

УДК 539.3

## ОПТИМАЛЬНОЕ ОХЛАЖДЕНИЕ НАГРЕТЫХ ТОНКОСТЕННЫХ СИСТЕМ ПРИ ПРОБОЕ ТЕПЛОЗАЩИТЫ

Н. И. Ободан, Н. А. Гук  
(Днепропетровский НУ)

Рассматриваются вопросы о возможном поведении тонкостенной системы, подвергающейся охлаждению после пробоя теплозащиты. Математическая модель представляется уравнениями термоупругости с дополнительными деформациями. Для описания поля температур используется решение задачи теплопроводности в конечноэлементной форме. Сформулирована задача управления процессом охлаждения; показано, что оптимальное управление представляет собой кусочно-постоянную функцию, имеющую конечное число точек разрыва.

Рассматривается поведение теплоизолированной тонкостенной системы (пластины), находящейся в тепловом поле и подвергающейся охлаждению после пробоя теплозащиты. В результате воздействия система находится в упругопластическом напряженно-деформированном состоянии. При принудительном охлаждении в системе возникает поле остаточных напряжений, которое "догружает" систему и может привести как к локальному хлопку в окрестности поврежденной части, так и к растрескиванию пластины в зонах, удаленных от места пробоя. Для предотвращения указанных явлений необходимо определить закон охлаждения, оптимизирующий процесс с точки зрения обеспечения прочности и устойчивости.

В качестве примера рассмотрим задачу об управлении процессом охлаждения локально нагретой до температуры  $T_0$  пластины  $\{-p \leq x \leq p; -d \leq y \leq d\}$ , которая получает пробой теплозащиты в центре, в пятне радиусом  $r$ . Необходимо провести охлаждение, чтобы за фиксированное время  $t^*$  поврежденная зона приобрела температуру окружающей среды  $T_c$ , т. е. перевести систему из начального состояния

$$T(x, y, z, 0) = \begin{cases} T_0, & -r \leq x \leq r, \quad -r \leq y \leq r; \\ T, & -p < x < -r, \quad r < x < p; \quad -d < y < -r, \quad r < y < d; \quad -h \leq z \leq h; \end{cases}$$

в окрестность состояния  $T(x, y, z, t^*) = T_c$ .

При переводе системы из начального состояния должен быть обеспечен минимум остаточных напряжений, возникающих в процессе охлаждения. В качестве критерия оптимальности  $Q$  используется условие

$$Q^{(T)} \Rightarrow \min \int_{\Omega} \sigma_{\text{ост}}^2(T, q(t)) d\Omega,$$

где  $\sigma_{\text{ост}}$  — остаточные напряжения, возникающие в нагретой конструкции после охлаждения;  $q(t)$  — функция отбора тепла.

Функция отбора тепла  $q(t)$  определяет изменение температурного поля  $T$  и выступает в роли управляющей функции при решении задачи о минимизации уровня остаточных напряжений. Для определения функции управления задача формулируется в дискретной форме. В качестве дискретной модели тела используется его конечноэлементное представление, начальное состояние после нагрева описывается вектором напряжений, неизвестные функции задачи дискретизируются.

Для определения поля остаточных напряжений используется теорема о разгрузке [1], в соответствии с которой поле остаточных напряжений  $\Sigma_{\text{ост}}(T_0)$  определяется как разность:

$$\Sigma_{\text{ост}}(T_0, T(t)) = \Sigma(T_0) - \Sigma_{\text{л}}(T(t)),$$

где  $T_0$  — температура нагрева тела после пробоя теплозащиты;  $\Sigma(T_0)$  — вектор напряжений в точках дискретизации упругопластического тела, нагретого до температуры  $T_0$ ;  $\Sigma(T_0) = \{\sigma_{kl}\}_{T_0}$ ,  $k, l = 1, 2$ ;  $\Sigma_{\text{л}}(T(t))$  — вектор напряжений в упругом теле, определяемый по линейной модели при разгрузке от воздействия охлаждающего потока  $q(t)$ ;  $t$  — время, изменяющееся параметрически.

