

УДК 519.6

ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ TVD-ПОДХОДА К DS_n -МЕТОДУ РЕШЕНИЯ ТРЕХМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА НЕЙТРОНОВ В КРИВОЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

А. П. Арсентьев, В. Н. Писарев
(РФЯЦ-ВНИИТФ)

Рассматриваются некоторые особенности применения нелинейной схемы типа TVD для решения трехмерного нестационарного уравнения переноса нейтронов в криволинейных координатах. Схема, построенная путем модификации DS_n -метода на основе TVD-методологии, сохраняет основные достоинства DS_n -метода: аппроксимация на верхнем временном слое строится в рамках счетной ячейки, для решения разностных уравнений используется экономичный метод бегущего счета. Приведены результаты численных расчетов.

Ключевые слова: уравнение переноса, TVD-метод, DS_n -метод.

Введение

Математическое моделирование многомерных задач, описывающих процессы переноса нейтронов, представляет большой практический интерес. Для решения задач переноса нейтронов широко применяется DD-St-схема, полученная на основе DS_n -метода [1]. Известно, что DD-схема (схема второго порядка аппроксимации) в оптически плотной среде дает осциллирующее решение [2]. Причиной этого дефекта является применение в DD-схеме линейной интерполяции при аппроксимации выражения αN , описывающего поглощение нейтронов в кинетическом уравнении. Такая аппроксимация порождает антидиссипативную добавку в первом дифференциальном приближении. DD-St-схема улучшает монотонность решения. Другой подход к решению данной проблемы — снятие антидиссипации путем ее вычитания из остаточного члена. Такой метод реализуется в схеме DDAD [3]. Следует отметить, что при использовании DD-St- и DDAD-схем в случае, когда противоположные грани пространственной ячейки не освещены, приходится применять St-схему первого порядка точности.

Известно [4], что для гиперболических уравнений в классе линейных схем нет монотонной схемы со вторым порядком аппроксимации. Одним из путей решения рассматриваемых проблем (точность, монотонность) является применение нелинейных TVD-схем (Total Variation Diminishing) [5–15]. Если рассматривать чисто неявные TVD-схемы для многомерного уравнения переноса, то шаблон этих схем при аппроксимации функций-ограничителей в общем случае будет достаточно широким. Проблема может быть решена итерационным путем — можно, например, функции-ограничители брать с предыдущей итерации, но такой подход потребует существенного увеличения занимаемой памяти ЭВМ. В некоторых работах (см., например, [14]) рассмотрены неявные схемы, в которых функции-ограничители считаются по известным значениям величин с предыдущего шага.

В данной работе построена неявная схема на основе TVD-методологии для решения трехмерного уравнения переноса нейтронов, которая сохраняет основные достоинства DS_n -метода. Аппроксимация строится в рамках одной ячейки разностной сетки. Функции-ограничители в соотношениях связи вычисляются явно по известным значениям величин с предыдущего временного шага. Система разностных уравнений решается методом *бегущего счета*. По пространственным переменным

обеспечивается второй порядок аппроксимации, кроме отдельных точек экстремума и зоны больших градиентов. По угловой переменной полета нейтронов используется DD-St-схема. По времени используется схема выше первого порядка аппроксимации. Следует отметить, что в ряде случаев, в частности в приграничных ячейках, построение функций-ограничителей вызывает определенные проблемы (в принципе разрешимые) и счет производится по DD-St-схеме.

Постановка задачи

В области $\{\vec{R}\} = D \times (t^0 \leq t \leq t^n)$ рассматривается краевая задача для трехмерного нестационарного уравнения переноса нейтронов в одноклассовом приближении, записанного в криволинейной системе координат (q^1, q^2, q^3) :

$$\begin{aligned} \frac{rG}{v} \frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial q^1} (rAN) + \frac{\partial}{\partial q^2} (\sigma\eta N) + \frac{\partial}{\partial q^3} (rBN) - \frac{\partial}{\partial \psi} (\varphi_2 \sigma \eta N) + rG\alpha N = \\ = \frac{rG}{4\pi} \left(\beta \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} N d\mu d\psi + f \right), \end{aligned} \quad (1)$$

где $N(q^1, q^2, q^3, \vec{\Omega}, t)$ — плотность потока нейтронов в точке (q^1, q^2, q^3) , летящих в направлении $\vec{\Omega}$ в момент времени t ; $\vec{\Omega} = \{\xi, \eta, \mu\}$ — единичный вектор, $\mu = \cos \theta$, $\xi = \cos \psi \sqrt{1 - \mu^2}$, $\eta = \sin \psi \sqrt{1 - \mu^2}$, где θ — угол между $\vec{\Omega}$ и осью \vec{z} , ψ — угол между проекцией вектора $\vec{\Omega}$ на плоскость, проходящую через точку (r, z) перпендикулярно оси \vec{z} , и осью \vec{r} ; v — скорость нейтронов; α — коэффициент поглощения; β — коэффициент размножения; f — независимый источник; $A = \varphi_2 z_3 \xi + \frac{1}{r} (r_3 z_2 - r_2 z_3) \eta - \varphi_2 r_3 \mu$; $B = -\varphi_2 z_1 \xi + \frac{1}{r} (r_2 z_1 - r_1 z_2) \eta + r_1 \varphi_2 \mu$; $G = \varphi_2 \sigma$ — якобиан преобразования, $\sigma = r_1 z_3 - r_3 z_1$. В выражениях для A , B , σ использованы обозначения

$$r_i = \frac{\partial r}{\partial q^i}, \quad \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial q^i}, \quad z_i = \frac{\partial z}{\partial q^i}, \quad i = 1, 2, 3.$$

При выводе уравнения (1) в качестве исходного было взято уравнение переноса нейтронов, записанное в цилиндрической системе координат (см., например, [16]):

$$\frac{1}{v} \frac{\partial N}{\partial t} + \xi \frac{\partial N}{\partial r} + \mu \frac{\partial N}{\partial z} + \frac{\eta}{r} \frac{\partial N}{\partial \varphi} - \frac{\eta}{r} \frac{\partial N}{\partial \psi} + \alpha N = \frac{1}{4\pi} \left(\beta \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} N d\mu d\psi + f \right).$$

Криволинейные координаты q^1, q^2, q^3 связаны с цилиндрическими координатами r, φ, z соотношениями $r = r(q^1, q^2, q^3)$, $\varphi = \varphi(q^1, q^2, q^3)$, $z = z(q^1, q^2, q^3)$.

Для уравнения (1) в трехмерной выпуклой области D ставится смешанная задача Коши с начальными и граничными условиями

$$N(\vec{R}, \vec{\Omega}, t) \Big|_{t=0} = N^0(\vec{R}, \vec{\Omega}); \quad (2)$$

$$N(\vec{R}, \vec{\Omega}, t) \Big|_{\vec{R} \in \Gamma} = \gamma(\vec{\Omega}, t) \quad \text{при} \quad (\vec{\Omega}, \vec{n}) < 0, \quad (3)$$

где \vec{n} — внешняя нормаль к поверхности Γ области D .

Уравнение (1) интегрируется с учетом направления полета нейтронов (поведения характеристик).

Разностная сетка, геометрические величины

Сетка в пространстве $D \times (t^0 \leq t \leq t^n)$. Введем сетку по времени ($t^n, n = 0, 1, 2, \dots, N$), шаг сетки $\Delta t^n = t^{n+1} - t^n$. Область D трехмерного пространства по переменной φ разбивается полуплоскостями $\varphi (q^2) = \text{const}$: $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_p, \dots, \varphi_P$ (в общем случае $\varphi_0 = 0, \varphi_P = 2\pi$), шаг сетки $\Delta\varphi_p = \varphi_{p+1} - \varphi_p$. Полуплоскость, проходящую посередине между φ_p и φ_{p+1} , будем обозначать $\varphi_{p+1/2} = \frac{1}{2}(\varphi_p + \varphi_{p+1})$ (рис. 1, а).

