

УДК 519.6:536.71

**ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КВАЗИДИФФУЗИИ  
 ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ  
 В СПЕКТРАЛЬНОЙ КИНЕТИЧЕСКОЙ ПОСТАНОВКЕ В ДВУМЕРНОМ  
 ОСЕСИММЕТРИЧНОМ СЛУЧАЕ НА КВАДРАТНОЙ СЕТКЕ**

Н. Г. Карлыханов, А. В. Уракова, С. А. Шнитко  
 (РФЯЦ-ВНИИТФ)

Рассматривается неявная схема для решения уравнения переноса излучения в квазидиффузионной постановке совместно с уравнением энергии в двумерном осесимметричном случае на квадратной сетке. Для решения кинетического уравнения используется консервативная монотонная разностная схема первого порядка точности. Поскольку известно, что для систем уравнений гиперболического типа не существует монотонных линейных разностных схем второго порядка точности, то для решения уравнений квазидиффузионного типа предложена гибридная разностная схема. Она представляет собой комбинацию схем второго и первого порядка точности и обеспечивает монотонность решения. Для решения уравнений квазидиффузии совместно с уравнением энергии используется метод выделения диагонального элемента.

*Ключевые слова:* уравнение переноса излучения, уравнения квазидиффузии, уравнение энергии.

**Постановка задачи**

Рассмотрим двумерное уравнение переноса излучения в следующем виде:

$$\frac{\rho}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{I_g}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial r^{\nu+1}} \left( (\nu + 1) r^\nu \xi I_g \right) + \frac{\partial}{\partial z} (\mu I_g) - \nu \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \frac{\eta I_g}{r} \right) + \alpha_{t,g} I_g - \frac{\alpha_{s,g}}{2\pi} \int_{\Omega} I_g d\vec{\Omega} = Q_g, \quad (1)$$

где  $\nu$  — признак геометрии: если  $\nu = 0$  — декартова система координат, если  $\nu = 1$  — цилиндрическая система координат;  $\rho$  — плотность вещества;  $c$  — скорость света;  $z, r$  — пространственные переменные;  $g$  — номер спектральной группы;  $I_g$  — интенсивность излучения фотонов группы  $g$ , летящих в направлении  $\vec{\Omega}(\xi, \mu, \eta)$ , где  $\xi = \sqrt{1 - \mu^2} \cos \psi$ ,  $\mu = \cos \theta$ ,  $\eta = \sqrt{1 - \mu^2} \sin \psi$ , при этом  $0 \leq \psi \leq \pi$  — угол между  $\vec{r}$  и проекцией  $\vec{\Omega}$  на плоскость, перпендикулярную оси  $\vec{z}$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$  — угол между  $\vec{\Omega}$  и осью  $\vec{z}$ ;  $\alpha_{t,g} = \alpha_{a,g} + \alpha_{s,g}$  — коэффициент ослабления фотонов группы  $g$ ,  $\alpha_{a,g}$  и  $\alpha_{s,g}$  — соответственно коэффициенты поглощения и рассеяния фотонов группы  $g$ ;  $Q_g = \frac{1}{4\pi} \alpha_{a,g} B_g$  — источник,  $B_g$  — функция Планка для группы  $g$ .

Если уравнение (1) проинтегрировать дважды по всем углам сначала с весом 1, затем с весом  $\vec{\Omega}$ , то получим следующую систему уравнений квазидиффузии [1]:

$$\begin{aligned} \rho \frac{d}{dt} \left( \frac{U_g}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial r^{\nu+1}} \left( (\nu + 1) r^\nu \Phi_{g,r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} (\Phi_{g,z}) + c \alpha_{a,g} U_g &= c \alpha_{a,g} B_g; \\ \frac{\rho}{c^2} \frac{d}{dt} \left( \frac{\Phi_{g,r}}{\rho} \right) + (\nu + 1) r^\nu \frac{\partial}{\partial r^{\nu+1}} (D_{g1} U_g) + \frac{\partial D_{g3} U_g}{\partial z} + \nu \frac{2D_{g1} + D_{g2} - 1}{r} U_g + \frac{1}{c} \alpha_{t,g} \Phi_{g,r} &= 0; \\ \frac{\rho}{c^2} \frac{d}{dt} \left( \frac{\Phi_{g,z}}{\rho} \right) + (\nu + 1) r^\nu \frac{\partial D_{g3} U_g}{\partial r^{\nu+1}} + \frac{\partial D_{g2} U_g}{\partial z} + \frac{\nu D_{g3}}{r} U_g + \frac{1}{c} \alpha_{t,g} \Phi_{g,z} &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$U_g = \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} I_g d\mu d\psi; \quad \Phi_{g,r} = c \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \xi I_g d\mu d\psi; \quad \Phi_{g,z} = c \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \mu I_g d\mu d\psi.$$

Коэффициенты квазидиффузии  $D_{g1}$ ,  $D_{g2}$ ,  $D_{g3}$  вычисляются по формулам

$$D_{g1} = \frac{1}{U_g} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \xi^2 I_g d\mu d\psi; \quad D_{g2} = \frac{1}{U_g} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \mu^2 I_g d\mu d\psi; \quad D_{g3} = \frac{1}{U_g} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \xi \mu I_g d\mu d\psi. \quad (3)$$

В формулах (3) значение интенсивности находится из кинетического уравнения (1), которое решается один раз на шаге по времени. Полученные значения коэффициентов квазидиффузии при расчете системы уравнений (2) фиксируются [2].

