

УДК 517.956

ТЕПЛОВЫЕ ВОЛНЫ ОТ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ И ОБЪЕМНЫХ ИСТОЧНИКОВ В ДВУМЕРНЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ И ПЛОСКИХ ОБЛАСТЯХ

П. И. Певная, Б. П. Тихомиров
(РФЯЦ-ВНИИЭФ)

Рассматривается несколько простых сопряженных задач нелинейной теплопроводности в неоднородной среде с источниками энергии. Задачи имеют точное решение и могут использоваться для тестирования расчетных методик и программ. Приведены результаты расчетов двумерных осесимметричных задач, полученные разностным методом с использованием схемы продольно-поперечной прогонки.

Ключевые слова: нелинейная теплопроводность, сопряженная задача, сферические, цилиндрические и плоские тепловые волны, составные решения в двумерных областях, тестовые задачи.

Введение

В настоящей работе рассматривается несколько простых сопряженных двумерных задач, имеющих точное решение, которые можно использовать для калибровки методик и программ численного моделирования нелинейной теплопроводности в среде с источниками энергии.

Работа состоит из трех разделов. В первом разделе описываются базовые (элементарные) решения [1–3], приводятся условия сопряжения решений на плоской границе раздела сред, имеющих в общем случае разные уравнения состояния, пробеги излучения и функции горения. Во втором разделе формулируется несколько двумерных задач о распространении составных тепловых волн от сосредоточенных и объемных источников в осесимметричных областях. Отмечается, что аналогичные задачи могут быть поставлены и для плоских областей. В третьем разделе приведены результаты расчетов нескольких двумерных задач, полученные по методике КИО [4] с использованием разностной схемы продольно-поперечной прогонки.

1. Сопряжение автомодельных тепловых волн одного или разных типов симметрии на плоской границе раздела сред

В неограниченной области $D = \{-\infty < x < +\infty, 0 < y < +\infty\}$ рассматривается двумерное уравнение теплопроводности с объемным источником, мощность которого является функцией температуры. Уравнение записано в декартовых ($w = 0$) и цилиндрических ($w = 1$) координатах:

$$\rho \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\chi(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{1}{y^w} \frac{\partial}{\partial y} \left(y^w \chi(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right) + s \rho \frac{E}{t}, \quad (1)$$

где $\chi(T) = aT^n$; $E = bT^k$; ρ, a, b, k, n, s — заданные константы. Не ограничивая общности, можно считать, что плотность $\rho = 1$.

Плоскостью $x = 0$ область D делится на две подобласти, каждая из которых может иметь свои константы. Величинам, относящимся к первой ($x < 0$) подобласти, приписывается нижний индекс 1, ко второй — индекс 2. Если в i -й подобласти $s_i = 0$, то предполагается, что в ней действует мгновенный сосредоточенный источник. Для краткости будем говорить, что такая подобласть является инертной средой (ИС). Если $s_i > 0$, подобласть является горючей смесью (ГС).

Для уравнения (1) рассматривается несколько простых задач о распространении тепловой волны в инертной и горючей средах. Возможны различные сочетания сред: инертная с инертной (ИС + ИС), горючая с инертной (ГС + ИС), горючая с горючей (ГС + ГС). В настоящей работе для построения точного решения применяется метод составных автомодельных решений. Возможность такого подхода была показана в работе [1] для плоского одномерного случая. В рассматриваемом двумерном случае в качестве базовых решений можно взять, как будет видно из дальнейшего, точные решения одномерных задач о мгновенном сосредоточенном источнике [2, 3], а также одномерных задач об объемном источнике [1] для плоской, цилиндрической и сферической геометрий.

Опишем эти решения. Будем рассматривать квазилинейное уравнение теплопроводности вида

$$\rho \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{r^w} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^w \chi(T) \frac{\partial T}{\partial r} \right) + s \rho \frac{E}{t}, \quad 0 \leq r; \quad w = 0, 1, 2, \quad (2)$$

считая, что в начальный момент времени температура равна нулю всюду, кроме точки $r = 0$, в которой произошло либо энерговыделение ($s = 0$), либо инициирование горения ($s > 0$). Предполагается, что пространственное распределение температуры $T(r, t)$ соответствует степенному закону выделения энергии

$$\int_0^{+\infty} E r^w dr = Q t^s, \quad (3)$$

где Q — заданная константа. При $s = 0$ имеем известную задачу о мгновенном сосредоточенном источнике [2, 3], при $s > 0$ задача (2), (3) названа в работе [1] задачей об объемном (пространственно-распределенном) источнике.