В каждой полуплоскости $\varphi_{p+1/2}$ вводится сетка, узлы которой задаются цилиндрическими координатами вершин четырехугольных ячеек $(r_{i,j}^n, z_{i,j}^n)_{p+1/2}, i = 0, 1, \dots, I, j = 0, 1, \dots, J$ (рис. 2, а), на которые разбита полуплоскость. Пересечение поверхностей $q^1 = \text{const}$ и $q^3 = \text{const}$ с плоскостью листа образует линии сетки $i = \text{const}, j = \text{const}$. На рис. 2, б изображена сетка на плоскости номеров i, j . В общем случае $i = \text{const}, j = \text{const}$ являются поверхностями в трехмерном пространстве (квазиконусы, квазисферы, квазицилиндрические поверхности).

Каждая из полуплоскостей $\varphi_{p+1/2}$ может быть разбита на несколько сеточных областей, внутри которых сетка регулярная, т. е. топологически эквивалентна прямоугольной сетке. Структура сеток во всех полуплоскостях одинаковая. Линии сетки всех полуплоскостей, выходящие на ось z , пересекаются в одной точке. Схематично ячейка в пространстве $\{q^1, q^2, q^3\}$ имеет вид, изображенный на рис. 1, б.

Сетка в пространстве $\{\bar{\Omega}\}$. По угловым переменным μ и ψ ($-1 \leq \mu \leq 1, 0 \leq \psi \leq 2\pi$) сетка строится согласно ES_m -квадратуре (см., например, [1, 16]). Сетка определяется одним параметром M — четным целым числом. Количество интервалов по переменной μ равно M , сетка сим-

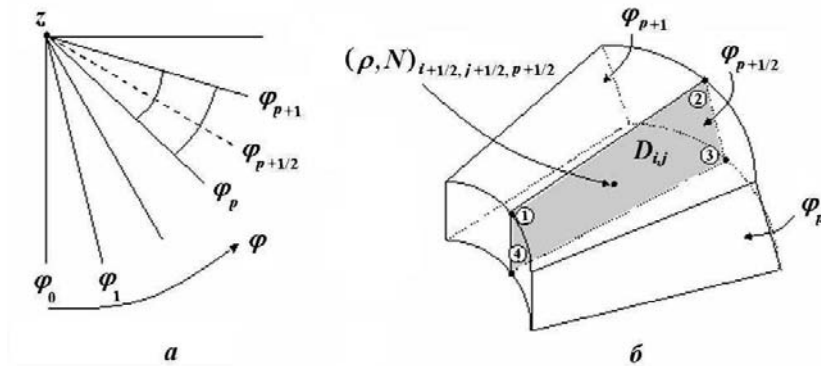


Рис. 1. Схема расположения полуплоскостей $\varphi (q^2) = \text{const}$ (а); схема ячейки в пространстве $\{q^1, q^2, q^3\}$ (б)

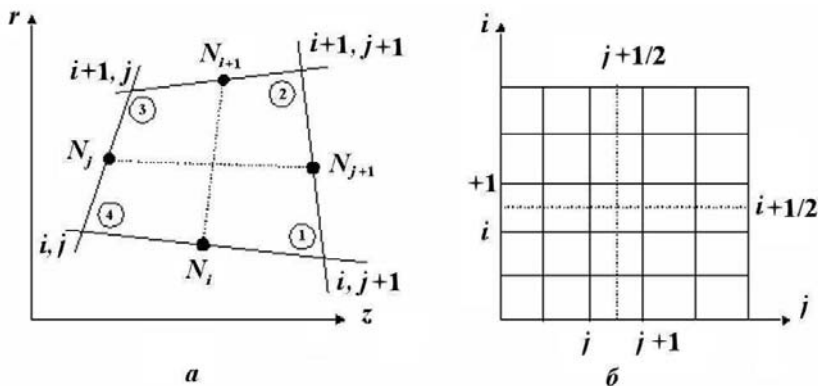


Рис. 2. Ячейка на полуплоскости $\varphi_{p+1/2}$ (а); сетка на плоскости номеров (i, j) (б)

метрична относительно $\mu = 0$. Поверхность единичной сферы разбивается на $M^2 + 2M$ ячеек с площадью $\frac{4\pi}{M^2 + 2M}$. Параметры сетки вычисляются по формулам

$$\mu_m = \chi \left(1 - \frac{4m^2}{M^2 + 2M} \right), \quad m = 1, 2, \dots, \frac{M}{2}; \quad \mu_m = -\mu_{M-m+1}, \quad m = \frac{M}{2} + 1, \dots, M;$$

$$\psi_{k,m} = 2\pi \frac{k}{K_m}, \quad k = 0, 1, \dots, K_m; \quad \psi_{k+1/2,m} = 2\pi \frac{k+0,5}{K_m}, \quad k = 0, 1, \dots, K_m - 1,$$

где $\chi = \sqrt{\frac{M^2 + 2M}{M^2 + 2M - 2}}$; $K_m = \begin{cases} 4m, & m = 1, 2, \dots, \frac{M}{2}; \\ 4(M - m + 1), & m = \frac{M}{2} + 1, \dots, M. \end{cases}$

Сеточные значения ξ и η вводятся следующим образом:

$$\xi_{k+1/2,m} = \cos \psi_{k+1/2,m} \sqrt{1 - \mu_m^2}; \quad \eta_{0,m} = 0;$$

$$\eta_{k+1,m} = \eta_{k,m} + \xi_{k+1/2,m} (\psi_{k+1,m} - \psi_{k,m}); \quad \eta_{k+1/2,m} = \sin \psi_{k+1/2,m} \sqrt{1 - \mu_m^2}; \quad k = 0, 1, \dots, K_m - 1.$$

Каждое направление $\vec{\Omega}$ характеризуется двумя параметрами: $\psi_{k+1/2,m}$, μ_m .

Сетка в пространстве $\{\vec{\Omega}\}$ обеспечивает важные свойства: выполнение диффузионного предела для разностной схемы, $\operatorname{div}(\vec{\Omega}N) = 0$ при $N = \operatorname{const}$, $|\vec{\Omega}| = 1$.

Разностная схема

Для удобства дальнейшего изложения введем некоторые обозначения и укажем сеточные функции N , которые будут использованы в разностной схеме.

Для сокращения записи будем применять обозначения

$$N = N_{i+1/2,j+1/2,p+1/2,k+1/2,m}^{n+1/2}; \quad N^n = N_{i+1/2,j+1/2,p+1/2,k+1/2,m}^n;$$

$$N_i = N_{i,j+1/2,p+1/2,k+1/2,m}^{n+1/2}; \quad N_j = N_{i+1/2,j,p+1/2,k+1/2,m}^{n+1/2}; \quad N_p = N_{i+1/2,j+1/2,p,k+1/2,m}^{n+1/2};$$

$$\Delta_\zeta(\bullet) = (\bullet)_{\zeta+1} - (\bullet)_\zeta; \quad (\bullet)_{\zeta+1/2} = \frac{(\bullet)_\zeta + (\bullet)_{\zeta+1}}{2},$$

где ζ — любой индекс; (\bullet) — любое выражение, в том числе с индексами (индексы перестановочны).