Уравнения (1), (2) дополняются начальными условиями, вид которых для дальнейшего изложения не существен. Рассмотрим постановку граничных условий для системы уравнений (2). Полный поток на границе системы  $\vec{\Phi}_{\Gamma,g} = c \int \vec{\Omega} I_g d\vec{\Omega}$  разобьем на две части:

$$\vec{\Phi}_{\Gamma,g} = c \int_{\vec{\Omega} \cdot \vec{n} < 0} \vec{\Omega} I_g d\vec{\Omega} + c \int_{\vec{\Omega} \cdot \vec{n} \geq 0} \vec{\Omega} I_g d\vec{\Omega}, \quad (4)$$

где  $\vec{n}$  — единичный вектор нормали к поверхности  $\Gamma$ ;  $\Gamma$  — граница двумерной замкнутой области. Первое слагаемое в данной формуле означает входящий через внешнюю поверхность поток, второе слагаемое — выходящий поток.

Введем обозначения:  $\vec{\Phi}_{\Gamma,g}^+ = \int_{\vec{\Omega} \cdot \vec{n} < 0} \vec{\Omega} I_g d\vec{\Omega}$  — входящий поток (как правило, известная функция координат границы и времени);  $\vec{\alpha}_{\Gamma,g} = \frac{c}{U_{\Gamma,g}} \int_{\vec{\Omega} \cdot \vec{n} \geq 0} \vec{\Omega} I_g d\vec{\Omega}$ . Теперь соотношение (4) можно записать в следующем виде:

$$\vec{\Phi}_{\Gamma,g} = \vec{\Phi}_{\Gamma,g}^+ + \vec{\alpha}_{\Gamma,g} U_{\Gamma,g}.$$

Коэффициент  $\vec{\alpha}_{\Gamma,g}$  является дробно-линейным функционалом и рассчитывается по аналогии с коэффициентами квазидиффузии.

Система уравнений (2) наиболее естественным образом аппроксимируется разностной схемой второго порядка точности на равномерной сетке. Как известно, для гиперболических систем уравнений типа (2) схемы второго порядка точности могут быть немонотонными. Для удобства построения схемы первого порядка точности запишем первое уравнение системы (2) в следующем виде:

$$\rho \frac{d}{dt} \left( \frac{U_g}{\rho} \right) + (\nu + 1) \frac{\partial}{\partial r^{\nu+1}} (r^\nu c \langle \xi \rangle U_g) + \frac{\partial}{\partial z} (c \langle \mu \rangle U_g) + c \alpha_g U_g = c \alpha_g B_g, \quad (5)$$

где введены обозначения

$$\langle \xi \rangle = \frac{1}{U_g} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \xi I_g d\mu d\psi; \quad \langle \mu \rangle = \frac{1}{U_g} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \mu I_g d\mu d\psi. \quad (6)$$

Коэффициенты  $\langle \xi \rangle$ ,  $\langle \mu \rangle$  являются усредненными по всем углам направляющими косинусами полета фотонов. Они представляют собой дробно-линейные функционалы, которые рассчитываются по аналогии с коэффициентами квазидиффузии.

Выражения для потоков в данной постановке будут иметь вид

$$\Phi_r = \langle \xi \rangle c U; \quad \Phi_z = \langle \mu \rangle c U. \quad (7)$$

Легко заметить, что поскольку  $|\langle \xi \rangle| \leq 1$  и  $|\langle \mu \rangle| \leq 1$ , то потоки в выражениях (7) при разностной аппроксимации не могут превышать предельно допустимого значения, чего нельзя сказать о потоках при разностной аппроксимации системы уравнений (2).

Для уравнения (5) естественным образом строится консервативная монотонная разностная схема первого порядка точности.

Система уравнений (2) решается совместно с уравнением энергии

$$\frac{\partial E}{\partial t} - \frac{1}{r^\nu} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^\nu \chi(T) \frac{\partial T}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \chi(T) \frac{\partial T}{\partial z} \right) = c \sum_{g=1}^G \alpha_{a,g} (U_g - B_g) \Delta \varepsilon_g. \quad (8)$$

Для уравнения (8) на границе задано условие отсутствия теплового потока:  $\frac{\partial T}{\partial \bar{n}} = 0$ .

Здесь введены обозначения:  $T$  — температура вещества;  $E(T)$  — удельная внутренняя энергия вещества;  $\chi(T)$  — коэффициент теплопроводности вещества;  $U_g$  — плотность энергии излучения фотонов группы  $g$ ;  $\varepsilon_g$  — энергия фотона группы  $g$ ,  $\Delta \varepsilon_g = \varepsilon_{g+1} - \varepsilon_g$ ;  $G$  — количество групп. Решение определяется в замкнутой области в декартовых или цилиндрических координатах.