В настоящей работе вместо дополнительного условия (3), обеспечивающего единственность решения, удобно взять другое условие, приводящее к эквивалентной задаче, а именно предполагать известным закон изменения температуры в точке $r = 0$: $T(0, t) = T_0 t^q$.

Данная задача имеет автомодельное решение, которое можно представить в конечной замкнутой форме [1]:

$$T(r, t) = T_0 t^q \left[1 - \left(\frac{r}{r_\Phi} \right)^2 \right]^{\frac{1}{n+1-k}}, \quad n+1-k > 0, \quad (4)$$

$$r_\Phi = \left[\frac{2}{(n+1-k)} \frac{a}{\delta} \frac{a}{b} T_0^{n+1-k} \right]^{0.5} t^\delta, \quad (5)$$

$$\delta = \frac{1+q(n+1-k)}{2}. \quad (6)$$

Константа, входящая в функцию источника, равна

$$s = \frac{1}{2} \{ 1 + w + q [(1+w)(n+1) + (1-w)k] \}. \quad (7)$$

Константа Q в (3) выражается через T_0 :

$$Q = \frac{1}{1+w} b T_0^k \left[\frac{2}{(n+1-k)} \frac{a}{\delta} \frac{a}{b} T_0^{n+1-k} \right]^{\frac{1+w}{2}} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1+w}{2}\right) \Gamma\left(1 + \frac{k}{n+1-k}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{1+w}{2} + \frac{k}{n+1-k}\right)}. \quad (8)$$

Заметим, что в частном случае, когда $s = (1+w)/2$, температура на левой границе сохраняет постоянное значение, так как $q = 0$; при этом $\delta = 1/2$. Когда $s = 0$, т. е. отсутствует объемный источник, на границе реализуется температурный режим с показателем степени

$$q = - \frac{1+w}{(1+w)(n+1) + (1-w)k}.$$

Из геометрической структуры аналитического решения (4)–(8) следует, что его можно использовать в качестве базового (элементарного) решения при построении составных автомодельных решений в двумерных осесимметричных и плоских областях. Действительно, базовые решения одного или разных типов симметрии, заданные в полупространствах, легко сопрягаются на границе раздела веществ, так как производная температуры по нормали к границе равна нулю, а непрерывность температуры обеспечивается, если справедливы равенства

$$T_{01} = T_{02};$$

$$q = \frac{2s_1 - (1 + w_1)}{(1 + w_1)(n_1 + 1) + (1 - w_1)k_1} = \frac{2s_2 - (1 + w_2)}{(1 + w_2)(n_2 + 1) + (1 - w_2)k_2}; \quad (9)$$

$$n_1 - k_1 = n_2 - k_2; \quad (10)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)_1 = \left(\frac{a}{b}\right)_2, \quad (11)$$

выполнение которых может быть достигнуто за счет выбора свободных параметров. Из (9), (10) следует равенство $\delta_1 = \delta_2$. Для простоты будем считать, что $T_0 = 1$ и

$$\left(\frac{2}{(n+1-k)\delta}\frac{a}{b}\right)_1 = \left(\frac{2}{(n+1-k)\delta}\frac{a}{b}\right)_2 = 1. \quad (12)$$

Тогда положение фронта тепловых волн в полупространствах описывается простой формулой $r_\phi = t^\delta$. Дробь (11) можно найти из (12). С учетом (6), (10) выражения для констант функции горения можно представить в виде

$$s_1 = \delta(1 + w_1) + (2\delta - 1)\frac{k_1}{n + 1 - k}; \quad s_2 = \delta(1 + w_2) + (2\delta - 1)\frac{k_2}{n + 1 - k}. \quad (13)$$

В случае осесимметричной геометрии параметр w_1 (левое полупространство) берется для определенности равным 2 (сферическая волна), а параметр w_2 , как правило, равным 1 (цилиндрическая волна). В случае плоской геометрии параметр w_i может принимать значения 1, 0. Одна из констант k_i , как правило, полагается равной единице. Показатель степени δ выбирается равным 0,25, 0,5 или 1. Дальнейшее сокращение числа свободных параметров определяется постановкой конкретной задачи. Во втором разделе рассмотрено несколько сопряженных задач теплопроводности с разным сочетанием инертных и горючих веществ: ИС + ИС, ГС + ИС, ИС + ГС, ГС + ГС.