Напомним, что геометрия задается цилиндрическими координатами вершин ячеек сетки $(r_{i,j,p+1/2}, z_{i,j,p+1/2})$. Будем использовать геометрические величины с индексами:

$$x_{i+1/2,j,p+1/2} = (x_{j,p+1/2})_{i+1/2} = \frac{1}{2} \left((x_{j,p+1/2})_i + (x_{j,p+1/2})_{i+1} \right);$$

$$x_{i,j+1/2,p+1/2} = (x_{i,p+1/2})_{j+1/2} = \frac{1}{2} \left((x_{i,p+1/2})_j + (x_{i,p+1/2})_{j+1} \right);$$

$$\Delta_i(x_{j,p+1/2}) = (x_{j,p+1/2})_{i+1} - (x_{j,p+1/2})_i; \quad \Delta_j(x_{i,p+1/2}) = (x_{i,p+1/2})_{j+1} - (x_{i,p+1/2})_j.$$

При построении разностной схемы потребуются геометрические величины с целым индексом p . Определять их будем интерполяцией по следующей формуле:

$$x_p = \frac{\Delta\varphi_p}{\Delta\varphi_{p-1} + \Delta\varphi_p} x_{p-1/2} + \frac{\Delta\varphi_{p-1}}{\Delta\varphi_{p-1} + \Delta\varphi_p} x_{p+1/2}.$$

В вышеприведенных формулах под x понимаются величины r , z и производные от них.

Площадь ячейки на плоскости $p = \text{const}$ (см. рис. 2, а)

$$S_{i,j} = \int_{D_{i,j}} \sigma dq^1 dq^3 = \frac{1}{2} [(r_{(2)} - r_{(4)}) (z_{(1)} - z_{(3)}) + (r_{(3)} - r_{(1)}) (z_{(2)} - z_{(4)})].$$

Объем ячейки, отнесенный к единице азимутального угла, при $p = \text{const}$

$$V_{i,j} = \int_{D_{i,j}} r \sigma dq^1 dq^3 = \frac{1}{6} (r_{(1)} + r_{(2)} + r_{(3)}) [r_{(1)} (z_{(3)} - z_{(2)}) + r_{(2)} (z_{(1)} - z_{(3)}) + r_{(3)} (z_{(2)} - z_{(1)})] + \\ + \frac{1}{6} (r_{(1)} + r_{(3)} + r_{(4)}) [r_{(1)} (z_{(4)} - z_{(3)}) + r_{(3)} (z_{(1)} - z_{(4)}) + r_{(4)} (z_{(3)} - z_{(1)})].$$

Объем пространственной ячейки $V_{i,j,p} = \int_{V_{i,j,p}} r \sigma \varphi_2 dq^1 dq^2 dq^3 = \Delta \varphi_p V_{i,j}$.

Переменная μ входит в уравнение (1) как параметр, по ней будем применять метод дискретных ординат с узлами μ_m .

Интегрируя (1) для каждого μ_m , $m = 1, 2, \dots, M$, по ячейке фазового объема $V_{i,j,p,k}^n = [t^n, t^{n+1}] \times D_{i,j} \times [\varphi_p, \varphi_{p+1}] \times [\psi_k, \psi_{k+1}]$ и применяя итерационный процесс по интегралу столкновений, получаем разностную схему

$$\frac{V_{i,j,p}}{\Delta t^n} \left((N^{\nu+1})^{n+1} - (N^{\nu+1})^n \right) + \Delta_i (r A N^{\nu+1}) + \Delta_j (r B N^{\nu+1}) + \Delta_p (C N^{\nu+1}) + \\ + \Delta_k (E N^{\nu+1}) + V_{i,j,p} \alpha N^{\nu+1} = V_{i,j,p} Q^\nu + \frac{1}{4\pi} V_{i,j,p} f^{n+1}, \quad (4)$$

$$i = 0, 1, \dots, I-1, \quad j = 0, 1, \dots, J-1, \quad p = 0, 1, \dots, P-1, \quad k = 0, 1, \dots, K_m-1,$$

где ν — итерационный индекс;

$$A_i = \Delta \varphi_p \left[\Delta_j (z_{i,p+1/2}) \xi_{k+1/2,m} - \Delta_j (r_{i,p+1/2}) \mu_m + \right. \\ \left. + \frac{1}{r_i \Delta \varphi_p} \left(\Delta_p (z_{i,j+1/2}) \Delta_j (r_{i,p}) - \Delta_p (r_{i,j+1/2}) \Delta_j (z_{i,p}) \right) \eta_{k+1/2,m} \right],$$

$$B_j = \Delta \varphi_p \left[-\Delta_i (z_{j,p+1/2}) \xi_{k+1/2,m} + \Delta_i (r_{j,p+1/2}) \mu_m + \right. \\ \left. + \frac{1}{r_j \Delta \varphi_p} \left(\Delta_p (r_{i+1/2,j}) \Delta_i (z_{j,p}) - \Delta_p (z_{i+1/2,j}) \Delta_i (r_{j,p}) \right) \eta_{k+1/2,m} \right],$$

$$C_p = (S_{i,j})_p \eta_{k+1/2,m}; \quad E_k = -(S_{i,j})_{p+1/2} \Delta \varphi_p \frac{\eta_{k,m}}{\Delta \psi_k};$$

$$E_{k+1} = -(S_{i,j})_{p+1/2} \Delta \varphi_p \frac{\eta_{k+1,m}}{\Delta \psi_k}; \quad Q^\nu = \frac{\beta}{4\pi} (SN)_{i+1/2,j+1/2,p+1/2},$$

$$(SN)_{i+1/2,j+1/2,p+1/2} = \frac{4\pi}{M^2 + 2M} \sum_{m=1}^{M_g} \sum_{k=0}^{K_m-1} (N)_{i+1/2,j+1/2,p+1/2,k+1/2,m}.$$

У величин N и SN с итерационными индексами ν , $\nu + 1$ опущен индекс $n + 1/2$.

Для разрешения системы разностных уравнений (4) применяется метод бегущего счета: трехмерная сетка в счетной области упорядочивается в зависимости от направления полета частиц $\vec{\Omega}$ таким образом, чтобы при переходе от ячейки к ячейке передать влияние граничных условий. Для решения системы используются начальное условие (2), условие на внешней границе (3), на плоскости $\varphi = 0$, $\varphi = 2\pi$ происходит циркуляция решения. Граничное условие на оси \vec{z} можно разрешать различными способами. Можно, например, решить уравнение переноса на оси \vec{z} или передавать

значения нейтронного потока через ось, сохранив его направление. В схеме, представленной ниже, использован второй подход.

Система уравнений (4) не замкнута. Для замыкания используются соотношения, связывающие значения искомой функции в центре фазовой ячейки и на ее гранях. В данной работе будут рассмотрены два вида соотношений связи: в первом случае — распространенная и простая в реализации DD-St-схема, во втором случае — соотношения связи, полученные на основе TVD-методологии.

DD-St-схема

Соотношения связи в DD-St-схеме выбираются в соответствии с направлением потока на гранях, т. е. в соответствии со знаками величин $A_i, A_{i+1}, B_j, B_{j+1}, C_p, C_{p+1}, E_k, E_{k+1}$. Например, соотношения связи для направления i выбираются следующим образом:

$$N_{i+1} = a_i N + (1 - a_i) N_i \quad \text{при } A_i > 0, \quad A_{i+1} \geq 0; \quad (5)$$

$$N_i = a_i N + (1 - a_i) N_{i+1} \quad \text{при } A_i \leq 0, \quad A_{i+1} < 0; \quad (6)$$

$$N_i = N_{i+1} = N \quad \text{при } A_i \leq 0, \quad A_{i+1} \geq 0. \quad (7)$$

При $A_i > 0, A_{i+1} < 0$ выражение $\Delta_i (rAN^{\nu+1})$ переносится в правую часть (4) как известное. Соотношения связи по направлениям j, p, k выбираются аналогично.