### Аппроксимация уравнения переноса излучения и уравнения энергии разностными уравнениями и их совместное решение

Исходная система уравнений аппроксимируется разностными уравнениями на квадратной сетке. В дальнейшем спектральный индекс  $g$  там, где это не вызовет недоразумений, будем опускать.

Подобно схеме РОМБ [3], запишем разностную схему первого порядка для уравнения (1) при  $\mu > 0$ ,  $\xi > 0$ . Для остальных значений  $\mu$ ,  $\xi$  формулы записываются аналогично. Для простоты записи положим  $\rho = 1$ . Для угловой сетки будем использовать  $ES_n$ -квadrатуру [4].

Итак, имеем разностную схему

$$\begin{aligned} \frac{I_{i,k}^{n+1} - I_{i,k}^n}{c\tau} + \xi_k \frac{r_{i1}^\nu I_{i,i1,k}^{n+1} - r_{i4}^\nu I_{i,i4,k}^{n+1}}{\tilde{h}_i} + \mu_k \frac{I_{i,i3,k}^{n+1} - I_{i,i2,k}^{n+1}}{h_i} - \nu \frac{1}{r_i} \frac{\eta_{k+1} I_{i,k+1}^n - \eta_k I_{i,k}^{n+1}}{\psi_{k+1} - \psi_k} - \\ - \frac{\alpha_{s,i}}{2\pi} \sum_k I_{i,k}^n (d\mu\psi)_k + \alpha_{t,i} I_{i,k}^{n+1} = Q_i, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $i, i1, i2, i3, i4, i5, i6, i7, i8$  — пространственные индексы ячеек сетки (рис. 1);  $k$  — угловой индекс;  $(d\mu\psi)_k$  — элемент площади на единичной сфере;  $h_i$  — размер  $i$ -й ячейки;  $\tilde{h}_i = \frac{1}{\nu+1} (r_{i1}^{\nu+1} - r_{i4}^{\nu+1})$ , где  $r_{i1}, r_{i4}$  — верхний и нижний радиусы  $i$ -й ячейки,  $\tilde{h}_i = h_i$  в декартовых координатах;  $I_{i,i1}$  — интенсивность излучения на границе между  $i$ -й и  $i1$ -й ячейками,  $I_{i,i2}, I_{i,i3}, I_{i,i4}$  имеют аналогичный смысл.

Систему уравнений вида (9) дополним краевыми условиями и соотношениями связи значений функции  $I$  в центрах и на гранях ячеек:  $I_{i,i3,k}^{n+1} = I_{i,i1,k}^{n+1} = I_{i,k}^{n+1}$ ;  $I_{i,i2,k}^{n+1} = I_{i,k}^{n+1}$  для внутренних ячеек,  $I_{i,i2,k}^{n+1} = I_\Gamma$  для граничных ячеек;  $I_{i,i4,k}^{n+1} = I_{i4,k}^{n+1}$  для внутренних ячеек,  $I_{i,i4,k}^{n+1} = I_\Gamma$  для граничных ячеек.

Система уравнений (2) аппроксимируется неявной разностной схемой. Значения плотности энергии и коэффициентов квазидиффузии определены в центрах ячеек, значения потоков — на гранях ячеек.

Аппроксимация  $i$ -й ячейки на равномерной сетке для шаблона, изображенного на рис. 1, будет иметь вид

<b><i>i5</i></b>	<b><i>i1</i></b>	<b><i>i6</i></b>
<b><i>i2</i></b>	<b><i>i</i></b>	<b><i>i3</i></b>
<b><i>i7</i></b>	<b><i>i4</i></b>	<b><i>i8</i></b>