2. Составные тепловые волны в среде с источниками энергии

Среда с сосредоточенными источниками: $s_1 = 0$; $s_2 = 0$. Рассматривается задача о распространении составных тепловых волн, порожденных сосредоточенными источниками, в неоднородной инертной среде. В данной задаче существование составных автомодельных решений гарантируется, если выполняется равенство (10) и справедливо соотношение (9), в котором положено $s = 0$. Из равенств (9), (6), (10) следует, что $q < 0$, $\delta < 0,5$ и справедливы соотношения

$$k_1 = \frac{1 + w_1}{1 + w_2} k_2; \quad n_1 = n_2 + \frac{w_1 - w_2}{1 + w_2} k_2. \quad (14)$$

Рассмотрим два случая. Предположим, что тепловые волны в левом и правом полупространствах имеют одинаковый тип симметрии. В этом случае равенства (14) выполняются только тогда, когда среда фактически однородная: $k_1 = k_2 = k$; $n_1 = n_2 = n$. Если положить $k = 1$, то приходим к классическому решению [2, 3], которое можно представить в форме (4)–(8). Сосредоточенный источник задается либо в точке (случай $w = 2$), лежащей на плоской границе между подобластями, либо на прямой (случай $w = 1$) или плоскости (случай $w = 0$), ортогональных к этой границе. Под величиной r понимается расстояние до источника.

Пусть теперь тепловые волны имеют разные типы симметрии. Рассмотрим сначала задачу о распространении тепла в осесимметричной постановке. Для определенности будем считать, что в

левом полупространстве волна имеет сферическую форму, а в правом — цилиндрическую. Тогда соотношения (14), (9), (6), (12) принимают вид

$$2k_1 = 3k_2; \quad n_1 = n_2 + 0,5k_2; \quad q = -\frac{1}{n_2 + 1}; \quad \delta = \frac{k_2}{2(n_2 + 1)}; \quad \frac{a_2}{b_2} = \frac{k_2}{4} \left(1 - \frac{k_2}{n_2 + 1}\right).$$

Здесь k_2, n_2, b_2 — свободные параметры. Если положить $k_2 = 1; n_2 = 1; b_2 = 8; b_1 = 1$, то $q = -0,5; \delta = 0,25; k_1 = 1,5; n_1 = 1,5; a_1 = 0,125; a_2 = 1; Q_1 = \pi/32; Q_2 = 2$. Данную задачу будем называть задачей о полубесконечном нитевом источнике: $0 \leq x < +\infty; y = 0$. В точке $x = 0, y = 0$, принадлежащей правой границе левой подобласти, мгновенно выделяется энергия Q_1 , а на оси OX в правой подобласти — энергия Q_2 .

Аналогичную задачу можно поставить для плоской двумерной области, положив $w_1 = 1, w_2 = 0$. В этом случае имеем соотношения

$$k_1 = 2k_2; \quad n_1 = n_2 + k_2; \quad q = -\frac{1}{n_1 + 1}; \quad \delta = \frac{k_1}{2(n_1 + 1)}; \quad \frac{a_1}{b_1} = \frac{k_1}{4} \left(1 - \frac{k_1}{n_1 + 1}\right)$$

со свободными параметрами k_2, n_2, b_1, b_2 . Если взять $k_2 = 1; n_2 = 2; b_1 = 4; b_2 = 1$, то получаем задачу со следующими константами: $q = -0,25; \delta = 0,25; k_1 = 2; n_1 = 3; b_1 = 4; a_1 = 1; Q_1 = 1; k_2 = 1; n_2 = 2; b_2 = 1; a_2 = 0,25; Q_2 = \pi/4$. Данную задачу можно назвать задачей о плоском полубесконечном источнике: $0 \leq x < +\infty; y = 0$.