Соотношение связи по времени:

$$N^{n+1} = a_n N + (1 - a_n) N^n. \quad (8)$$

Весовые параметры $\{a_i, a_j, a_p, a_k, a_n\} \in [1, 2]$ являются параметрами схемы. При $a = 2$ получаем немонотонную схему второго порядка (DD-схема), при $a = 1$ — монотонную схему первого порядка (St-схема).

После подстановки соотношений связи по всем направлениям в (4) получаем формулу для вычисления значения функции N в середине ячейки сетки для μ_m . После этого неизвестные значения на гранях ячейки сетки находятся по экстраполяционным формулам типа (5)–(7) и (8).

Алгоритм DD-St-схемы реализован таким образом, что весовые параметры a_i, a_j, a_p, a_k, a_n первоначально полагаются равными 2. Если среди вычисленных значений функции N в середине ячейки или на ее гранях оказались отрицательные значения, то ячейка пересчитывается с параметрами $\{a_i, a_j, a_p, a_k, a_n\} = 1$.

Следует отметить, что в представленной выше DD-St-схеме ячейки, в которых затенены обе противоположащие грани, разрешаются всегда по схеме первого порядка (см. (7)).

TVD-схема

В DD-схеме имеет место линейное представление сеточной функции в ячейке сетки, а в St-схеме — кусочно-постоянное. TVD-схемы основаны на кусочно-линейной реконструкции (представлении) дискретных сеточных функций, удовлетворяющей TVD-свойству или свойствам, в некотором смысле близким к нему или его обобщающим. Для того чтобы решение удовлетворяло TVD-условию (неувеличение полной вариации численного решения), развита специальная техника кусочно-линейной реконструкции сеточных функций. Наклоны кусочно-линейных представлений сеточных функций внутри дискретных ячеек для выполнения TVD-условия ограничиваются специальными ограничителями L . Они действуют таким образом, чтобы новая схема имела второй порядок аппроксимации и сохраняла при этом монотонность в смысле невозрастания полной вариации функции. В этом заключается главное назначение ограничителей.

В двумерном и трехмерном случаях существуют различные определения вариации функции. На настоящий момент не получено достаточных условий, обеспечивающих ограниченность всех вариаций численного решения на произвольной сетке. По этой причине все известные методы многомерной реконструкции, включая метод, описанный ниже, не имеют строгого обоснования. Применимость этих методов в каждом конкретном случае должна быть численно обоснована.

Рассмотрим принцип применения TVD-методологии в простейшем случае. Пусть известны значения функции $N_{i-1/2}$, $N_{i+1/2}$, $N_{i+3/2}$ (рис. 3, а). Требуется реконструировать значения функции N в узлах сетки (или, что то же самое, написать соотношения связи функции в середине ячейки и узлах сетки). Функция представляется в кусочно-линейной форме:

$$N_{i+1} = N_{i+1/2} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} \right)_{i+1/2} \frac{h}{2}; \quad N_i = N_{i+1/2} - \left(\frac{\partial N}{\partial x} \right)_{i+1/2} \frac{h}{2}.$$

В качестве $\left(\frac{\partial N}{\partial x} \right)_{i+1/2}$ берутся некоторые функции-ограничители L , которые зависят от односторонних разностных производных $a = \frac{N_{i+1/2} - N_{i-1/2}}{h_i}$, $b = \frac{N_{i+3/2} - N_{i+1/2}}{h_{i+1}}$.

Существует достаточно много ограничителей, которые определяют монотонность и точность схем. В дальнейшем будем рассматривать следующие ограничители:

1) $L(a, b) = 0,5 (\text{sign } a + \text{sign } b) \max \{ \min(\zeta |a|, |b|), \min(|a|, \zeta |b|) \}$.

При $\zeta = 1$ получаем ограничитель min mod , при $\zeta = 1,4$ — ограничитель Ван Лира, при $\zeta = 2$ — ограничитель superbee .

2) Чакравати—Ошера:

$$L(a, b) = 0,5 (\text{sign } a + \text{sign } b) \left(\frac{1 - \omega}{2} \min(\zeta |a|, |b|) + \frac{1 + \omega}{2} \min(|a|, \zeta |b|) \right), \quad 1 \leq \zeta \leq \frac{3 - \omega}{1 - \omega}.$$

Параметр ω определяет тип схемы и порядок аппроксимации.

Следует отметить, что только ограничитель min mod позволяет получить монотонное решение. Другие ограничители в общем случае монотонности не обеспечивают.

В схеме решения многомерного уравнения переноса нейтронов, рассмотренной ниже, кусочно-линейную реконструкцию будем применять вдоль каждого направления i, j, p, k независимо. Ограничители, использующие односторонние производные по направлению, вычисляются явно по известным значениям величин с предыдущего временного шага.

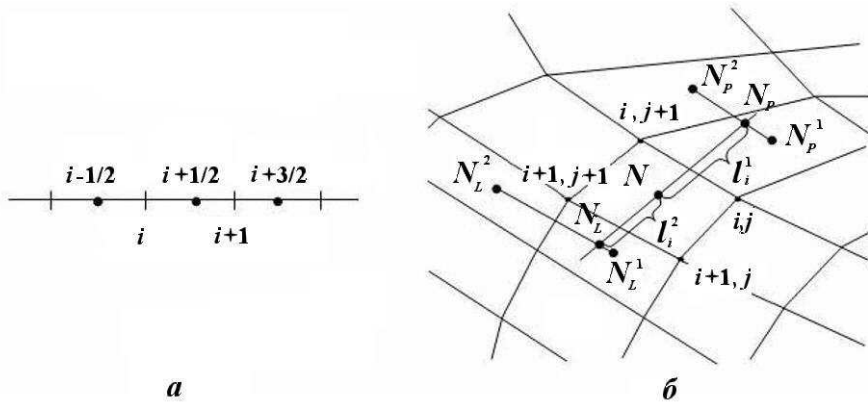


Рис. 3. Схема реконструкции: а — в одномерном случае; б — по индексу i на листе

Реконструкция по направлениям i, j . Соотношения связи в ячейке по направлению i , основанные на TVD-технологии, выглядят следующим образом:

$$N_i = N - \frac{\partial N}{\partial l_i} |l_i| \quad \text{при } A_i \leq 0, \quad A_{i+1} < 0;$$

$$N_{i+1} = N + \frac{\partial N}{\partial l_i} |l_i| \quad \text{при } A_i > 0, \quad A_{i+1} \geq 0;$$

$$N_i = N - \frac{\partial N}{\partial l_i} |l_i|, \quad N_{i+1} = N + \frac{\partial N}{\partial l_i} |l_i| \quad \text{при } A_i \leq 0, \quad A_{i+1} \geq 0,$$

где $|l_i| = \frac{\sqrt{(z_{i+1,j+1/2,p+1/2} - z_{i,j+1/2,p+1/2})^2 + (r_{i+1,j+1/2,p+1/2} - r_{i,j+1/2,p+1/2})^2}}{2}$.

Аппроксимацию односторонних производных по направлению будем осуществлять по формулам (рис. 3, б) $\frac{\partial N^n}{\partial l_i^1} \approx \frac{(N - N_P)^n}{|l_i^1|} = a_{i+1/2}^n$; $\frac{\partial N^n}{\partial l_i^2} \approx \frac{(N_L - N)^n}{|l_i^2|} = b_{i+1/2}^n$, где N_P и N_L вычисляются по следующему алгоритму:

1. Для данной ячейки с номером $(i + 1/2, j + 1/2)$ в соседних столбцах с номерами $i - 1/2, i + 3/2$ ищутся отрезки, соединяющие середины двух ячеек, через которые проходит прямая, проходящая через середины граней i и $i + 1$ ячейки $(i + 1/2, j + 1/2)$ (см. рис. 3, б).
2. Находятся точки пересечения прямой с данными отрезками.
3. В найденных точках интерполяцией через $\{N_P^1, N_P^2\}^n, \{N_L^1, N_L^2\}^n$ вычисляются соответственно N_P и N_L (см. рис. 3, б).