Рис. 1. Шаблон расчета уравнения переноса излучения на квадратной сетке

$$\begin{aligned}
 & \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\tau} + \frac{r_{i1}^\nu \Phi_{r,i1}^{n+1} - r_{i4}^\nu \Phi_{r,i4}^{n+1}}{\tilde{h}_i} + \frac{\Phi_{z,i3}^{n+1} - \Phi_{z,i2}^{n+1}}{h_i} + \alpha_i U_i = \alpha_i B_i; \\
 & \frac{\Phi_{r,i1}^{n+1} - \Phi_{r,i1}^n}{\tau c^2} + r_{i1}^\nu \frac{D_{1,i1} U_{i1}^{n+1} - D_{1,i} U_i^{n+1}}{0,5 (\tilde{h}_i + \tilde{h}_{i1})} + \\
 & + \frac{0,5 (D_{3,i6} U_{i6}^{n+1} + D_{3,i3} U_{i3}^{n+1}) - 0,5 (D_{3,i5} U_{i5}^{n+1} + D_{3,i2} U_{i2}^{n+1})}{h_i + 0,5 (h_{i2} + h_{i3})} + \\
 & + \nu \frac{0,5 [(2D_{1,i1} + D_{2,i1} - 1) + (2D_{1,i} + D_{2,i} - 1)] U_{i1} + U_i}{r_{i1}} + \frac{1}{c} \tilde{\alpha}_{i,i1} \Phi_{r,i1}^{n+1} = 0, \\
 & \frac{\Phi_{z,i3}^{n+1} - \Phi_{z,i3}^n}{\tau c^2} + r_{i3}^\nu \frac{0,5 (D_{3,i6} U_{i6}^{n+1} + D_{3,i1} U_{i1}^{n+1}) - 0,5 (D_{3,i4} U_{i4}^{n+1} + D_{3,i8} U_{i8}^{n+1})}{\tilde{h}_i + 0,5 (\tilde{h}_{i1} + \tilde{h}_{i4})} + \\
 & + \frac{D_{2,i3} U_{i3}^{n+1} - D_{2,i} U_i^{n+1}}{0,5 (h_i + h_{i3})} + \nu \frac{0,5 (D_{3,i} + D_{3,i3}) U_i^{n+1} + U_{i3}^{n+1}}{r_{i3}^2} + \frac{1}{c} \tilde{\alpha}_{i,i3} \Phi_{z,i3}^{n+1} = 0.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Первое уравнение системы (10) записано для  $i$ -й ячейки. Второе — разностное уравнение для потока  $\Phi_{r,i1}^{n+1}$  на верхней грани  $i$ -й ячейки, третье — для потока  $\Phi_{z,i3}^{n+1}$  на правой грани  $i$ -й ячейки. Аналогично получаем разностные формулы для потоков на нижней и левой гранях  $i$ -й ячейки. В системе уравнений (10) используются следующие обозначения:  $U_i$  — плотность энергии в  $i$ -й ячейке;  $\Phi_{r,i1}$ ,  $\Phi_{r,i4}$  — соответственно потоки через верхнюю и нижнюю грани  $i$ -й ячейки;  $\Phi_{z,i3}$ ,  $\Phi_{z,i2}$  — соответственно потоки через правую и левую грани  $i$ -й ячейки;  $D_{1,i}$ ,  $D_{2,i}$ ,  $D_{3,i}$  — коэффициенты квазидиффузии в  $i$ -й ячейке (аналогичные обозначения для соседних ячеек);  $\alpha_i$  — коэффициент поглощения  $i$ -й ячейки;  $\tilde{\alpha}_{i,j}$  — коэффициент поглощения, отнесенный к ребру между  $i$ -й и  $j$ -й ячейками следующим образом:  $\tilde{\alpha}_{i,j} = \left( \frac{1}{\alpha_i} + \frac{1}{\alpha_j} \right)^{-1}$ ;  $\tilde{h}_{i1}$ ,  $\tilde{h}_{i2}$ ,  $\tilde{h}_{i3}$ ,  $\tilde{h}_{i4}$  записываются аналогично  $\tilde{h}_i$ ;  $\tau$  — шаг по времени.

Приведенные разностные уравнения имеют второй порядок аппроксимации на равномерной сетке по пространству.

Уравнение (5) аппроксимируется следующей разностной схемой, которую запишем для положительных  $\langle \xi \rangle$  и  $\langle \mu \rangle$ :

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{c\tau} + \frac{r_i^\nu \langle \xi \rangle_i U_i^{n+1} - r_{i1}^\nu \langle \xi \rangle_{i1} U_{i1}^{n+1}}{0,5 (\tilde{h}_i + \tilde{h}_{i1})} + \frac{\langle \mu \rangle_i U_i^{n+1} - \langle \mu \rangle_{i3} U_{i3}^{n+1}}{h_i} + \alpha_i U_i = \alpha_i B_i. \tag{11}$$

Схема (11) является монотонной тогда, когда пары  $\langle \xi \rangle_i$ ,  $\langle \xi \rangle_{i1}$  и  $\langle \mu \rangle_i$ ,  $\langle \mu \rangle_{i3}$  имеют одинаковый знак. Для остальных значений  $\langle \xi \rangle$  и  $\langle \mu \rangle$  разностная схема расписывается по аналогии с (11), но с учетом направления характеристики.

Уравнения (6) для направляющих косинусов полета фотонов аппроксимируются следующим образом:

$$\langle \mu \rangle_j = \frac{\sum_k \mu_k I_{jk} (d\mu\psi)_k}{\sum_k I_{jk} (d\mu\psi)_k}; \quad \langle \xi \rangle_j = \frac{\sum_k \xi_k I_{jk} (d\mu\psi)_k}{\sum_k I_{jk} (d\mu\psi)_k}.$$

В случае, если  $\sum_k I_{jk} (d\mu\psi)_k < m_{\min}$ , где  $m_{\min}$  — заданная константа, полагаем  $\langle \mu \rangle_j = \langle \xi \rangle_j = 0$ .

Авторами используется значение  $m_{\min} = 10^{-9}$ .

Комбинация разностных схем (10), (11) осуществляется следующим образом. Сначала счет проводится по схеме (10). Если данная схема дает решение, имеющее локальные максимумы или минимумы по плотности энергии излучения или потоку (т. е. не выполняется принцип максимума), то в точках экстремума переходим на схему (11). Отметим, что в этих точках направляющие косинусы

могут иметь одинаковый знак (например, см. в следующем разделе тест 1, где имеется локальный максимум, но все фотоны летят в одном направлении). Как показала практика расчетов, случаи с противоположными знаками встречаются крайне редко и не оказывают существенного влияния на монотонность решения.