Среда с сосредоточенным и объемным источниками. В этом подразделе изучается распространение тепловых волн в неоднородной среде, содержащей инертное и горючее вещества. В задачах такого типа $q < 0, \delta < 0,5$. Если $s_1 > 0, s_2 = 0$, то, как видно из соотношений (9), (10), $\delta = \frac{k_2}{(1 + w_2)(n + 1 - k) + 2k_2}$, а на константы, описывающие зависимость удельной теплоемкости от температуры, накладывается ограничение в виде неравенства $\frac{k_2}{k_1} > \frac{1 + w_2}{1 + w_1}$. Очевидно, что если $s_1 = 0, s_2 > 0$, то вместо индекса 2 нужно использовать индекс 1, и наоборот.

В случае осесимметричной геометрии для простоты будем предполагать, что тепловая волна в левой подобласти имеет форму полусферы ($w_1 = 2$) с центром в начале координат, а в правой подобласти — форму полусферы или бесконечного цилиндра. При постановке осесимметричных задач возможны следующие сочетания:

- 1) ГС ($w_1 = 2$) + ИС ($w_2 = 2$);
- 2) ГС ($w_1 = 2$) + ИС ($w_2 = 1$);
- 3) ИС ($w_1 = 2$) + ГС ($w_2 = 1$).

Рассмотрим первую задачу. Ее можно назвать задачей о точечном источнике на границе горючей и инертной сред. В данном случае равенства (9), (6) имеют вид

$$q = \frac{2s_1 - 3}{3(n_1 + 1) - k_1} = \frac{-3}{3(n_2 + 1) - k_2}; \quad \delta = \frac{k_2}{3(n_2 + 1) - k_2}.$$

Очевидно, что $k_2 > k_1$, поскольку $s_1 > 0$. Выбираем свободные параметры. Положим $k_1 = 1, k_2 = 1,5$, тогда $n_2 = n_1 + 0,5$. Далее, пусть $n_1 = 1, a_1 = a_2 = 1$, тогда $n_2 = 1,5; q = -0,5; \delta = 0,25; s_1 = 0,25; b_1 = b_2 = 8$. Энергетические константы вычисляются по формуле (8): $Q_1 = 16/15; Q_2 = \pi/4$.

Рассмотрим теперь вторую задачу. Для нее соотношения (9), (6) имеют простой вид

$$q = \frac{2s_1 - 3}{3(n_1 + 1) - k_1} = \frac{-1}{n_2 + 1}; \quad \delta = \frac{k_2}{2(n_2 + 1)}.$$

Заметим, что из неравенства $s_1 > 0$ следует ограничение на константы k_1, k_2 : $3k_2 > 2k_1$. Зададим значения следующих параметров: $\delta = 0,25; k_1 = 1; k_2 = 1,5; b_1 = b_2 = 1$. Через них можно

выразить остальные константы: $n_1 = 1,5$; $n_2 = 2$; $q = -1/3$; $s_1 = 5/12$; $a_1 = a_2 = 0,1875$. Значения энергетических констант: $Q_1 = 0,17061$; $Q_2 = 0,25$.

В третьей задаче $s_1 = 0$, $s_2 > 0$, и равенства (9), (6) можно записать в виде

$$q = \frac{-3}{3(n_1 + 1) - k_1} = \frac{s_2 - 1}{n_2 + 1}; \quad \delta = \frac{k_1}{3(n_1 + 1) - k_1}.$$

При выборе констант k_1 , k_2 следует учитывать, что $2k_1 > 3k_2$. Для уменьшения числа свободных параметров положим $\delta = 0,25$; $k_1 = 2$; $k_2 = 1$; $b_1 = b_2 = 5$. Тогда $n_1 = 3$; $n_2 = 2$; $q = -0,25$; $s_2 = 0,25$; $a_1 = a_2 = 1$; энергетические константы $Q_1 = 2/3$; $Q_2 = 5/3$.

Для случая плоской геометрии подбор параметров в задачах типа ГС ($w_1 = 1$) + ИС ($w_2 = 1$), ГС ($w_1 = 1$) + ИС ($w_2 = 0$), ИС ($w_1 = 1$) + ГС ($w_2 = 0$) проводится аналогичным образом.