Если ввести традиционную для TVD-схем функцию-ограничитель $L_{i+1/2}^n = L(a_{i+1/2}^n, b_{i+1/2}^n)$, то соотношения связи можно записать в виде

$$N_i^{\nu+1} = N^{\nu+1} - L_{i+1/2}^n |l_i| \quad \text{при} \quad A_i \leq 0, \quad A_{i+1} < 0; \quad (9)$$

$$N_{i+1}^{\nu+1} = N^{\nu+1} + L_{i+1/2}^n |l_i| \quad \text{при} \quad A_i > 0, \quad A_{i+1} \geq 0; \quad (10)$$

$$N_i^{\nu+1} = N^{\nu+1} - L_{i+1/2}^n |l_i|, \quad N_{i+1}^{\nu+1} = N^{\nu+1} + L_{i+1/2}^n |l_i| \quad \text{при} \quad A_i \leq 0, \quad A_{i+1} \geq 0. \quad (11)$$

По аналогии с работой [15] для улучшения сходимости итераций будем использовать соотношения связи (9)–(11) в модифицированном дробно-линейном виде. Например, формула (9) принимает вид

$$N_i^{\nu+1} = N^{\nu+1} \left(1 - \frac{L_{i+1/2}^n |l_i|}{N^n} \right).$$

Аналогично получаются соотношения связи по направлению j .

Отметим, что соотношения связи (11), в отличие от соотношения (7), позволяют разрешать ячейки с порядком аппроксимации выше первого.

Реконструкция по направлению p . Соотношения связи по направлению p имеют следующий вид:

$$N_p^{\nu+1} = N^{\nu+1} \left(1 - \frac{L_{p+1/2}^n |l_p|}{N^n} \right) \quad \text{при} \quad C_p < 0, \quad C_{p+1} < 0 \quad (\pi < \psi < 2\pi);$$

$$N_{p+1}^{\nu+1} = N^{\nu+1} \left(1 + \frac{L_{p+1/2}^n |l_p|}{N^n} \right) \quad \text{при} \quad C_p > 0, \quad C_{p+1} > 0 \quad (0 < \psi < \pi),$$

где $|l_p| = \frac{\varphi_{p+1} - \varphi_p}{2}$;

$$L_{p+1/2}^n = L(a_{p+1/2}^n, b_{p+1/2}^n), \quad a_{p+1/2}^n = \frac{\partial N^n}{\partial l_p^1} \approx \frac{N^n - N_{p-1/2}^n}{\varphi_{p+1/2} - \varphi_{p-1/2}}, \quad b_{p+1/2}^n = \frac{\partial N^n}{\partial l_p^2} \approx \frac{N_{p+3/2}^n - N^n}{\varphi_{p+3/2} - \varphi_{p+1/2}}.$$

Соотношения связи для аппроксимации по азимутальной переменной полета нейтронов. Численные исследования показали, что использование соотношений связи по азимутальному углу ψ (индекс k) с использованием TVD-методологии понижает точность расчета (см., например, задачу 1 в следующем разделе). Оказалось, что при счете по DD-схеме второго порядка точности ($a_k = 2$) функция N_k практически всегда положительна, но имеет большой градиент или незначительную немонотонность. В результате TVD-методология по этой переменной приводит к схеме, близкой к схеме первого порядка. Поэтому по азимутальной переменной целесообразно применять DD-схему второго порядка аппроксимации ($a_k = 2$).

Если же сосчитанные значения $N_{k+1/2}$ или экстраполированные значения N_k, N_{k+1} оказываются отрицательными, то производится пересчет по схеме первого порядка, т. е. по азимутальной переменной применяется DD-St-схема.

Соотношения связи для аппроксимации по времени. В приведенных выше реконструкционных формулах функция-ограничитель берется с n -го шага, внося при этом погрешность $O(\tau)$. Это дает возможность применить алгоритм бегущего счета, однако снижает порядок аппроксимации по времени до первого порядка. В таких условиях, казалось бы, по времени можно применять St-схему ($a_n = 1$). Но численные исследования показали, что тогда точность расчетов падает. Применение же по времени DD-St-схемы в сочетании с TVD-соотношениями связи по пространственным переменным приводит к тому, что в ряде случаев итерационный процесс не удается завершить из-за периодических переключений схемы.

Для повышения точности расчетов построим аппроксимацию по времени с порядком выше первого. Для этого используем известный прием сравнения точного и численного решений простейшего уравнения переноса.

Рассмотрим уравнение переноса

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \kappa N = F, \quad \kappa > 0, \quad (12)$$

где κ — некоторый параметр, и разностную схему для его решения

$$\frac{N^{n+1} - N^n}{\tau} + \kappa N^{n+1/2} = F^n, \quad N^{n+1} = a_n N^{n+1/2} + (1 - a_n) N^n, \quad 1 \leq a_n \leq 2. \quad (13)$$

Разностное решение имеет вид

$$N^{n+1} = \frac{1 - \kappa\tau \left(1 - \frac{1}{a_n}\right)}{1 + \frac{\kappa\tau}{a_n}} N^n + \tau \frac{1}{1 + \frac{\kappa\tau}{a_n}} F^n. \quad (14)$$

Рассмотрим точное решение для (12) на интервале $[t^n, t^{n+1}]$:

$$N^{n+1} = e^{-\kappa\tau} N^n + \frac{1}{\kappa} (1 - e^{-\kappa\tau}) F^*, \quad F^* = \frac{\int_{t^n}^{t^{n+1}} F e^{-\kappa(t^{n+1}-t)} dt}{\int_{t^n}^{t^{n+1}} e^{-\kappa(t^{n+1}-t)} dt}. \quad (15)$$

Выберем a_n из условия совпадения решений (14) и (15), предположив, что $F^* = F^n$. Приравняв соответствующие выражения для коэффициентов, получим

$$a_n = \frac{\kappa\tau (1 - e^{-\kappa\tau})}{\kappa\tau - (1 - e^{-\kappa\tau})}. \quad (16)$$

Видно, что $\lim_{\kappa\tau \rightarrow \infty} a_n = 1$, $\lim_{\kappa\tau \rightarrow 0} a_n = 2$.

Применяя приближенную формулу (см. [1]) $e^{-\kappa\tau} \approx \begin{cases} \frac{1 - 0,5\kappa\tau}{1 + 0,5\kappa\tau}, & \kappa\tau \leq 1; \\ \frac{1}{1 + \kappa\tau + (\kappa\tau)^2}, & \kappa\tau > 1, \end{cases}$ аппроксимирующую экспоненту в (16), для a_n получаем выражение

$$a_n = \begin{cases} 2, & \kappa\tau \leq 1; \\ 1 + \frac{1}{\kappa\tau}, & \kappa\tau > 1. \end{cases} \quad (17)$$

Такой выбор a_n обеспечивает в (14) положительность функции N при условии, что $F^n \geq 0$, и монотонность схемы (13).

