требуется постановка задачи, выполняется отображение сетки.
2. Расчет структуры сетки: формируются связи *ячейки—границы* и *границы—узлы*. Этот этап можно разбить на четыре шага:

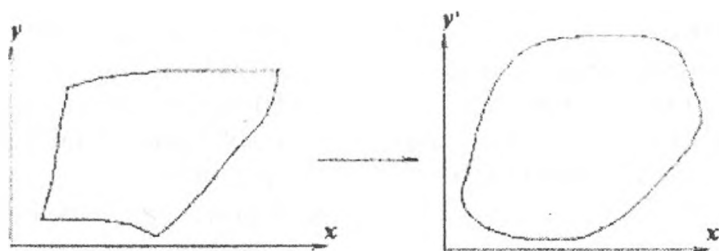


Рис. 2. Переход от ортогональной системы координат к криволинейной

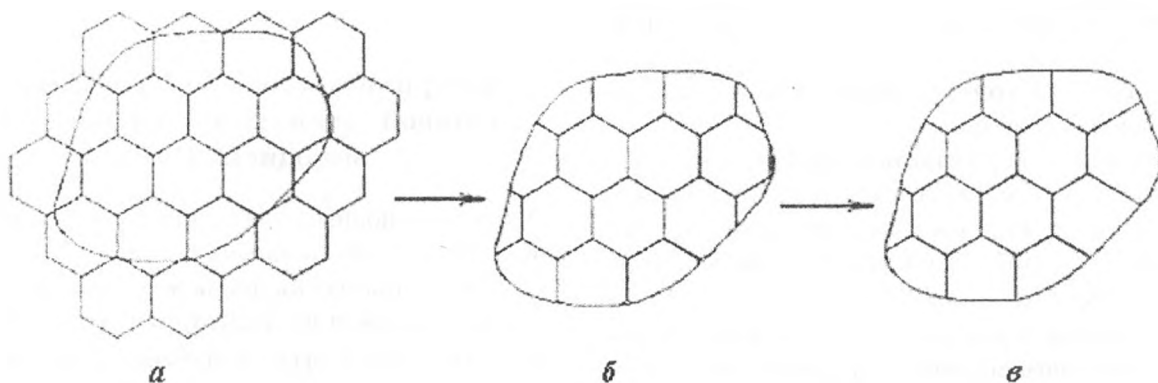


Рис. 3. Построение двумерной сетки в подобласти: а — покрытие подобласти шестиугольной сеткой; б — обрезание сетки на границе подобласти; в — удаление мелких ячеек

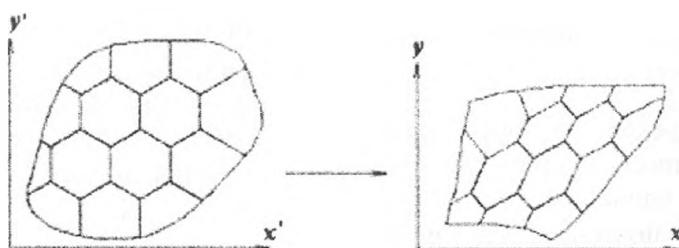


Рис. 4. Обратное преобразование из криволинейной системы координат в ортогональную

- 1) определяются количественные характеристики сетки: количество слоев ячеек и узлов; количество граней, лежащих "вдоль" слоя, в расчете на один слой; количество граней, расположенных "перпендикулярно" к слою и др. Эти количественные характеристики позволяют точно определить смещения в нумерации элементов сетки на различных слоях;
- 2) выполняется расчет первого слоя сетки;
- 3) формируются все остальные слои;
- 4) последний слой замыкается на первый в случае замкнутой сетки (полученной вращением вокруг оси на угол 2π) либо

создается дополнительный слой граней и узлов в случае незамкнутой сетки.

3. Обработка полученной сетки (удаление фиктивных граней и узлов, получающихся при вращении вокруг оси). Обратим внимание, что при этом не производится уплотнения нумерации элементов сетки, чтобы не нарушить структуру смещений, рассчитанных ранее. Удаленные элементы отмечаются специальным образом как фиктивные.
4. Расчет вещественных параметров сетки — координат, скоростей, плотностей, энергий и др. При этом используется то, что все элементы сетки пронумерованы по слоям, что значительно упрощает определение соответ-

ствующих элементов двумерной сетки.

5. Уплотнение нумерации элементов сетки.

Примеры трехмерных листовых сеток

На рис. 5,а представлена двумерная сетка, использованная для построения первого ряда трехмерных сеток. Это простейшая нерегулярная сетка, состоящая из 10 ячеек и 22 узлов.