Среда с объемными источниками: $s_1 > 0$; $s_2 > 0$. Когда горючая смесь заполняет все пространство, возможны три режима распространения фронта горения. Если параметры выбраны так, что $0 < \delta < 1$, фронт перемещается с замедлением. Если $\delta > 1$, он идет с ускорением, а при $\delta = 1$ — с постоянной скоростью. В зависимости от геометрической структуры множества точек инициирования он может иметь форму плоскости, кругового цилиндра, сферы, а также комбинации цилиндр-плоскость, сфера-цилиндр.

Как уже отмечалось, значение $\delta = 0,5$ играет особую роль. Когда $\delta < 0,5$, показатель степени q отрицателен. Температура в точках инициирования в начальный момент времени равна бесконечности и стремится к нулю при возрастании времени. При $\delta = 0,5$ показатель равен нулю и температура на множестве точек инициирования сохраняет постоянное значение. Если $\delta > 0,5$, показатель степени положителен. Температура в точках инициирования в начальный момент времени равна нулю и с увеличением времени неограниченно растёт.

Используя равенства (13), нетрудно установить, что из неравенства $s > 0,5(1 + w)$ следует неравенство $\delta > 0,5$, а из неравенств $0 < s < 0,5(1 + w)$ — неравенства $\delta^* < \delta < 0,5$, где

$$\delta^* = \max \left\{ \frac{k_1}{(1 + w_1)(n_1 + 1 - k_1) + 2k_1}, \frac{k_2}{(1 + w_2)(n_2 + 1 - k_2) + 2k_2} \right\}.$$

При выборе параметров задачи необходимо учитывать указанные ограничения.

Автомодельное решение в составной области строится из базовых решений (4)—(8) с условиями сопряжения (9)—(12) на границах между подобластями. Особенно просто ставится задача в случае $q = 0$, т. е. когда предполагается, что температура на линии инициирования горючей смеси не зависит от времени. При таком допущении константа в функции источника зависит только от типа симметрии: $s = 0,5(1 + w)$, а $\delta = 0,5$ при любых константах n , k . На эти константы накладывается лишь условие связи (10), которое для определенности можно взять в виде $n - k = 3$ и положить $k_1 = 1,5$, $k_2 = 1$ соответственно в левой и правой подобластях.

Аналогичные константы удобно брать и в случае $\delta = 1$. При этом $q = 0,25$, константы в функции источника определяются из соотношений (13).

До сих пор рассматривались задачи без учета энергии излучения. В работе [1] построены точные решения для задачи, в которой в качестве уравнения состояния берется идеальный газ с излучением $E = c_V T + \sigma T^4 / \rho$, где $\rho = 1$; $c_V = 1,37$; $\sigma = 1,37$. Одно из таких точных решений имеет вид

$$T(r, t) = \left\{ \exp \left(\ln 2 \left[1 - \left(\frac{r}{r_\Phi} \right)^2 \right] \right) - 1 \right\}^{1/3} \quad \text{для } n = 3.$$

Оно справедливо для любого типа симметрии тепловой волны. Соответствующая энергетическая константа получена численно и приведена в работе [1]. Движение фронта тепловой волны описывается формулой $r_\Phi = r_0 t^{0,5}$, где константа $r_0 = 1$, если в коэффициенте теплопроводности параметр $a = 1,48237$. Данное решение можно использовать для постановки двумерных задач в однородной среде с объемными источниками, порождающими в левой и правой подобластях тепловые волны разных типов симметрии. Тип симметрии определяется константой функции источника $s = 0,5(1 + w)$.

Численный эксперимент

При постановке тепловых задач с сосредоточенными и объемными источниками одним из важных вопросов является вопрос об устойчивости составных автоматических решений относительно разных способов задания начальных данных в виде дельта-функции. Положительный ответ на этот вопрос можно получить с помощью численного эксперимента. В качестве примера рассмотрим плоскую одномерную задачу со следующими параметрами [1]:

$$a_1 = b_1 = k_1 = 1; \quad n_1 = 2; \quad s_1 = 0; \quad a_2 = 4,6875; \quad b_2 = 1; \quad k_2 = n_2 = 1,5; \quad s_2 = 0.$$

На плоскости $x = 0$ мгновенно выделяется энергия $Q = 1,4375\pi$, при этом в левом полупространстве оказывается энергия $Q_1 = 0,5\pi$, в правом — $Q_2 = 0,9375\pi$. Тепловые волны движутся соответственно со скоростями $v_1 = -0,5t^{-0,75}$, $v_2 = 1,875t^{-0,625}$.