Решение задачи о напряженно-деформированном состоянии после нагрева описывается уравнением вида

$$KU = R_{T_0}, \quad (1)$$

где  $K$  — матрица жесткости;  $U$  — вектор узловых перемещений;  $R_{T_0}$  — вектор правых частей, отображающий действие температурного нагружения.

Уравнение (1) может быть использовано в случае линейной зависимости между напряжениями и деформациями. При определении напряжений в неравномерно интенсивно нагретом теле необходимо учитывать нелинейные физические свойства материала. Поэтому для определения поля напряжений  $\Sigma(T_0)$  будем использовать метод конечных элементов [2] в сочетании с методом дополнительных деформаций, что позволяет от задачи термоупругопластичности перейти к задаче термоупругости с дополнительными деформациями. Под дополнительными деформациями будем понимать разность

$$\varepsilon^0 = \varepsilon - \varepsilon^*,$$

где  $\varepsilon$  — упругопластические деформации;  $\varepsilon^*$  — деформации упругого расчетного тела при одинаковых напряжениях. При расчете в исходном приближении принимается  $\varepsilon^0 = 0$ , решается упругая задача и определяются напряжения. С учетом дополнительных деформаций с предыдущего шага вычислений получаем поправку к правой части уравнения (1) в виде

$$R_n^0 = \int_{\Omega} B^T A \varepsilon_{(n-1)}^0 d\Omega,$$

где  $A$  — матрица коэффициентов, связывающая напряжения и деформации. Итерационная формула процесса вычислений поправки  $R_n^0$  может быть представлена в виде

$$KU_n = R_n^0.$$

Матрица жесткости остается постоянной на каждом шаге расчета, а в качестве критерия окончания итерационного процесса выбирается условие  $R_n^0 \rightarrow 0$ .

Поле напряжений  $\Sigma_{\text{л}}(T(t))$  определяется также с помощью метода конечных элементов с использованием той же матрицы жесткости  $K$ :

$$KU_{\text{л}} = R_{T(t)}.$$

Для описания поля температур  $T(t)$  используется решение задачи теплопроводности в конечно-элементной форме. Функционал, описывающий нестационарное температурное поле конструкции, имеет вид

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_v \left[ K_x \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + K_y \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 + K_z \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 - 2\rho C \dot{T} T \right] dV + \frac{1}{2} \int_{S_1} q(t) (T - T_c)^2 dS, \quad (2)$$

где  $K_x, K_y, K_z$  — коэффициенты теплопроводности в направлениях  $x, y, z$ ;  $C$  — удельная теплоемкость;  $\rho$  — плотность материала;  $V$  — объем пластины;  $S_1$  — поверхность пластины, подвергающаяся охлаждению.

Представим рассматриваемое тело в виде ансамбля конечных элементов (будем использовать трехмерный призматический восьмиузловой конечный элемент). Используем аппроксимацию на элементе в виде

$$\begin{aligned} T^{(m)}(x, y, z, t) &= H^{(m)}(x, y, z) T(t); \\ T'^{(m)}(x, y, z, t) &= B^{(m)}(x, y, z) T(t); \\ \dot{T}^{(m)}(x, y, z, t) &= H^{(m)}(x, y, z) \dot{T}(t). \end{aligned} \quad (3)$$

Матрицы  $H^{(m)}$ ,  $B^{(m)}$  — функции формы, описывающие температуру и градиент температур в середине  $m$ -го элемента в зависимости от узловых температур.

Рассматриваемый процесс — изотропный. После варьирования функционала (2) при соответствующей аппроксимации (3) и суммирования матриц элементов получаем систему дифференциальных уравнений первого порядка, описывающую процесс теплопроводности в дискретной форме:

$$C\dot{T} + K_T T = P, \quad (4)$$

где  $T^T = (T^1, T^2, \dots, T^N)$  — вектор узловых значений температуры;  $N$  — число узлов;  $C = \sum_m \int_{V^{(m)}} H^{(m)T} \rho C^{(m)} H^{(m)} dV^{(m)}$  — матрица теплоемкости пластины;

$K_T = \sum_m \int_{V^{(m)}} B^{(m)T} K_T^{(m)} B^{(m)} dV^{(m)}$  — матрица теплопроводности пластины.