Нахождение решения полученной системы неявных разностных уравнений совместно с решением разностного аналога уравнения (8) представляет в двумерном случае определенные трудности. Поэтому для решения данного класса задач используется метод выделения диагонального элемента [5, 6].

Аппроксимация уравнения (8) изложена в работе [6].

### Расчеты тестовых задач

На иллюстрациях к нижеприведенным тестам 1–6 показаны решения, полученные в результате расчетов

- кинетического уравнения по схеме первого порядка точности (схема 1);
- уравнений квазидиффузии по схеме второго порядка точности (схема 2);
- уравнений квазидиффузии по гибридной разностной схеме (схема 3),

а также аналитические решения.

Во всех расчетах, если это не оговорено специально, шаг по времени  $\tau$  выбирался из условия Куранта  $c\tau/h = 0,5$ . Аналитические решения для тестов 3–5 получены А. В. Вронским.

**Тест 1.** *Перенос прямоугольного профиля вдоль оси  $z$ .* Решение ищется в прямоугольной области  $0 < z < 4$ ;  $0 < r < 0,04$ . В начальный момент времени на отрезке  $1 \leq z < 2$  для  $\mu = 1$  задана единичная интенсивность излучения. Вне данного отрезка интенсивность излучения равна нулю. Процессы поглощения и рассеяния не учитываются. Источники излучения отсутствуют. Скорость света равна 1. На границе указанной области выполняется условие отражения.

Уравнение переноса для данного случая можно записать в виде

$$\frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial z} = 0.$$

Соответствующая система уравнений квазидиффузии примет вид

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_z}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \Phi_z}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial z} = 0. \quad (12)$$

При записи системы уравнений (12) принято, что коэффициенты квазидиффузии равны  $D_1 = 1$ ,  $D_2 = 0$ ,  $D_3 = 0$ . Начальные условия для системы уравнений (12) в области  $1 \leq z < 2$  имеют вид  $U|_{t=0} = 1$ ,  $\Phi_z|_{t=0} = 1$ ; в остальной области  $U|_{t=0} = 0$ ,  $\Phi_z|_{t=0} = 0$ .

Данная задача имеет аналитическое решение в виде бегущей волны. Задача рассчитывалась на сетке с размером ячейки  $h = 0,04$ .

Как видно из рис. 2, схема первого порядка точности сильнее размывает фронт волны, чем схема второго порядка. Гибридная схема практически совпадает со схемой второго порядка, но не проявляет свойств немонотонности.

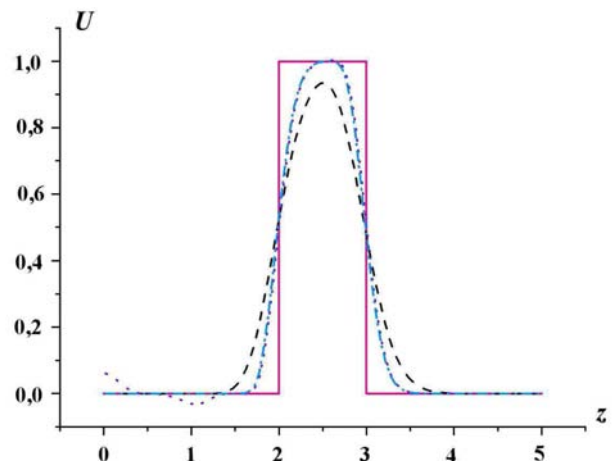


Рис. 2. Тест 1. Профили плотности энергии излучения на момент времени  $t = 1$ : — — — по схеме 1; ··· — по схеме 2; - · - · по схеме 3; — — — аналитическое решение

**Тест 2.** Перенос параллелепипеда вдоль прямой под углом  $45^\circ$  к оси  $z$ . В прямоугольной декартовой системе координат в квадратной области  $2 < r < 3$ ;  $2 < z < 3$  в начальный момент времени для  $\mu = \xi = \sqrt{2}/2$  задана единичная интенсивность излучения. Процессы поглощения и рассеяния не учитываются. Источники излучения отсутствуют.

Решение ищется в плоскости  $0 < r < 5$ ;  $0 < z < 5$ . На границе указанной области задается условие отражения. Скорость света равна 1.

Уравнение переноса в данном случае имеет вид

$$\frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\partial I}{\partial r} + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\partial I}{\partial z} = 0.$$

Соответствующая система уравнений квазидиффузии примет вид

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_r}{\partial r} + \frac{\partial \Phi_z}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \Phi_r}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \Phi_z}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial z} = 0. \quad (13)$$

При записи системы уравнений (13) считается, что коэффициенты квазидиффузии равны:  $D_1 = D_2 = D_3 = 1/2$ . Начальные условия для системы уравнений (13) в квадратной области  $2 < r < 3$ ;  $2 < z < 3$  имеют вид  $U|_{t=0} = 1$ ,  $\Phi_r|_{t=0} = \Phi_z|_{t=0} = \sqrt{2}/2$ .