Полученные результаты для схемы (13) обобщим на схему (4) для трехмерного случая. Приведем схему (4) к виду (13), подставив предварительно в (4) соотношения связи по пространственным переменным и азимутальному углу. В результате для κ получим выражение

$$\kappa = \frac{v_g \left(V_{i,j,p} \alpha_g + \sum_m A_m^- \right)}{V_{i,j,p}}, \quad (18)$$

где A_m^- — коэффициенты, вычисленные на неосвещенных гранях ячейки для данного направления полета частиц исходя из балансных и дополнительных соотношений связи для данной ячейки.

В дальнейшем параметр a_n , вычисленный с использованием формул (17), (18), будем обозначать через a_n^* .

Численные расчеты

Для испытания методики были проведены численные исследования на ряде тестовых задач, в частности, методика опробована на расчетах λ методом установления. Некоторые из материалов исследований представлены ниже.

Расчет λ методом установления производился по формуле

$$\lambda = \frac{\psi^{n+1} - \psi^n}{0,5\Delta t (\psi^n + \psi^{n+1})}, \quad \psi^n = \sum_{i,j,p} (SN)_{i+1/2,j+1/2,p+1/2}^n V_{i+1/2,j+1/2,p+1/2},$$

которая, за исключением случая $a_n = 2$, является несогласованной с аппроксимацией производной по времени [17]. Наибольшее отклонение λ от *точного* решения будет иметь место при счете с $a_n = 1$. Сравнение с точным решением результатов, полученных с параметрами $a_n = 1$ и a_n^* , позволяет численно оценить точность нелинейной схемы с вычисляемым параметром a_n^* , не прибегая к более глубокому анализу.

Расчеты проводились с автоматическим выбором шага исходя из среднего числа итераций $\nu = 5$.

Задача 1. Эта задача заимствована из работы [18]. Для цилиндра $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq z \leq 2$ с нулевым источником ($f = 0$), нулевыми граничными условиями и коэффициентами $\alpha = 1,34$, $\beta = 2,25$ рассчитывается методом установления временная постоянная размножения нейтронов λ . Скорость нейтронов $v = 100$. Задача считалась с ES_8 -квadrатурой и константой сходимости $\varepsilon = 10^{-7}$.

При построении сетки ось \vec{z} проходила через ось цилиндра, число листов — 16. Рассматривались два вида сеток в листе — ортогональная и неортогональная типа *черепаха* (рис. 4), с различным числом точек. Сетка типа *черепаха* содержит большое количество ячеек (примерно 20–30%), у которых две противоположные грани не освещены.

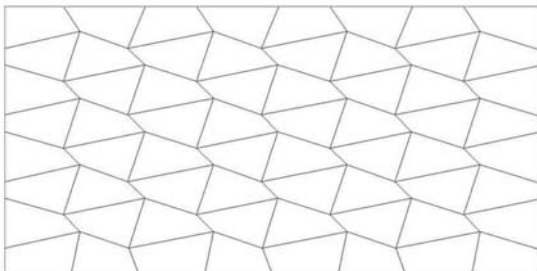


Рис. 4. Неортогональная сетка (8 × 8) типа *черепаха*

За *точное* принято решение, полученное по DD-St-схеме на ортогональной сетке с числом точек в листе 1024×1024 ; $\lambda_{\text{точн}} = 14,8358$.

В табл. 1, 2 и на рис. 5, а, б приведены результаты расчетов параметра λ методом установления для различного числа точек в листе (сетка 1 — 8×8 , сетка 2 — 16×16 , сетка 3 — 32×32 , сетка 4 — 64×64 , сетка 5 — 128×128) соответственно на ортогональной и неортогональной сетках с использованием DD-St-схемы и схем с различными ограничителями — min mod, superbee, Ван Лира и Чакравати—Ошера с двумя наборами параметров: $L_{1/3,3} = \{\omega = 1/3, \zeta = 3\}$; $L_{0,3} = \{\omega = 0, \zeta = 3\}$.

Таблица 1

Задача 1. Значения λ , полученные на ортогональной сетке по различным схемам

Номер сетки	Схема					
	DD-St	min mod	superbee	Ван Лира	$L_{1/3,3}$	$L_{0,3}$
1	14,5256	14,1547	15,1987	14,8897	14,5062	14,6930
2	14,7592	14,5179	15,0950	15,0047	14,7204	14,7974
3	14,8166	14,7256	14,9237	14,9118	14,8008	14,8237
4	14,8307	14,8028	14,8614	14,8597	14,8258	14,8321
5	14,8344	14,8318	14,8460	14,8443	14,8365	14,8399

Таблица 2

Задача 1. Значения λ , полученные на неортогональной сетке по различным схемам

Номер сетки	Схема					
	DD-St	min mod	superbee	Ван Лира	$L_{1/3,3}$	$L_{0,3}$
1	13,3443	13,7639	14,6864	14,3732	14,0626	14,2102
2	13,8573	14,3924	14,9819	14,8674	14,5851	14,6514
3	14,2339	14,6794	14,9026	14,8823	14,7580	14,7788
4	14,4929	14,7882	14,8592	14,8555	14,8139	14,8198
5	14,6504	14,8259	14,8484	14,8458	14,8334	14,8349

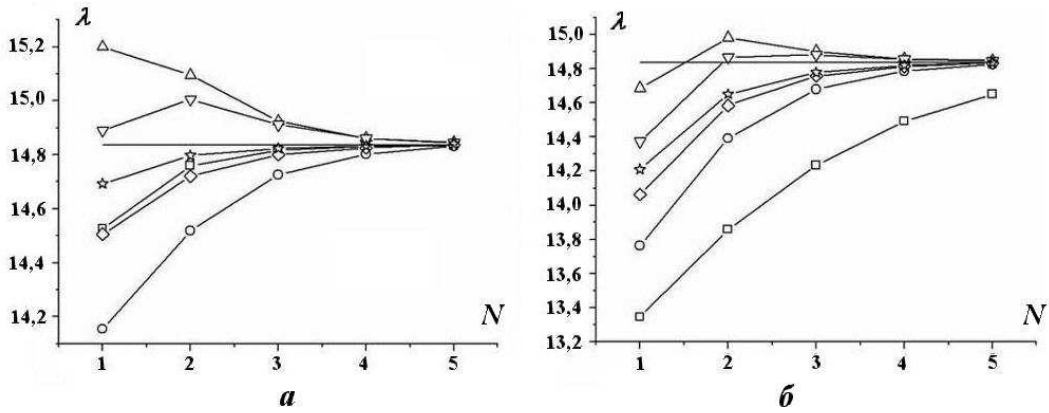


Рис. 5. Задача 1. Значения параметра λ для различного числа точек в листе, полученные по различным схемам на ортогональной (а) и неортогональной (б) сетках (N — номер сетки): \square — DD-St; \circ — min mod; \triangle — superbee; ∇ — Ван Лира; \diamond — Чакравати—Ошера, $L_{1/3,3}$; \star — Чакравати—Ошера, $L_{0,3}$; — — точное решение

Из анализа таблиц и графиков видно, что схема с параметрами $\omega = 0$, $\zeta = 3$ ограничителя Чакравати—Ошера ($L_{0,3}$) является наиболее оптимальной по точности расчетов. Значения параметра λ приближаются к точному решению при измельчении сетки.

В табл. 3, 4 и на рис. 6 представлены значения параметра λ , полученные на ортогональной и неортогональной сетках в расчетах с применением по азимутальной переменной полета нейтронов TVD-схемы и DD-St-схемы. По пространственным переменным использовалась TVD-схема. В TVD-схемах применялся ограничитель Чакравати—Ошера $L_{0,3}$.

Численные расчеты показали, что применение реконструкции по азимутальной переменной полета нейтронов с использованием TVD-методологии несколько снижает точность расчетов по сравнению с традиционными соотношениями DD-St-схемы. Это связано с тем, что функция N по азимутальной переменной имеет большой градиент и ограничитель Чакравати—Ошера близок к ограничителю min mod. А при использовании DD-St-схемы счет ведется в основном по DD-схеме.