Данная задача была решена разностным методом в области $-2,1 \leq x \leq 5,1$ на равномерной сетке с шагом $h = 0,005$. Начальные данные задавались на момент времени $t_0 = 10^{-8}$. Было сделано три расчета с разными начальными значениями температуры в промежутках $-0,02 \leq x < 0$, $0 < x \leq 0,005$:

- 1) $T_{01} = 78,5398$; $T_{02} = 70,2696$;
- 2) $T_{01} = 0$; $T_{02} = 93,4384$;
- 3) $T_{01} = 225,802$; $T_{02} = 0$.

В первом варианте начальные значения температуры соответствовали энергиям Q_1 , Q_2 слева и справа от поверхности раздела сред. Во втором и третьем вариантах вся энергия выделялась целиком соответственно в правой или левой подобласти. Результаты расчетов хорошо согласуются друг с другом и, как видно из рис. 1, на котором изображен профиль температуры на момент времени $t = 1$ (см. также цветную вкладку), с приемлемой точностью совпадают с аналитическим решением.

Таким образом, численно подтверждается устойчивость решения к возмущениям в начальных данных.

Некоторые из представленных выше задач были решены численно по методике КИО [4]. Расчеты проводились по разностной схеме продольно-поперечной прогонки. Функция источника приближалась со вторым порядком.

Для иллюстрации приведем примеры расчетов четырех двумерных задач с осесимметричной геометрией. Во всех задачах она одинаковая и имеет вид прямоугольного цилиндра, ось которого совпадает с осью OX : $-1,1 \leq x \leq 1,1$; $0 \leq y \leq 1,1$ (рис. 2, см. также цветную вкладку).

Расчетная область состоит из двух областей, разделенных плоскостью $x = 0$, покрыта равномерной сеткой с шагом $h = 0,02$. Внешние границы теплоизолированы. Во всех задачах используется одна и та же фоновая температура $T_{\Phi} = 10^{-8}$. Задачи считались от момента времени t_0 до $t = 1$. При этом на некотором начальном отрезке времени шаг интегрирования был небольшим и выбирался с учетом скорости тепловой волны. В дальнейшем счет выполнялся с постоянным временным шагом, равным примерно 0,0001.

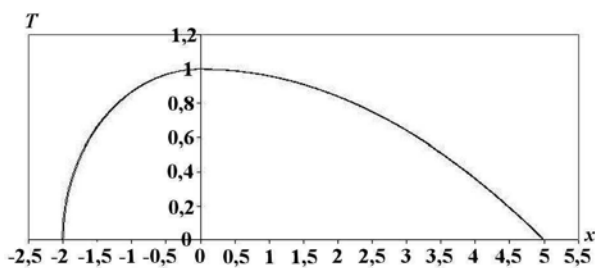


Рис. 1. Профиль температуры на момент времени $t = 1$, варианты 1–3



Рис. 2. Геометрия расчетной области в задачах 1, 3, 4

Опишем уравнения состояния, коэффициенты теплопроводности, начальные условия, формулы точных решений, контрольные балансные соотношения, а также приведем результаты численных расчетов. Забегая вперед, отметим, что во всех расчетах контрольные балансные соотношения выполняются с достаточно высокой точностью. Заметим также, что расчетное распределение температуры на момент времени $t = 1$ во всех задачах достаточно хорошо согласуется с теоретическим распределением.

Задача 1. Полубесконечный нитевой сосредоточенный источник (форма тепловой волны — полусфера-цилиндр). Уравнения состояния и коэффициенты теплопроводности:

$$E_1 = 8T^{1,5}; \quad \chi_1 = T^{1,5}; \quad E_2 = 8T; \quad \chi_2 = T.$$

В начальный момент времени $t_0 = 1,6 \cdot 10^{-7}$ задана температура

$$T_0 = \begin{cases} 844,5524, & -0,02 \leq x \leq 0, \quad 0 \leq y \leq 0,02; \\ 1250, & 0 \leq x \leq 1,1, \quad 0 \leq y \leq 0,02. \end{cases}$$