На рис. 5,б представлена сетка, полученная перемещением двумерной сетки в пространстве вдоль оси OZ . Сетка состоит из 8 слоев.

На рис. 6 представлен общий вид и вид одного слоя сеток, полученных вращением двумерной сетки вокруг осей OX (см. рис. 6,а) и OY (см. рис. 6,б). Обе сетки построены из 8 слоев.

Для построения следующего ряда трехмерных сеток была использована регулярная сетка ДМК (рис. 7), состоящая из 30 ячеек (3 слоя по 10 ячеек) и 44 узлов (4 слоя по 11 узлов).

На рис. 8 представлены сетки, состоящие из 10 слоев, полученные перемещением указанной регулярной двумерной сетки в пространстве вдоль оси OZ . Сетка на рис. 8,а получена ее пе-

ремещением без предварительного отображения, а на рис. 8,б — с предварительным отображением относительно оси OX .

На рис. 9 представлены сетки, полученные вращением регулярной двумерной сетки вокруг оси OX : сетка, состоящая из 5 слоев, полученная вращением вокруг оси OX на угол π (рис. 9,а), и сетка из 10 слоев, полученная вращением вокруг оси OX на угол 2π (рис. 9,б). На рис. 9,в показан один слой для этих сеток.

Для примеров, изображенных на рис. 10, была использована нерегулярная сетка ДМК более сложной структуры. Математическая область, покрываемая двумерной сеткой (см. рис. 10,а), разбита на три подобласти, в каждой из которых сетка построена различным образом. На рис. 10,б представлена внешняя поверхность сет-

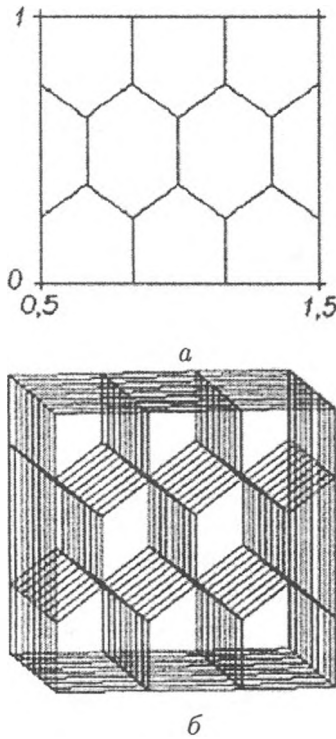


Рис. 5. Простейшая двумерная нерегулярная сетка (а) и трехмерная сетка, полученная перемещением двумерной сетки в пространстве вдоль оси OZ (б)

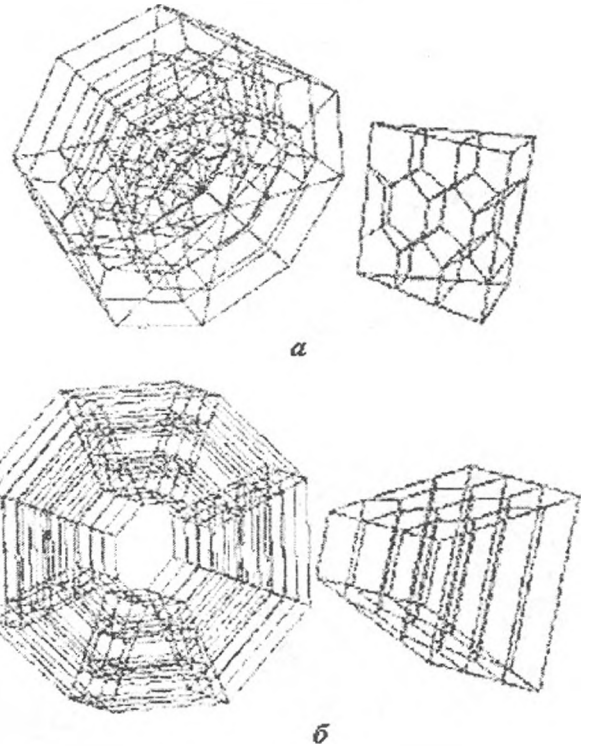


Рис. 6. Сетки, полученные вращением вокруг оси нерегулярной двумерной сетки: а — вокруг оси OX ; б — вокруг оси OY