Задача рассчитывалась на сетке с размером ячейки  $h = 0,04$ .

На рис. 3 приведено распределение плотности энергии излучения, полученное из расчета уравнений квазидиффузии по гибридной разностной схеме на момент времени  $t = 1,4$ . На рис. 4 — профили плотности энергии излучения в плоскости, параллельной оси  $z$  и оси  $U$ , проходящей через центр аналитического решения на тот же момент времени, т. е. через точку на оси  $r$ ,  $r = 3,510152544$ .

В данной задаче по гибридной схеме получено решение более точное, чем решение по немонокотной схеме второго порядка. При этом гибридная схема сохраняет свойства монотонности.

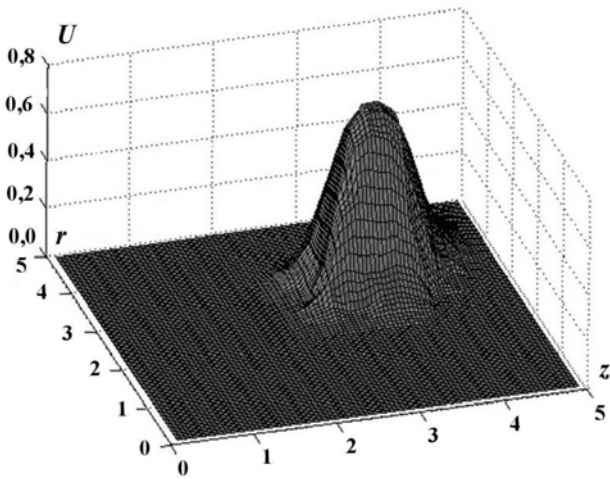


Рис. 3. Плотность энергии излучения на момент времени  $t = 1,4$ , полученная из расчета уравнений квазидиффузии по гибридной разностной схеме

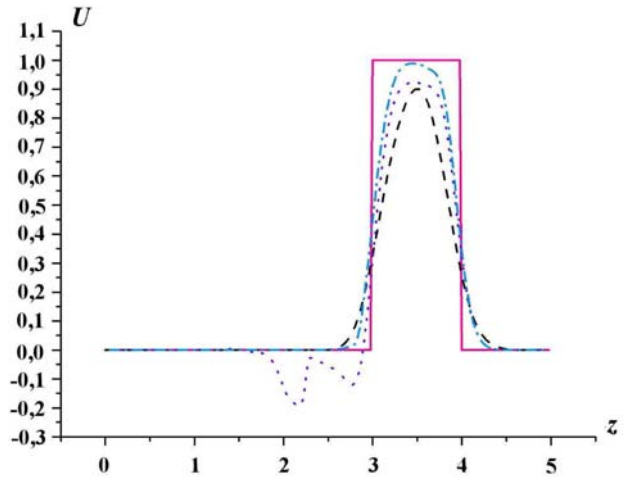


Рис. 4. Тест 2. Профили плотности энергии излучения на момент времени  $t = 1,4$ : — — — по схеме 1; ··· — по схеме 2; - · - · — по схеме 3; — — — аналитическое решение

**Тест 3.** Рассматривается задача в плоской постановке. В прямоугольной области  $0 < z < 1$  задана изотропно распределенная интенсивность излучения с плотностью энергии излучения, равной 1.

Решение ищется в области  $0 < z < 4$ , по радиусу область ограничена размером ячейки. На границе этой области задается условие отражения. Скорость света равна 1.

Уравнение переноса в данном случае имеет вид

$$\frac{\partial I}{\partial t} + \mu \frac{\partial I}{\partial z} = 0.$$

Соответствующая система уравнений квазидиффузии:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_z}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \Phi_z}{\partial t} + \frac{\partial D_1 U}{\partial z} = 0. \quad (14)$$

Коэффициент квазидиффузии  $D_1$  вычисляется по формуле (3);  $D_2 = D_3 = 0$ . Начальные условия для системы уравнений (14) на отрезке  $0 \leq z < 1$  имеют вид  $U|_{t=0} = 1$ ,  $\Phi_z|_{t=0} = 0$ .

Расчет проводился на сетке с размером ячейки  $h = 0,005$ , по угловой переменной использовалась квадратура  $ES_{64}$ .

Из рис. 5 видно, что схема второго порядка дает немонотонное решение. На выделенном фрагменте графика (см. рисунок справа) видно, что схема первого порядка точнее сильнее размывает фронт волны.