В табл. 5 и на рис. 7 приведены значения параметра λ , полученные в расчетах с использованием схемы TVD с $L_{0,3}$ по i, j, p и DD-St-схемы по k . Соотношения связи по временной переменной

Таблица 3

Задача 1. Значения λ на ортогональной сетке с различными соотношениями связи по азимутальной переменной

Номер сетки	Схема	
	TVD с $L_{0,3}$ по i, j, p , DD-St по k	TVD с $L_{0,3}$ по i, j, p, k
1	14,6930	14,7629
2	14,7974	14,8786
3	14,8237	14,8892
4	14,8321	14,9022
5	14,8399	14,9106

Таблица 4

Задача 1. Значения λ на неортогональной сетке с различными соотношениями связи по азимутальной переменной

Номер сетки	Схема	
	TVD с $L_{0,3}$ по i, j, p , DD-St по k	TVD с $L_{0,3}$ по i, j, p, k
1	14,2102	14,2847
2	14,6514	14,7332
3	14,7788	14,8447
4	14,8198	14,8899
5	14,8349	14,9090

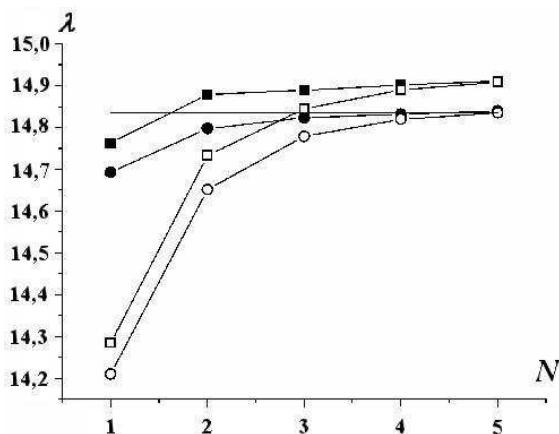


Рис. 6. Задача 1. Значения параметра λ для различного числа точек в листе на ортогональной и неортогональной сетках (N — номер сетки) с различными соотношениями связи по азимутальной переменной (индекс k): ■ — ортогональная сетка, TVD-схема по k ; □ — неортогональная сетка, TVD-схема по k ; • — ортогональная сетка, DD-St-схема по k ; ○ — неортогональная сетка, DD-St-схема по k ; — — точное решение

Таблица 5

Задача 1. Значения λ на неортогональной сетке с различным выбором параметра a_n в соотношениях связи по временной переменной

Номер сетки	τ	$\varepsilon_{сх}$	λ	
			$a_n = 1$	$a_n = a_n^*$
1	$1 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-4}$	15,2941	15,1372
2	$5 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-5}$	15,2084	15,1110
3	$2,5 \cdot 10^{-3}$	$2,5 \cdot 10^{-5}$	15,0566	14,9984
4	$1,25 \cdot 10^{-3}$	$1,25 \cdot 10^{-5}$	14,9580	14,9246
5	$6,25 \cdot 10^{-4}$	$6,25 \cdot 10^{-6}$	14,9001	14,8819
6	$3,125 \cdot 10^{-4}$	$3,125 \cdot 10^{-6}$	14,8680	14,8564

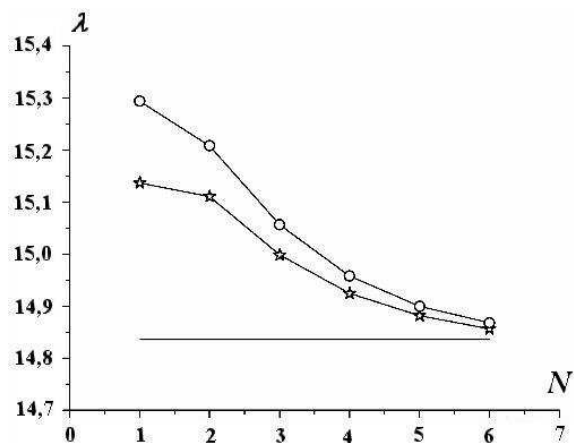


Рис. 7. Задача 1. Значения параметра λ для различного числа точек в листе на неортогональной сетке (N — номер сетки) с различными соотношениями связи по временной переменной (индекс t): ○ — $a_n = 1$; ★ — $a_n = a_n^*$; — — точное решение

варьировались: $a_n = 1$ и $a_n = a_n^*$. Расчеты проводились на сгущающихся неортогональных сетках с фиксированными шагами по времени. При измельчении сетки в листе — от размеров 8×8 (сетка 1) до 256×256 (сетка 6) — измельчаются временной шаг и $\varepsilon_{\text{сх}}$ — соответственно от $\tau = 10^{-2}$ до $\tau = 3,125 \cdot 10^{-4}$, от $\varepsilon = 10^{-4}$ до $\varepsilon = 3,125 \cdot 10^{-6}$.

Видно, что имеет место сходимость к точному решению и использование соотношений связи по временной переменной с параметром a_n^* обеспечивает меньшее отклонение от точного решения, чем схема первого порядка по времени.

Задача 2. Эта задача составлена на основе задачи Рида [2] и заимствована из работы [3]. Рассматривается стационарная задача для сферической системы, состоящей из семи областей (рис. 8) с различной оптической плотностью.

Скорость нейтронов $v = 1$. В областях 1 и 4 заданы источники. На внешней границе задан входящий поток $N(\vec{R}, \vec{\Omega}, t) \Big|_{\vec{R} \in \Gamma} = 1$ при $(\vec{\Omega}, \vec{n}) < 0$. Задавалось начальное распределение нейтронов: $N^0 = 0,1$. Задача считалась с ES_{20} -квадратурой. В листе бралась равномерная сетка 65×65 , число листов — 10.

Задача 2 решалась в стационарном приближении $\left(\frac{\partial N}{\partial t} = 0\right)$. В TVD-схеме ограничители считались по значениям величин с предыдущей итерации. В качестве *точного* взято решение, полученное по одномерной программе на подробной сетке [3].

На рис. 9 приведены профили $SN(r)$ вдоль прямой линии на листе от центра к экватору, полученные по различным схемам.



Рис. 8. Параметры задачи 2

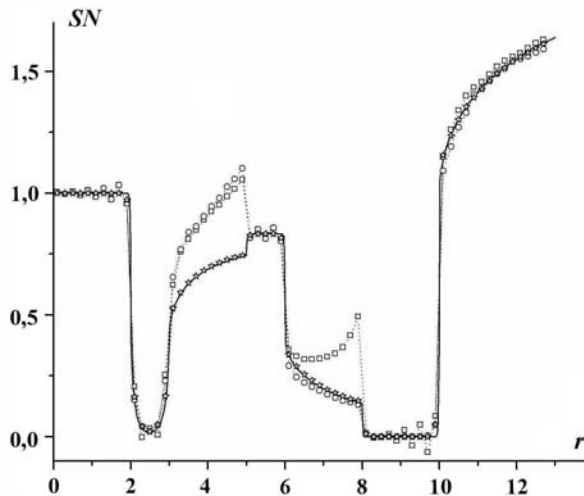


Рис. 9. Задача 2. Профиль $SN(r)$ вдоль прямой линии на листе от центра к экватору: \square — DD-схема; \circ — DD-St-схема; \star — TVD-схема; — — точное решение

Из анализа графиков видно, что DD-схема во всех областях дает неудовлетворительное решение. Немонотонность сохраняется в оптически плотных областях 1, 4 и при использовании схемы DD-St. В оптически прозрачных областях 3, 5, 7 схемы DD, DD-St приводят к искажению результатов. По схеме TVD получена удовлетворительная точность и монотонность. Некоторые колебания в профилях в области 7, полученные по схемам DD, DD-St, объясняются более выраженным лучевым эффектом (если взять другой луч или другую квадратуру, то профиль будет несколько иной).

