

УДК 519.6

## О "ШАХМАТНОМ ЭФФЕКТЕ" В НЕКОТОРЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМАХ ДЛЯ ДВУМЕРНОЙ И ТРЕХМЕРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Ю. А. Бондаренко, А. А. Голубев, А. А. Горбунов, А. О. Наумов, А. И. Панов  
(РФЯЦ-ВНИИЭФ)

Рассматривается появление *эффекта шахматного порядка* в некоторых разностных схемах для двумерной и трехмерной теплопроводности. Показан способ избавления от этого эффекта.

*Ключевые слова:* лучистая теплопроводность, разностный градиент температуры, регулярные и нерегулярные сетки, тестовые расчеты.

### Введение

Настоящая статья посвящена одной из проблем, возникающих при решении многомерного уравнения теплопроводности. Для расчета процесса теплопроводности применяются разностные схемы, одной из разновидностей которых являются *градиентные схемы*. В таких схемах для аппроксимации градиента температуры применяются алгоритмы, аналогичные используемым для расчета градиента давления в лагранжевых разностных схемах газовой динамики. В статье продемонстрировано, что для градиентных схем возможно появление *эффекта шахматного порядка* ("шахматного эффекта"). Эффект проявляется в задачах на квадратных и кубических сетках с точечным источником и выражается в том, что тепло по "белым" и "черным" клеткам распространяется независимо друг от друга. То есть тепло течет только вдоль диагоналей ячеек сетки. В статье приведены методы, избавляющие указанные схемы от появления шахматного эффекта.

Не найдя ничего подобного в литературе, авторы решили опубликовать описание шахматного эффекта, чтобы предостеречь разработчиков программных комплексов от его появления.

### Происхождение шахматного эффекта

Проведем анализ разностного градиента температуры для типичной двумерной градиентной

схемы [1]. Рассмотрим уравнение теплопроводности

$$\rho \frac{\partial E}{\partial t} = \operatorname{div} (\varkappa \operatorname{grad} T),$$

где  $\rho$  — плотность;  $E = E(\rho, T)$  — удельная внутренняя энергия;  $\varkappa = \varkappa(\rho, T)$  — коэффициент теплопроводности;  $T$  — температура. Используется неявная консервативная разностная схема, имеющая вид

$$\frac{E_i^{n+1} - E_i^n}{\Delta t} = \frac{1}{M_i} \sum_{j=1}^{n_i} L_{ij} \varkappa_{ij} \left( \frac{\partial T}{\partial n} \right)_{ij}^{n+1}. \quad (1)$$

Здесь  $\Delta t$  — шаг по времени;  $M_i$  — масса ячейки с номером  $i$ ;  $n_i$  — число ближайших "соседей" ячейки с номером  $i$ ;  $\varkappa_{ij}$  — коэффициент теплопроводности на стороне ячейки интегрирования;  $L_{i,j}$  — длина стороны ячейки интегрирования, лежащей между ячейками с номерами  $i$  и  $i_j$  в плоском случае (в осесимметричном случае площадь поверхности вращения);  $n$  — номер шага по времени. Способ аппроксимации коэффициента теплопроводности на сторонах ячеек, как и метод решения системы разностных уравнений (1), здесь не обсуждается.

На одинаковых сетках различные схемы отличаются друг от друга способом аппроксимации производной  $\frac{\partial T}{\partial n}$  по нормали к стороне ячейки. В градиентной схеме эти формулы имеют вид (подробности см. в [1])

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \frac{\partial T}{\partial X} \cos \varphi + \frac{\partial T}{\partial Y} \sin \varphi;$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial X} &\approx \frac{1}{S} \oint_{1-4} T dY, & \frac{\partial T}{\partial Y} &\approx -\frac{1}{S} \oint_{1-4} T dX; \\ \frac{\partial T}{\partial X} &\approx \frac{1}{2S} \sum_{j=1}^4 (Y_{j+1} - Y_{j-1}) T_j, \\ \frac{\partial T}{\partial Y} &\approx -\frac{1}{2S} \sum_{j=1}^4 (X_{j+1} - X_{j-1}) T_j. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $\varphi$  — угол наклона срединной нормали к оси  $OX$ ;  $X_j, Y_j$  — координаты центров ячеек;  $S$  — площадь четырехугольника, построенного для расчета контурных интегралов. Формулы (2) давно используются в разностных схемах при расчете двумерных задач газовой динамики [2] для вычисления градиента давления. Они используются как на нерегулярных, так и на регулярных сетках [1].