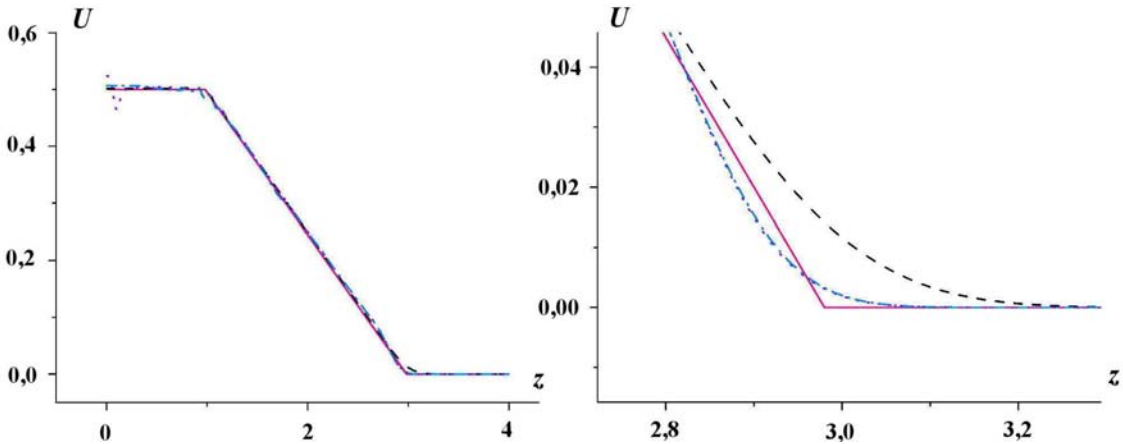


Рис. 5. Тест 3. Профили плотности энергии излучения на момент времени  $t = 2$ : — — — по схеме 1; ... — по схеме 2; - · - · - по схеме 3; — — — — аналитическое решение

**Тест 4.** Задача аналогична тестовой задаче 3, только в цилиндрической постановке. Уравнение переноса в этом случае имеет вид

$$\frac{\partial I}{\partial t} + \xi \frac{\partial I}{r \partial r} + \mu \frac{\partial I}{\partial z} - \frac{\partial (\eta I)}{r \partial \psi} = 0.$$

Соответствующая система уравнений квазидиффузии:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial r \Phi_r}{r \partial r} = 0; \quad \frac{\partial \Phi_r}{\partial t} + \frac{\partial D_1 U}{\partial r} + \frac{2D_1 + D_2 - 1}{r} U = 0. \quad (15)$$

Коэффициенты квазидиффузии  $D_1$  и  $D_2$  вычисляются по формулам (3);  $D_3 = 0$ . Начальные условия для системы уравнений (15) на отрезке  $0 \leq r < 1$  имеют вид  $U|_{t=0} = 1$ ,  $\Phi_r|_{t=0} = 0$ .

Расчет проводился на сетке с размером ячейки  $h = 0,005$ , по угловой переменной использовалась квадратура  $ES_{64}$ .

Из рис. 6 видно, что схема второго порядка дает сильно немонотонное решение в центральных областях системы. На выделенном фрагменте графика (справа на рис. 6) видно, что схема первого порядка точнее сильнее размывает фронт волны.

**Тест 5.** Рассматривается задача в цилиндрической геометрии. В сферической области  $r^2 + z^2 < 1$  задана изотропно распределенная интенсивность излучения с плотностью энергии излучения, равной 1. Граница раздела начальных данных  $r^2 + z^2 = 1$  моделируется линиями сетки и представляет собой ступенчатую линию.





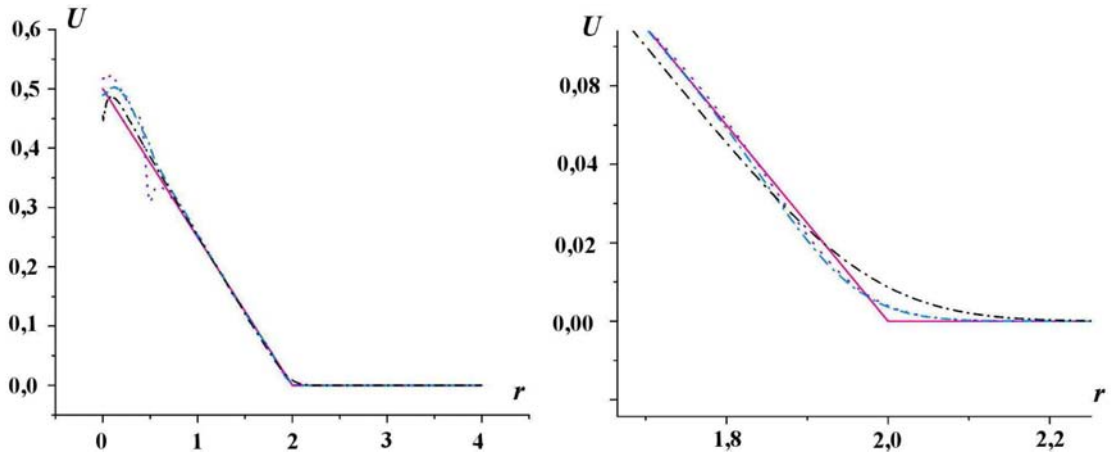


Рис. 7. Тест 5. Профили плотности энергии излучения в сечении под углом  $45^\circ$  на момент времени  $t = 1$ :  
 - - - - по схеме 1;  $\cdots$  — по схеме 2; - · - · - по схеме 3; — — — — аналитическое решение