Вектор правых частей записывается в виде

$$P = q(t) \left( \sum_P \int_{S^{(p)}} H^{(p)T} H^{(p)} dS^{(p)} T_c - \sum_P \int_{S^{(p)}} H^{(p)T} H^{(p)} dS^{(p)} T \right) = q(t) (P^1 - P^2 T),$$

где  $T_c$  — температура окружающей среды, до которой необходимо охладить пластину;  $S^{(p)}$  — элементы поверхности тела, на которых происходит охлаждение.

Разрешив систему (4) относительно  $\dot{T}$ , получим

$$\dot{T} = f(T, q) = C^{-1} P^1 q(t) - (C^{-1} K_T + C^{-1} P^2 q(t)) T, \quad (5)$$

где  $P^1 = \sum_P \int_{S^{(p)}} H^{(p)T} H^{(p)} dS^{(p)} T_c$ ;  $P^2 = \sum_P \int_{S^{(p)}} H^{(p)T} H^{(p)} dS^{(p)}$ , с начальным условием  $T(0) = \bar{T}_0$ ,  
 $\bar{T}_0 = \sum_P \int_{S^{(p)}} H^{(p)T} T_0 dS^{(p)}$ .

Для системы дифференциальных уравнений (5) задача управления может быть представлена в виде

$$\frac{dT^i}{dt} = f^i(T, q(t)); \quad T(0) = \bar{T}_0, \quad (6)$$

где  $i = \overline{1, N}$ .

Необходимо найти такое допустимое управление  $q(t)$ ,  $0 \leq t \leq t^*$ , чтобы соответствующее решение, удовлетворяющее системе дифференциальных уравнений (5), давало минимум функционала

$$Q(T) = \int_0^{t^*} \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 \sum_{m=1}^M \left( \sigma_{kl_{\text{ост}}}^{(m)} \right)^2 dt = \int_0^{t^*} f_0(T, q(t)) dt,$$

где  $T(q(t))$  — тепловое поле, определяемое из решения задачи теплопроводности при охлаждении  $q(t)$ . Выбор критерия оптимальности в ослабленной форме не ограничивает значения остаточных напряжений и определяется условиями задачи — пластину необходимо охладить до температуры окружающей среды из условий безопасности.

Добавим к координатам  $T^1, T^2, \dots, T^N$ , меняющимся по закону (6), еще одну координату  $T^0$ , закон изменения которой имеет вид

$$\frac{dT^0}{dt} = f_0(T, q(t)). \quad (7)$$

Для решения поставленной оптимальной задачи введем, кроме основной системы уравнений (6), еще одну систему уравнений относительно вспомогательных переменных  $\psi_i, i = \overline{0, N}$ :

$$\frac{d\psi_i}{dt} = - \sum_{j=0}^N \frac{\partial f^j(T, q)}{\partial T^i} \psi_j, \quad 0 \leq t \leq t^*, \quad (8)$$

с граничными условиями на правом конце вида

$$\psi_1(t^*) = \psi_2(t^*) = \dots = \psi_N(t^*) = 0 \quad \text{и} \quad \psi_0 = -1.$$

Система (8) линейна, однородна и при любых начальных условиях для  $\psi_i$  допускает единственное решение  $\psi = (\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_N)$ .

С помощью функции Гамильтона в виде

$$H = \int_0^{t^*} \left[ -\psi_0 f_0(T, q(t)) + \sum_{i=1}^N \psi_i \sum_{j=1}^N (C_{ij} P_j^1 q(t) - d_{ij} T_j - b_i q(t)) T_i \right] dt,$$

где приняты обозначения  $C^{-1} = \{C_{ij}\}$ ;  $C^{-1}K = \{d_{ij}\}$ ;  $C^{-1}P^2 = \{b_i\}$ ;  $P^1 = \{P_j^1\}$ , системы (7) и (8) могут быть представлены в виде следующей гамильтоновой системы для определения  $\frac{dT^i}{dt}$  и  $\frac{d\psi_i}{dt}$ :

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\psi_0 \sum_{k,l,m} 2\sigma_{kl}^{(m)}(T) \frac{d\sigma_{kl}^{(m)}}{dT_i} + \sum_{j=1}^N \psi_j (b_i q(t) + d_{ij}), \quad (9)$$

$$\frac{dT^i}{dt} = - \sum_{j=1}^N (C_{ij} P_j^1 q(t) - d_{ij} T^j) - b_i q(t) T^i. \quad (10)$$

Изложенная постановка задачи приводит к линейной зависимости функционала гамильтониана, формулируемого при получении оптимального решения, от функции управления охлаждением  $q(t)$ .