Рис. 7. Двумерная регулярная сетка

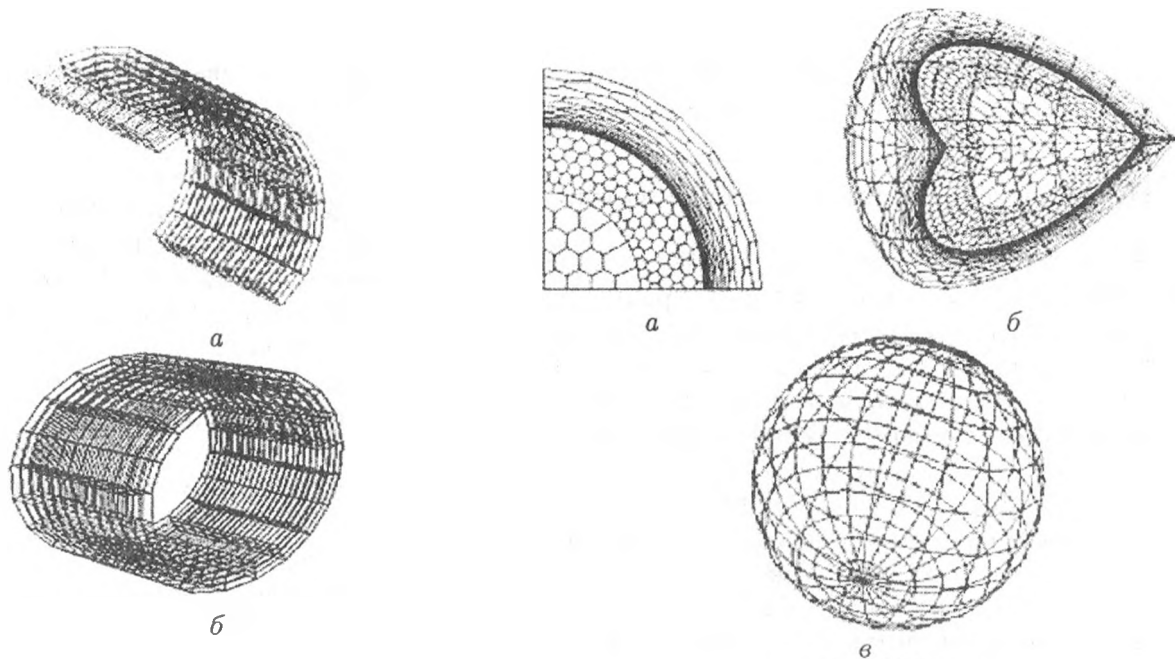


Рис. 8. Трехмерные сетки, полученные из двумерной регулярной сетки перемещением в пространстве без (а) и с предварительным отображением (б)

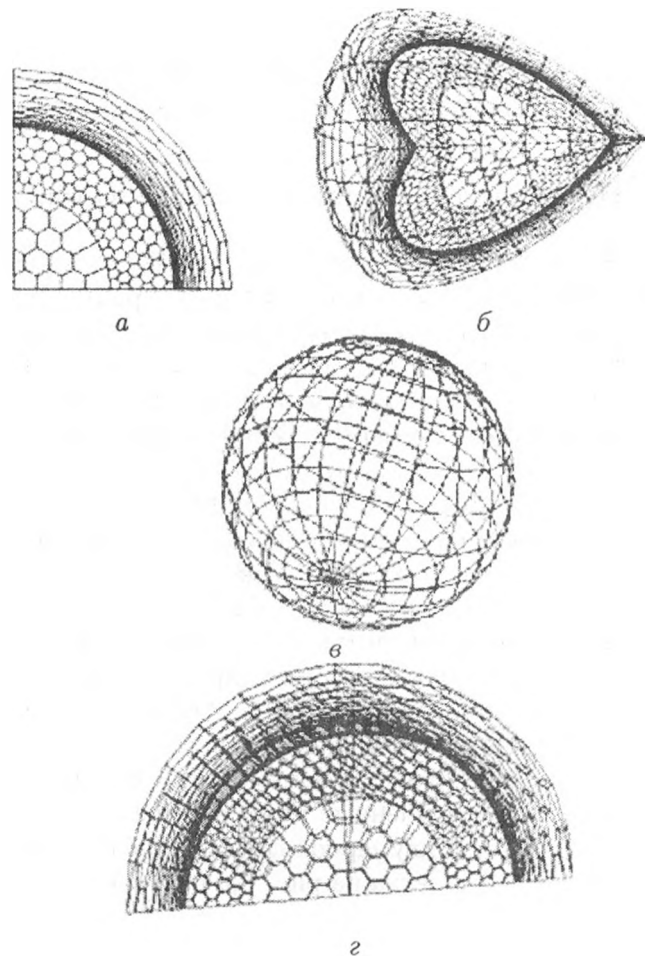


Рис. 10. Построение сетки из нерегулярной двумерной сетки поворотом вокруг оси с предварительным отображением: а — начальная двумерная сетка; б — поворот на угол $\pi/2$; в — поворот на угол 2π ; г — вид одного слоя