Точное решение задачи имеет вид

$$T(r, t) = t^{-0,5} \left(1 - \frac{r^2}{t^{0,5}} \right), \quad (15)$$

где

$$r = \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2}, & x < 0; \\ y, & 0 < x. \end{cases} \quad (16)$$

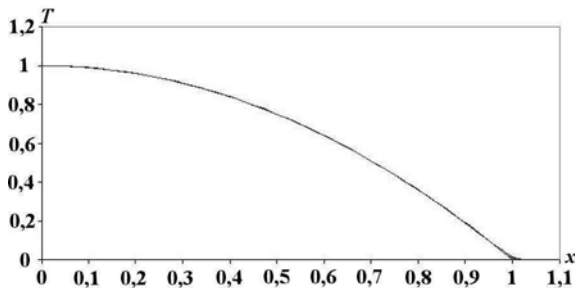


Рис. 3. Задача 1. Сравнение численного решения (вдоль полуоси $x < 0$ и в сечениях $x = 0$ и $x = 1,1$) с точным решением, $t = 1$

Контрольные балансные соотношения: $E_1(t) = 4,935$; $E_2(t) = 13,823$, где $E_1(t)$, $E_2(t)$ — энергии левой и правой областей соответственно. На рис. 3 (см. также цветную вкладку) представлены результаты сравнения численного решения вдоль полуоси OX ($x < 0$) и в сечениях $x = 0$ и $x = 1,1$ с точным решением на момент времени $t = 1$. Видно, что все кривые, включая кривую точного решения, совпадают друг с другом.

Задача 2. Точечный источник на границе горючей и инертной сред (сферическая форма тепловой волны). Уравнения состояния и коэффициенты теплопроводности:

$$E_1 = 8T; \quad \chi_1 = T; \quad E_2 = 8T^{1,5}; \quad \chi_2 = T^{1,5}.$$

В момент времени $t_0 = 1,6 \cdot 10^{-7}$ задана начальная температура

$$T_0 = \begin{cases} 666,6667, & -0,02 \leq x \leq 0, \quad 0 \leq y \leq 0,02; \\ 844,5524, & 0 \leq x \leq 0,2, \quad 0 \leq y \leq 0,02. \end{cases}$$

Функция источника

$$F(x, y, t) = \begin{cases} 2\frac{T}{t}, & x < 0; \\ 0, & 0 < x. \end{cases}$$

Точное решение задачи определяется формулой (15), в которой $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Контрольные балансные соотношения: $E_1(t) = 32/15\pi t^{0,25}$; $E_2(t) = 0,5\pi^2$.

Кривые, описывающие результат сопоставления численного и точного решений вдоль оси OX на момент времени $t = 1$, с хорошей точностью совпадают с кривыми, изображенными на рис. 3.

Задача 3. Объемный и сосредоточенный нитевой источники (форма тепловой волны — полусфера-цилиндр). Уравнения состояния и коэффициенты теплопроводности:

$$E_1 = T; \quad \chi_1 = 0,1875T^{1,5}; \quad E_2 = T^{1,5}; \quad \chi_2 = 0,1875T^2.$$

Начальная температура соответствует моменту времени $t_0 = 1,6 \cdot 10^{-7}$:

$$T_0 = \begin{cases} 62,8533, & -0,02 \leq x \leq 0, \quad 0 \leq y \leq 0,02; \\ 116,0397, & 0 \leq x \leq 1,1, \quad 0 \leq y \leq 0,02. \end{cases}$$

Функция источника

$$F(x, y, t) = \begin{cases} 1,25 \frac{T}{t}, & x < 0; \\ 0, & 0 < x. \end{cases}$$

Точное решение задачи имеет вид

$$T(r, t) = t^{-1/3} \left(1 - \frac{r^2}{t^{0,5}} \right)^{2/3},$$

где r определяется из выражения (16).

Контрольные балансные соотношения: $E_1(t) = 2\pi \cdot 0,17061t^{0,416667}$; $E_2(t) = 0,55\pi$.

На рис. 4 (см. также цветную вкладку) приведены результаты сравнения численного решения вдоль полуоси OX ($x < 0$) и в сечениях $x = 0$ и $x = 1,1$ с точным решением на момент времени $t = 1$.