На рис. 10, а, б приведены значения функции $\Delta_i(SN) = (SN)_{i+1/2} - (SN)_{i-1/2}$ в области 7 вдоль канала ($p = 1, j = 55$) по углу в листе ($i = 1, \dots, 64$) и значения функции $\Delta_p(SN) = (SN)_{p+1/2} - (SN)_{p-1/2}$ в области 7 вдоль канала ($i = 33, j = 55$) по листам. Видно, что TVD-схема обладает лучшими свойствами монотонности по сравнению с DD-St-схемой.

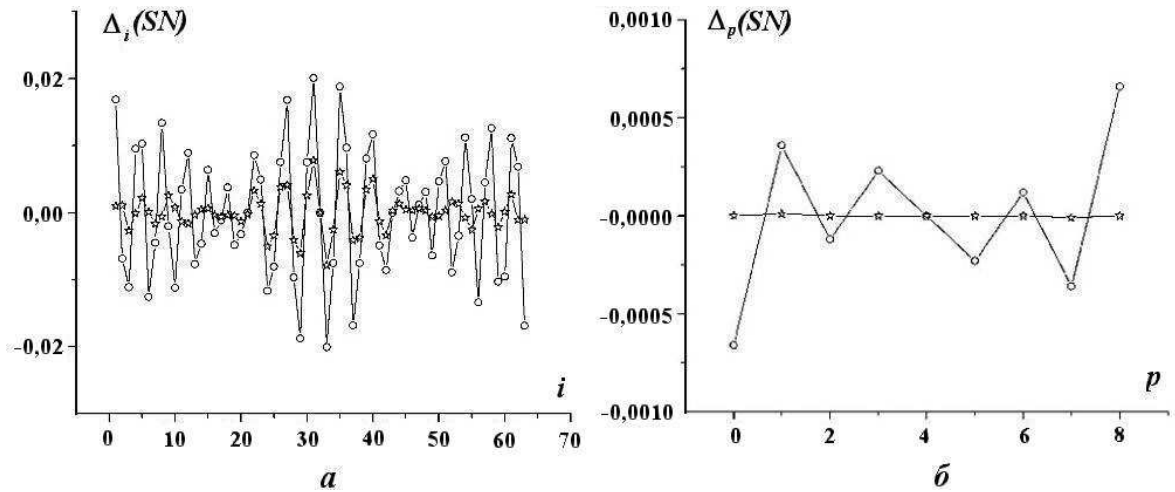


Рис. 10. Задача 2. Профили $\Delta_i(SN)$ (а), $\Delta_p(SN)$ (б): \circ — DD-St-схема; \star — TVD-схема

Задача 3. Для сферической системы $0 \leq R \leq 4$ с нулевым источником ($f = 0$), нулевыми граничными условиями и коэффициентами $\alpha = 1,6628$, $\beta = 2,7983$ рассчитывается методом установления временная постоянная размножения нейтронов λ . Скорость нейтронов $v = 110$.

Задача считалась с ES_8 -квadrатурой. В листе бралась равномерная сетка 20×20 , число листов — 10. Точное решение для данной задачи имеет значение $\lambda_{\text{точ}} \approx 117,73$, полученное на подробной сетке.

По DD-St- и DD-схемам получено $\lambda = 117,62$, по TVD-схеме с параметром $a_n = 1$ получено $\lambda = 121,039$, по TVD-схеме с параметром $a_n = 2$ — $\lambda = 117,65$, по TVD-схеме с весом $a_n = a_n^*$ — $\lambda = 117,80$. Видно, что схема с вычисляемым параметром a_n^* дает результат, близкий к точному решению и к решению, полученному по схеме второго порядка по времени ($a_n = 2$). То есть схема с вычисляемым весом a_n^* по результату автоматически приближается к DD-схеме по времени.

Заключение

Построена новая неявная схема типа TVD для решения трехмерного уравнения переноса нейтронов в криволинейных координатах с листовой структурой сетки. Характерные особенности схемы:

- сохраняются основные достоинства DS_n -метода. Аппроксимация на верхнем временном слое строится в рамках счетной ячейки, для решения разностных уравнений используется экономичный метод бегущего счета;
- схема консервативная, имеет порядок аппроксимации по времени выше первого и второй порядок аппроксимации по пространству, кроме окрестностей отдельных точек с экстремумами;
- новая схема отличается хорошей точностью и обладает улучшенными свойствами монотонности.

Список литературы

1. *Carlson B. G.* A method of characteristics and other improvements in solution method for the transport equation // J. Nucl. Sci. Eng. 1976. Vol. 61. P. 408–425.
2. *Reed W. H.* New difference schemes for the neutron transport equation // Ibid. 1971. Vol. 46, No. 2. P. 309–314.
3. *Гаджиев А. Д., Кондаков И. А., Писарев В. Н., Стародумов О. И., Шестаков А. А.* Метод дискретных ординат с искусственной диссипацией (DDAD-схема) для численного решения уравнения переноса нейтронов // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2003. Вып. 4. С. 13–24.
4. *Годунов С. К.* Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Мат. сб. 1959. Вып. 3, № 47. С. 271–306.
5. *Колган В. П.* Применение принципа минимальных значений производных к построению конечно-разностных схем для расчета разрывных решений газовой динамики // Уч. зап. ЦАГИ. 1972. Т. 3, № 6. С. 68–77.
6. *Van Leer B.* Towards the ultimate conservative difference scheme I. The quest for monotonicity // Lecture Notes in Physics. 1973. Vol. 18. P. 163–168.
7. *Boris J. P., Book D. L.* Flux-corrected transport. I. SHASTA, a fluid transport algorithm that works // J. Comp. Phys. 1973. Vol. 11. P. 38–69.
8. *Harten A.* High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // Ibid. 1983. Vol. 49. P. 357–393.
9. *Harten A.* On a class of high resolution total variation stable finite difference schemes // SIAM J. Num. Anal. 1984. Vol. 21 (1). P. 1–23.
10. *Osher S., Chakravarthy S.* High resolution schemes and the entropy condition // Ibid. 1984. Vol. 21 (5). P. 955–984.
11. *Toro E. F.* Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics. Springer, 1999.
12. *Yee H. C.* A Class of High-Resolution Explicit and Implicit Shock-Capturing Methods. NASA Ames Research Center Computational Fluid Dynamics Branch. USA, California, 1989.
13. *Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов А. Ю.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001.
14. *Чирков Д. В., Черный С. Г.* Сравнение точности и сходимости некоторых TVD-схем // Вычислительные технологии. 2000. Т. 5, № 5. С. 86–107.
15. *Гаджиев А. Д., Шестаков А. А., Завьялов В. В.* Применение TVD-подхода к DS_n -методу решения уравнения переноса теплового излучения // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2009. Вып. 2. С. 37–48.
16. *Басс Л. П., Волощенко А. М., Гермогенова Т. А.* Методы дискретных ординат в задачах о переносе излучения. М.: ИПМ АН СССР, 1986.
17. *Гольдин В. Я., Юдинцев В. Ф.* О расчете квазирегулярного и регулярного режима для уравнения переноса // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1985. Вып. 2. С. 43–49.
18. *Трощив В. Е., Шумилин В. А.* Разностная схема решения двумерного уравнения переноса на нерегулярных четырехугольных сетках // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1986. Т. 26, № 2. С. 230–241.