На рис. 1 изображен фрагмент четырехугольной регулярной сетки. В расчетах на регулярных сетках каждая сторона контура ячейки интегрирования разбита на два участка, компоненты градиента температуры для каждого участка рассчитываются отдельно по формулам (2). Многоугольник, применяемый для расчета градиента температуры, представляет собой четырехугольник с вершинами в центрах ячеек, которые на рис. 1 обозначены кружками.

На рис. 2 изображен шаблон расчета уравнения теплопроводности на четырехугольной регулярной сетке. Здесь и далее под шаблоном понимается множество ячеек, привлекаемых для записи аппроксимации уравнения теплопроводности в ячейке. Сплошными линиями изображена

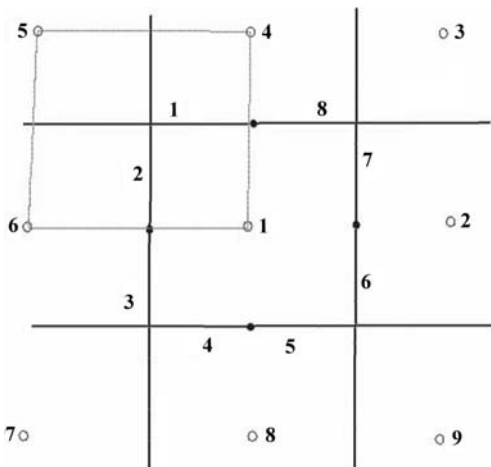


Рис. 1. Многоугольник для расчета производной по нормали к стороне четырехугольной ячейки

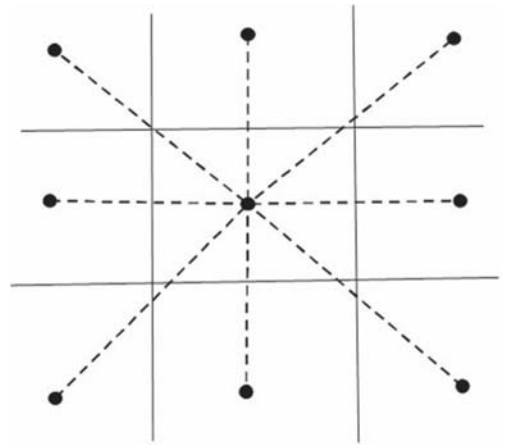


Рис. 2. Шаблон расчета уравнения теплопроводности на четырехугольной сетке

расчетная сетка, пунктиром — отрезки, соединяющие центры ячеек, образующих шаблон. В общем случае на таких сетках шаблон *девятиточечный*.

Рассмотрим двумерное линейное уравнение теплопроводности с коэффициентом теплопроводности, равным единице, и квадратную сетку со стороной квадрата, равной единице. Пусть задача имеет плоскую постановку. Компоненты градиента температуры рассчитываются по формулам (2). Плотность равна единице.

Вернемся к рис. 1, на котором изображены ячейка сетки и ее восемь соседей. Курсивом обозначены номера участков. Соседи 3, 5, 7, 9 имеют с ячейкой только общий узел, соседи 2, 4, 6, 8 имеют с ячейкой общую сторону. Тогда правая часть разностного уравнения (1) для ячейки, умноженная на ее массу, представляется в следующем виде (суммирование выполнено по всем участкам всех сторон ячейки):

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{j=1}^8 \Delta l \kappa_{ij} \left( \frac{\partial T}{\partial n} \right)_{ij} = \\ &= \frac{1}{2} (T_3 + T_5 + T_7 + T_9 - 4T_1). \end{aligned} \quad (3)$$

Получается *пятиточечный* шаблон, в котором присутствуют ячейки, имеющие с рассматриваемой ячейкой только один общий узел, и отсутствуют ячейки, имеющие с ней общую сторону (рис. 3). При задании источника в одной ячейке тепло будет распространяться только по диагоналям, как показано на рис. 4.