Задача 4. Объемные источники (форма тепловой волны — полусфера-цилиндр). Уравнения состояния и коэффициенты теплопроводности:

$$E_1 = T^{1,5}; \quad \chi_1 = T^{4,5}; \quad E_2 = T; \quad \chi_2 = T^4.$$

В начальный момент времени $t_0 = 0,0004$ задана температура

$$T_0 = \begin{cases} 0,57908, & -0,02 \leq x \leq 0, \quad 0 \leq y \leq 0,02; \\ 0,8, & 0 \leq x \leq 1,1, \quad 0 \leq y \leq 0,02. \end{cases}$$

Функция источника

$$F(x, y, t) = \begin{cases} 1,5 \frac{T^{1,5}}{t}, & x < 0; \\ \frac{T}{t}, & 0 < x. \end{cases}$$

Точное решение задачи имеет вид

$$T(r, t) = \left(1 - \frac{r^2}{t} \right)^{0,25},$$

где r находится по формуле (16).

Контрольные балансные соотношения: $E_1(t) = 2\pi \cdot 0,22033 t^{1,5}$; $E_2(t) = 0,88\pi t$.

На рис. 5 представлены результаты сравнения численного и точного решений на момент времени $t = 1$.

Анализ численных результатов, полученных по методике КИО, показал, что они достаточно хорошо согласуются с точным решением. При своем движении тепловая волна сохраняет сферическую и цилиндрическую формы. В задачах 1, 2 небольшое расхождение результатов наблюдается в малой окрестности фронта тепловой волны. В задачах 3, 4 это расхождение заметно больше. По-видимому, это связано с тем, что в данных задачах градиент температуры на фронте тепловой волны равен бесконечности.

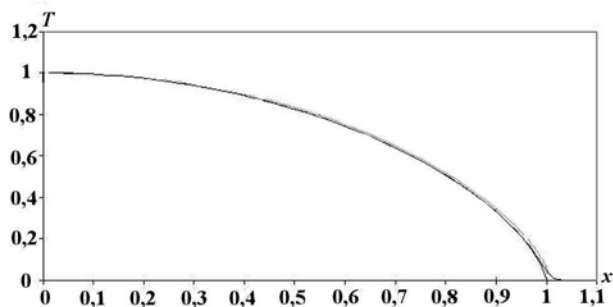


Рис. 4. Задача 3. Сравнение численного решения (вдоль полуоси $x < 0$ и в сечениях $x = 0$ и $x = 1,1$) с точным решением, $t = 1$

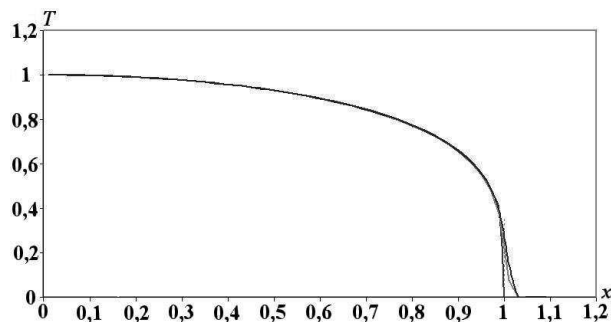


Рис. 5. Задача 4. Сравнение численного решения (вдоль полуоси $x < 0$ и в сечениях $x = 0$ и $x = 1,1$) с точным решением, $t = 1$

В результате проведенного исследования показана возможность построения составных автомодельных решений для двумерного уравнения теплопроводности с функцией источника в случае осесимметричной и плоской геометрий.

Список литературы

1. Тихомиров Б. П. Автомодельные тепловые волны от сосредоточенного или объемного источника в среде с неоднородными теплофизическими параметрами // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2010. Вып. 2. С. 40–50.
2. Зельдович Я. Б., Компанеев А. С. К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры // Сборник, посвященный 70-летию академика А. Ф. Иоффе. М.: Изд-во АН СССР, 1950. С. 61–67.
3. Баренблатт Г. И. О некоторых неустановившихся движениях жидкости и газа в пористой среде // Прикладная математика и механика. 1952. Т. 16. Вып. 1. С. 67–78.
4. Софронов И. Д., Тихомиров Б. П. Баженов С. В. и др. Приближенные методы расчета лучистого энергопереноса в оптически неоднородных областях сложной формы // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1999. Вып. 4. С. 68–75.

Статья поступила в редакцию 04.10.10.