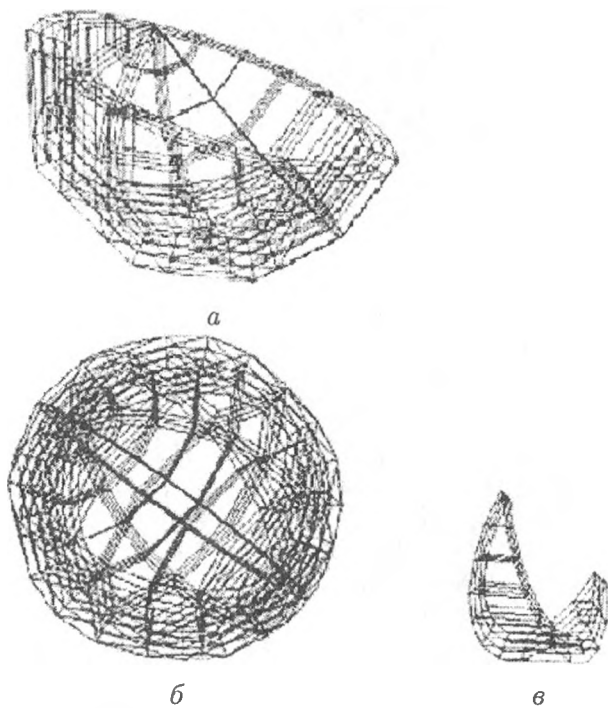


Рис. 9. Сетки, полученные вращением двумерной регулярной сетки вокруг оси: а — на угол π , 5 слоев; б — на угол 2π , 10 слоев; в — вид одного слоя

ки, полученной вращением указанной двумерной сетки вокруг оси OX на угол $\pi/2$ с предварительным отображением относительно оси OY . Сетка состоит из 5 слоев. На рис. 10,в изображе-

на поверхность сетки с такими же параметрами, но полученная вращением на угол 2π (сетка состоит из 20 слоев). Рис. 10,г демонстрирует один слой этих сеток, на нем хорошо видна линия, по которой выполнено отображение двумерной сетки.

Последний пример (рис. 11) демонстрирует возможности методики по построению сетки для нескольких математических областей. В качестве начальной двумерной сетки был использован упрощенный фрагмент сетки модельной задачи, в которой стальной пробойник ударяется о тонкий лист железа (см. рис. 11,а). Двумерная сетка покрывает две математические области. На рис. 11,б представлена трехмерная сетка, полученная вращением двумерной сетки вокруг оси OX . Для сетки пробойника построено 8 слоев, а для листа железа 20. На рис. 11,в

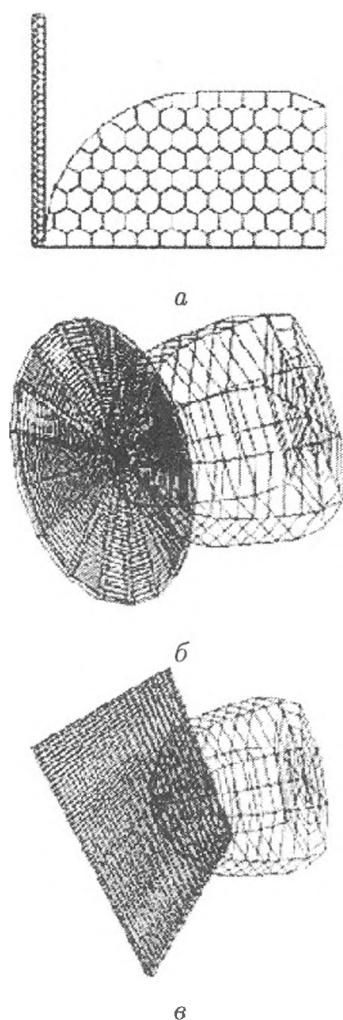


Рис. 11. Построение многообластных трехмерных сеток: *a* — начальная двухобластная двумерная сетка; *б, в* — построенные трехмерные сетки

представлена сетка, в которой сетка для пробыника также построена вращением вокруг оси OX и состоит из 8 слоев, а для сетки слоя железа выполнено отображение и перемещение в пространстве вдоль оси OZ .