### Методы исправления

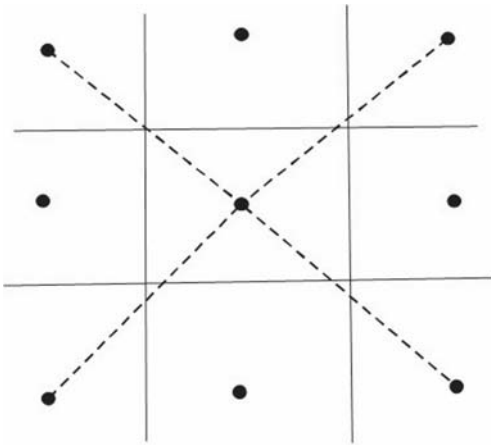


Рис. 3. Шаблон разностной схемы на четырехугольной сетке с квадратными ячейками

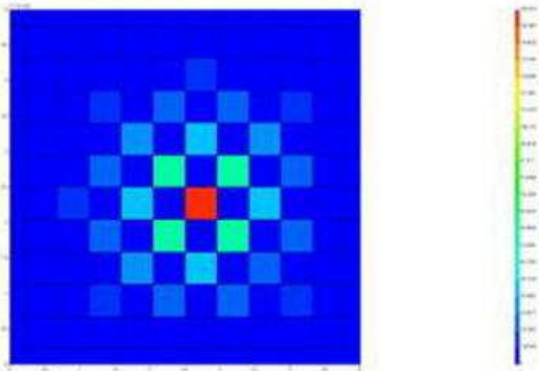


Рис. 4. Распределение температуры в задаче с точечным источником при шахматном эффекте

Это явление потери точности (шахматный эффект), кроме практического значения, интересно и с учебно-методической точки зрения. Неявная разностная схема (3) с диагонально-пятиточечным оператором диффузии обладает полным набором "хороших" свойств: она линейная, консервативная, является абсолютно устойчивой, имеет на гладких решениях погрешность аппроксимации  $O(\Delta t + h^2)$ , удовлетворяет принципу максимума. Точное решение рассматриваемой задачи является гладким при всех  $t > 0$ . Но элементарные результаты о сходимости разностных схем не применимы, так как начальное условие ( $\delta$ -образное начальное распределение температуры) является негладким.

Обнаружение шахматного эффекта при использовании градиентной схемы на двумерных регулярных сетках послужило толчком для разработки модифицированной разностной схемы [3], зависящей от набора параметров и сохраняющей такое достоинство градиентной схемы, как симметричность разностного оператора диффузии. При соответствующем выборе значений параметров шахматный эффект устраняется. Разностная схема, подробно описанная в работе [3], применима как для двумерных, так и для трехмерных нерегулярных сеток самого общего вида.

Продemonстрируем используемый подход для построения разностной схемы на регулярной двумерной сетке. Для этого разобьем вспомогательную узловую ячейку на составные части, как показано на рис. 5, и предположим, что вектор потока тепла является кусочно-постоянной функцией уже не на узловой ячейке 12341, а на построенных более мелких ячейках 0120, 0230, 0340, 0410. Так как каждая из мелких ячеек содержит половину одного (и только одного) из сходящихся в узле ребер, эти ячейки будем называть *полуреберными*. Аппроксимация градиента температуры в каждой полуреберной ячейке получается при помощи специального усреднения градиентов из более крупных подобластей исходной узловой ячейки.

Рассмотрим, например, полуреберную ячейку 0120. Градиент температуры в этой ячейке получим при помощи усреднения градиентов из областей 12041, 12301 и 12341. Пусть градиен-

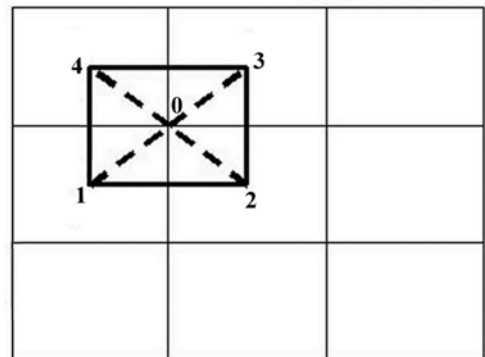


Рис. 5. К построению модифицированной схемы на регулярной сетке

ты температуры в этих областях имеют соответственно вид

$$\frac{T_2 - T_1}{\Delta_x} i + \frac{T_4 - T_1}{\Delta_y} j; \quad \frac{T_2 - T_1}{\Delta_x} i + \frac{T_3 - T_2}{\Delta_y} j;$$

$$\frac{T_2 - T_1 + T_3 - T_4}{2\Delta_x} i + \frac{T_4 - T_1 + T_3 - T_2}{2\Delta_y} j.$$