На основании принципа максимума, для того чтобы допустимое управление  $\alpha_1 \leq q(t) \leq \alpha_2$  ( $\alpha_1, \alpha_2$  — пределы изменения коэффициента теплоотдачи с поверхности кромок пластины) и соответствующая траектория  $T(t)$  давали решение оптимальной задачи, необходимо существование такой ненулевой непрерывной вектор-функции  $\psi(t)$ , соответствующей функциям  $q(t)$  и  $T(t)$ , что:

1) для всех  $t, 0 \leq t \leq t^*$  функция  $H$ , зависящая от  $q$ , достигает в точке  $q = q(t)$  максимума:

$$H(\psi(t), T(t), t, q) = M(\psi(t), T(t), t); \quad (11)$$

$$2) \quad \psi(t^*) = (-1, 0, 0, \dots, 0). \quad (12)$$

Линейность функции  $H$  относительно  $q(t)$ , а также условие (11) позволяют заключить, что оптимальное управление должно представлять собой кусочно-постоянную функцию, имеющую конечное число точек разрыва (точек переключения).

Алгоритм нахождения управления  $q(t)$  строится следующим образом.

При значении на первом шаге  $q = \alpha_2$  осуществляется интегрирование системы (10) для определения температурного поля. Использованием метода конечных элементов в сочетании с методом дополнительных деформаций определяется поле напряжений в упругом теле при разгрузке  $\Sigma_n(T(t))$

и поле напряжений в упругопластическом теле  $\Sigma(T_0)$  в момент начала разгрузки  $t = 0$ . В соответствии с теоремой о разгрузке определяется поле остаточных напряжений  $\Sigma_{ост}(t)$ .

Далее решается задача Коши для системы (9) с условиями (12) в точке  $t = t^*$ . Для вычисления матрицы  $\left(\frac{\partial \sigma_{klост}}{\partial T^i}\right)$  на каждом шаге по времени используется тот факт, что  $\sigma_{ост}$  зависят от  $T$  линейно и могут быть вычислены один раз в процессе вычисления вектора  $\psi$ . Одновременно, при интегрировании системы (9) на промежутке от  $t^*$  до 0 с начальными условиями, могут быть найдены точки переключения  $t_1, t_2, \dots, t_n$ , которые являются точками смены знака выражения

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \psi_j (C_{ij} P_j^1 - b_i T^i).$$

На втором шаге расчета интегрирование системы (10) на промежутке от 0 до  $t^*$  проводится с учетом переключений (12) по точкам, найденным на первом шаге. Затем осуществляется интегрирование системы (9) в обратном направлении (одновременно уточняется положение точек переключения). Итерационная процедура уточнения точек переключения продолжается до построения функции управления  $q(t)$  с заданной степенью точности.

Рассмотренный алгоритм был использован при построении функции охлаждения для пластины при следующих значениях геометрических и физических параметров: ширина пластины  $p = 0,015$  м; длина пластины  $d = 0,03$  м; радиус пятна нагрева  $r = 0,007$  м; максимальная температура нагрева  $T_0 = 500^\circ\text{C}$ ; температура окружающей среды  $T_c = 20^\circ\text{C}$ ; коэффициент теплопроводности материала  $\lambda = 0,23 \cdot 10^2$  Вт/(м  $\cdot$   $^\circ\text{C}$ ). Коэффициент теплоотдачи с поверхности прогретой части пластины принимался равным  $\alpha = 5,9$  Вт/(м<sup>2</sup>  $\cdot$   $^\circ\text{C}$ ), что соответствует охлаждению пластины на воздухе, а пределы изменения коэффициента теплоотдачи  $q(t) - \alpha_1 = 581$  Вт/(м<sup>2</sup>  $\cdot$   $^\circ\text{C}$ ) (охлаждение в стоячей воде),  $\alpha_2 = 2907,5$  Вт/(м<sup>2</sup>  $\cdot$   $^\circ\text{C}$ ) (охлаждение проточной водой). Значение  $t^*$  полагалось равным 20 с.