Время построения трехмерных сеток

Одной из немаловажных характеристик программы, реализующей методику, является время, необходимое на построение трехмерных сеток. Поэтому приведем ряд замеров для построения сеток разных размеров (см. таблицу). Замеры выполнялись на персональной ЭВМ с конфигурацией Pentium III 1,13 ГГц, 512 Мбайт ОЗУ. Трехмерная сетка строилась перемещением двумерной сетки в пространстве вдоль оси OZ . В качестве начальных сеток использовались

3 двумерные нерегулярные сетки из 1 000, 10 000 и 100 000 ячеек соответственно. Этим объясняется большой разброс времен при построении сеток небольшого размера, так как для них вклад времени построения первого слоя — максимальный, а при увеличении количества слоев его доля падает.

Заметим, что при построении сетки вращением вокруг оси время построения несколько увеличивается, поскольку дополнительно приходится обрабатывать ось и последний слой сетки, а также выполнять уплотнение нумерации.

Заключение

Методика ТИМ позволяет проводить расчеты трехмерных течений на многогранных сетках с произвольным количеством связей в узлах. Методика построения нерегулярной многогранной листовой сетки на основе регулярной четырехугольной и нерегулярной многоугольной сеток ДМК позволила внедрить в методику ТИМ два дополнительных типа сеток — шестигранную с 6 связями в узлах и многогранную с 5 связями в узлах. На полученных сетках проведен ряд тестовых расчетов, результаты некоторых из них приведены в работе [1].

Алгоритмы для построения полистовой многогранной сетки работают быстрее, чем для построения нерегулярной многогранной сетки на основе тел Дирихле—Вороного (с 4 связями в узлах). Качество начальной сетки в областях с имеющимися типами симметрии получается выше, чем для сетки из тел Дирихле—Вороного.

Дальнейшее развитие методики расчета начальной сетки связано со следующими направлениями:

- 1) выделение особенности на оси путем объединения ячеек, лежащих вдоль оси;
- 2) использование переменного количества слоев в зависимости от удаления двумерной ячейки от оси;
- 3) преобразования сетки: вращение вокруг произвольной оси, переход от одного базиса к другому и проч.;
- 4) распараллеливание алгоритма применительно к очень большим сеткам, расчет которых невозможен на однопроцессорных ЭВМ в силу ограничений по оперативной памяти.

Времена построения трехмерных сеток

Количество ячеек результатирующей сетки	Количество ячеек двумерной сетки		
	1 000	10 000	100 000
10 000	0,05	0,15	—
100 000	0,42	0,56	1,6
500 000	2,2	2,5	3,6
1 000 000	4,5	4,62	5
2 500 000	12	12,7	14

Список литературы

1. Соколов С. С., Панов А. И., Воропинов А. А. и др. Методика ТИМ расчета трехмерных задач механики сплошных сред на неструктурированных многогранных лагранжевых сетках // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2005. Вып. 3. С. 37–52.
2. Рассказова В. В., Мотлохов В. Н., Еременко А. Ю., Софронов И. Д. Методика решения задач трехмерной нестационарной газовой динамики на нерегулярных лагранжевых сетках // Там же. 1998. Вып. 4. С. 44–57.
3. Софронов И. Д., Делов В. И., Дмитриева Л. В. и др. Методика Д для расчета многомерных задач механики сплошной среды в переменных Лагранжа на регулярной сетке // Там же. 1999. Вып. 4. С. 42–50.
4. Афанасьева Е. А., Винокуров О. А., Змушко В. В. и др. Комплекс программ МИМО-ЗА для решения двумерных и трехмерных задач газовой динамики // Конструирование алгоритмов и решение задач математической физики / Под ред. Г. П. Воскресенского, А. В. Забродина. М.: ИПМ АН СССР, 1989. С. 277–280.
5. Потехина Е. В. Модуль построения регулярных сеток в программе трехмерного расчета начальных данных // "Молодежь в науке". Сб. докл. Второй науч.-тех. конф. г. Саров, 12–14 ноября 2003 г. С. 43–49.
6. Sofronov I. D., Rasskazova V. V., Nesterenko L. V. The use of nonregular nets for solving two-dimensional nonstationary problems in gas dynamics // Numerical Methods in Fluid Dynamics / Ed. N. N. Yanenko, Yu. I. Shokin. M.: Mir Publishers, 1984. P. 82–121.
7. Панов А. И. Методика решения уравнения теплопроводности на нерегулярной сетке // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2004. Вып. 4. С. 27–40.
8. Соколов С. С. Метод расчета двумерных нестационарных упругопластических течений на нерегулярных многоугольных лагранжевых сетках // Там же. С. 62–80.

Статья поступила в редакцию 17.11.04.