После суммирования этих градиентов с определенными весами получим

$$\text{Grad}_{0120} T = \frac{\theta}{2} \left( \frac{T_2 - T_1}{\Delta_x} i + \frac{T_4 - T_1}{\Delta_y} j \right) +$$

$$+ \frac{\theta}{2} \left( \frac{T_2 - T_1}{\Delta_x} i + \frac{T_3 - T_2}{\Delta_y} j \right) +$$

$$+ (1-\theta) \left( \frac{T_2 - T_1 + T_3 - T_4}{2\Delta_x} i + \frac{T_4 - T_1 + T_3 - T_2}{2\Delta_y} j \right) =$$

$$= \left( \frac{1+\theta}{2} \frac{T_2 - T_1}{\Delta_x} + \frac{1-\theta}{2} \frac{T_3 - T_4}{\Delta_x} \right) i + \frac{T_4 - T_1 + T_3 - T_2}{2\Delta_y} j,$$

где  $0 \leq \theta \leq 1$ . Пусть  $\varkappa_0$  — значение коэффициента теплопроводности в рассматриваемом узле сетки. Тогда приток тепла в ячейки 1 и 2 через соответствующую половину ребра будет равен

$$\Delta w = \pm \frac{\varkappa_0 \Delta y}{4\Delta_x} \left[ (1+\theta)(T_2 - T_1) + (1-\theta)(T_3 - T_2) \right].$$

Как показывают результаты расчетов, при  $\theta \geq 1/2$  шахматный эффект отсутствует.

Для избавления схемы (1), (2) от эффекта шахматного порядка на четырехугольной регулярной сетке конструкция разностного оператора, применяемого для расчета компонентов градиента температуры, модифицирована таким образом, чтобы на любых четырехугольных сетках шаблон расчета всегда был девятиточечным (либо пятиточечным с зацеплением только соседей, имеющих с ячейкой общую сторону) и вес ячеек, имеющих с ячейкой общую сторону, всегда был больше веса ячеек, имеющих с ней только один общий узел. Таким образом, метод исправления шахматного эффекта в схеме (1), (2) аналогичен приведенному выше методу.

На рис. 6 изображено распределение температуры в задаче с точечным источником, полученное в расчетах по модифицированной версии программы [1].

Программа [1] позволяет проводить расчеты как на регулярных, так и на нерегулярных многоугольных сетках. Характерной особенностью

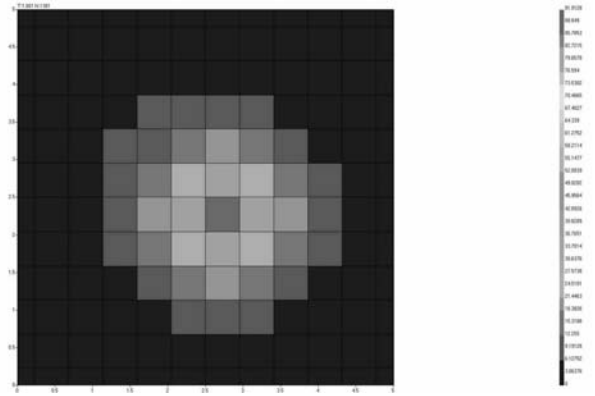


Рис. 6. Распределение температуры при отсутствии шахматного эффекта

применяемых в методике МЕДУЗА нерегулярных сеток является то, что в узле ячейки сходятся три стороны, а не четыре, как в четырехугольных регулярных сетках.

Рассмотрев сетку, состоящую из правильных шестиугольников, и проведя исследование, можно показать, что шахматный эффект в расчетах по схеме [1] на таких сетках отсутствует — нет соседей, имеющих с ячейкой только один общий узел, и вес всех соседей в выражении типа (3) одинаков.