На рис. 1 показаны результаты расчета поля остаточных напряжений для различных способов охлаждения пластины. Кривая 1 соответствует процессу естественного охлаждения на воздухе, функция охлаждения является постоянной  $q(t) = \alpha$ . В результате такого охлаждения остаточные напряжения — растягивающие и концентрируются в центральной части пластины. При охлаждении пластины проточной водой  $q(t) = \alpha_2$  (кривая 2) наблюдается возникновение остаточных напряжений сжатия, которые локализуются вне зоны нагрева. Граница между областями растяжения и сжатия проходит приблизительно по границе пятна нагрева.

Охлаждение пластины с использованием алгоритма построения функции управления охлаждением  $q(t)$  приводит к возникновению остаточных напряжений существенно меньшей амплитуды (кривая 3 на рис. 1). Функция управления  $q(t)$  приведена на рис. 2. В точках переключения, най-

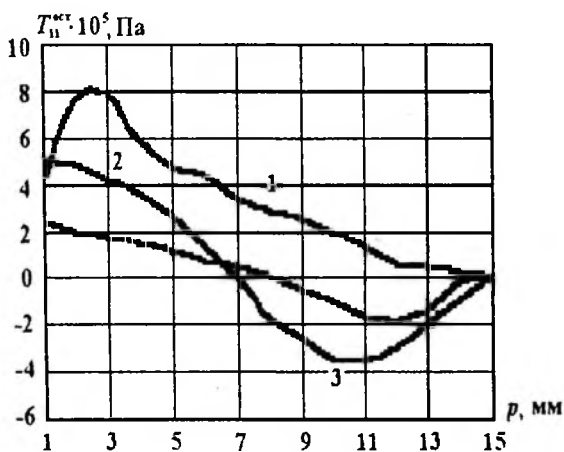


Рис. 1. Распределение остаточных напряжений в пластине для разных способов охлаждения: 1 — на воздухе; 2 — проточной водой; 3 — с помощью функции управления охлаждением

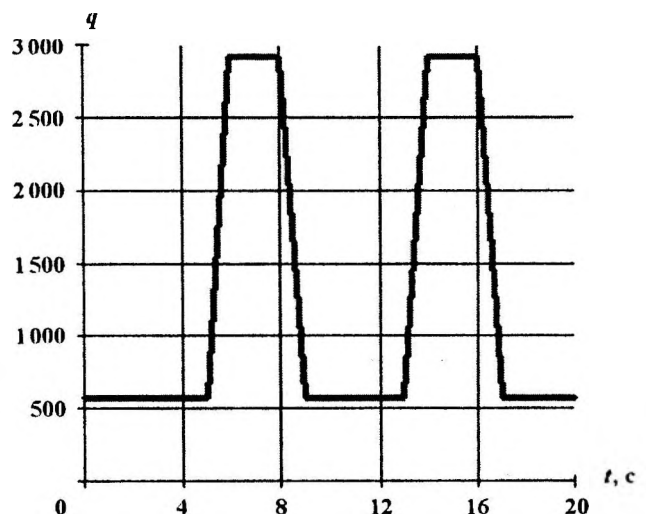


Рис. 2. Вид функции управления охлаждением

денных по алгоритму, функция управления изменяет значение. В момент времени  $t = t^*$  температура пластины равна температуре окружающей среды.

Анализируя полученные результаты, можно сделать вывод, что оптимальное управление процессом охлаждения локально нагретых тел позволяет снизить уровень остаточных напряжений и обеспечить прочность и устойчивость конструкции.

#### Список литературы

1. Поздеев А. А., Няшин Ю. И., Трусов П. В. Остаточные напряжения, теория и приложения. М.: Наука, 1982. С. 109.
2. Bathe K., Wilson E. L. Numerical method in finite element analysis. М.: Наука, 1985. С. 648.

Статья поступила в редакцию 28.07.04.

Исправленный вариант — 20.10.05.

---