Шахматный эффект наблюдался при использовании разностной схемы расчета трехмерной теплопроводности в методике ЛЭГАК-3D [4], для построения которой применяются дифференциальные разностные операторы grad и div, как при аппроксимации уравнений газовой динамики. Еще одним существенным недостатком этой схемы является низкая точность при использовании сильно неортогональных сеток. В связи с этим была разработана вторая схема — *расщепления по потокам*, при построении которой используются особенности реализации счетных алгоритмов, заложенных в методике ЛЭГАК-3D.

Дело в том, что в методике ЛЭГАК-3D поверхности счетной сетки, представляющие одно из семейств, являются плоскостями, либо параллельными, либо пересекающимися по одной прямой (оси системы), положение которых со временем не меняется (эйлеровы листы). Это позволяет некоторые счетные алгоритмы расщепить на два этапа и на одном из этапов использовать аналоги двумерных алгоритмов (например, при пересчете величин сначала расчи-

тываются потоки через листы, а затем в листах выполняется прототип двумерного алгоритма). Аналогичным образом строится схема для расчета теплопроводности. Изменение температуры в листах рассчитывается с применением аналога двумерной схемы [5], а между листами изменение температуры вычисляется за счет потоков тепла, при аппроксимации которых используются газодинамические разностные дифференциальные операторы, как в первой схеме, и вводится трехточечный шаблон. Практика показала, что при использовании этой схемы шахматный эффект не наблюдается.

Отметим, что на квадратных и прямоугольных сетках отсутствует шахматный эффект в разностных схемах типа [5], основанных на наглядных геометрических построениях при аппроксимации нормальных к сторонам производных от температуры, и в вариационных потоковых разностных схемах [6]. Схемы этого типа на прямоугольных сетках сводятся к естественным пятиточечным схемам с взаимодействием через стороны.

### Заключение

В статье проведено исследование двух типичных градиентных схем, применяемых для расчета многомерной теплопроводности. Показано, что на регулярных сетках (особенно на квадратных и кубических) возможно появление шахматного эффекта. Изложены способы, устраняющие шахматный эффект.

В расчетах двумерной газовой динамики на квадратных сетках по схеме [2] с начальным малым возмущением давления в одной ячейке при отключении искусственной вязкости также наблюдается шахматный эффект для давления. Это не удивительно, так как уравнение для малых возмущений давления имеет вид  $\frac{d^2 \delta P}{dt^2} = \rho c^2 \operatorname{div} (\rho^{-1} \operatorname{grad} \delta P)$ . Было бы интересно найти способы переноса методов устранения шахматного эффекта на разностные схемы много-

мерной газовой динамики в переменных Лагранжа.

### Список литературы

1. Горбунов А. А. Метод решения уравнения теплопроводности на нерегулярных сетках в параллельном режиме в методике МЕДУЗА // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2008. Вып. 3. С. 32–46.
2. Софронов И. Д., Дмитриев Н. А., Дмитриева Л. В., Малиновская Е. В. Методика расчета двумерных нестационарных задач газодинамики в переменных Лагранжа: Препринт № 59. М.: ИПМ АН СССР, 1976.
3. Панов А. И. Методика решения уравнения теплопроводности на нерегулярной сетке // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2004. Вып. 4. С. 27–40.
4. Бахрах С. М., Величко С. В., Спиридонов В. Ф. и др. Методика ЛЭГАК-3D расчета трехмерных нестационарных течений многокомпонентной сплошной среды и принципы ее реализации на многопроцессорных ЭВМ с распределенной памятью // Там же. 2004. Вып. 4. С. 41–50.
5. Жарова Г. В., Загускин В. Л. Счет теплопроводности на косоугольных сетках // Вопросы механики и прикладной математики. Ростов-на-Дону: Изд-во Ростовского университета, 1976.
6. Тишкин В. Ф., Фаворский А. П., Шашков М. Ю. Вариационно-разностные схемы для уравнения теплопроводности на нерегулярных сетках // Докл. АН СССР. 1979. Т. 246, № 6. С. 1342–1346.

Статья поступила в редакцию 16.06.10.