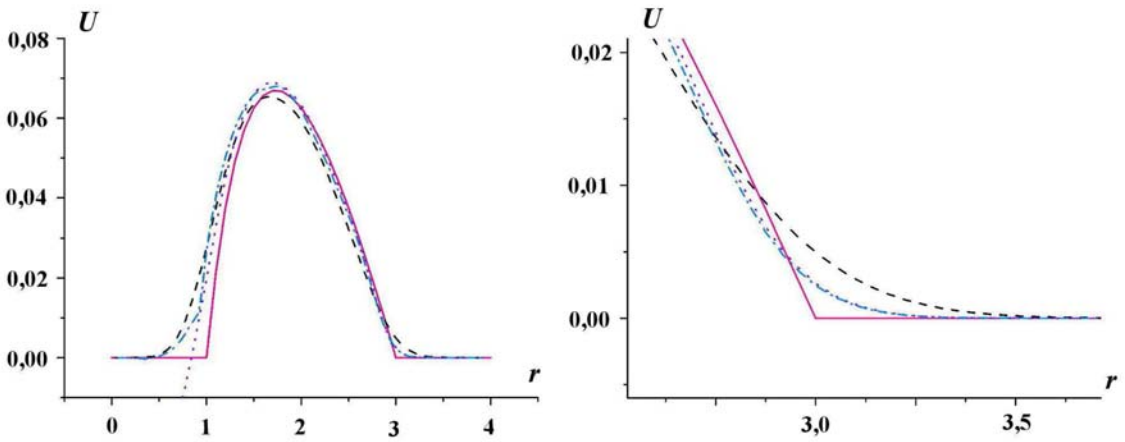


Рис. 8. Тест 5. Профили плотности энергии излучения в сечении под углом  $45^\circ$  на момент времени  $t = 2$ :  
 - - - - по схеме 1;  $\cdots$  — по схеме 2; - · - · - по схеме 3; — — — — аналитическое решение

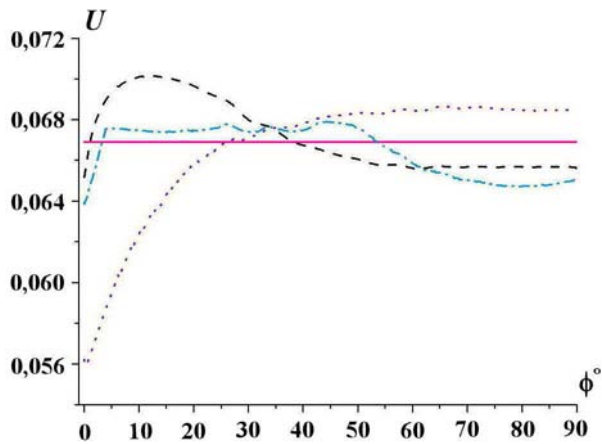


Рис. 9. Тест 5. Зависимость плотности энергии излучения от угла при  $r = 1,7$ ;  $t = 2$ : - - - - по схеме 1;  
 $\cdots$  — по схеме 2; - · - · - по схеме 3; — — — — аналитическое решение

**Тест 6.** Рассматривается вторая задача Флека [7] в двух постановках: плоской и сферической. Система состоит из трех физических областей, ограниченных в плоском случае координатами по  $z$ , в остальных случаях — координатами по радиусу. Первая область ограничена координатами 1 и 3, вторая область — 3 и 3,4, третья область — 3,4 и 5. Отметим, что граница раздела областей в сферическом случае моделируется линиями сетки и представляет собой ступенчатую линию. На внутреннюю поверхность рассматриваемой системы падает изотропный планковский источник излучения с температурой, равной 1. Коэффициент поглощения вычисляется по формуле

$$\alpha_g = \alpha_0 \frac{1 - \exp(-\varepsilon/T)}{\varepsilon^3},$$

$\alpha_0 = 27$  в первой и третьей областях,  $\alpha_0 = 10^4$  во второй области. Уравнение состояния вещества  $E = 0,81T$ .

Во всех расчетах использовалась следующая сетка по спектру:  $\{\varepsilon_g\} = 10^{-4}; 0,02; 0,04; 0,06; 0,08; 0,1; 0,15; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,7; 1,0; 1,4; 1,8; 2,2; 2,6; 3,0; 3,5; 4,0; 4,5; 5,0; 5,5; 6,0; 7,0; 8,0; 10,0; 12,0; 15,0$ . Расчеты проводились на равномерной сетке по пространству с размером ячейки 0,02. Шаг по времени брался  $ct = 0,6$ . По углу использовалась квадратура  $ES_8$ . Увеличение квадратуры до  $ES_{16}$  практически не отразилось на полученных результатах.

Следует отметить, что двумерные расчеты для данной задачи, выполненные по комбинированной схеме и схеме второго порядка точности, совпали.

На рис. 10 приводятся результаты расчета задачи Флека для плоской геометрии. Видно, что на данной сетке результаты, полученные по одномерной методике [2, 5] и по предлагаемой схеме, с хорошей точностью совпали.

На рис. 11 приводятся результаты расчета задачи Флека в сферической постановке — профили температуры излучения в плоскости, параллельной оси  $U$ , проведенной из начала координат под углом  $45^\circ$ .

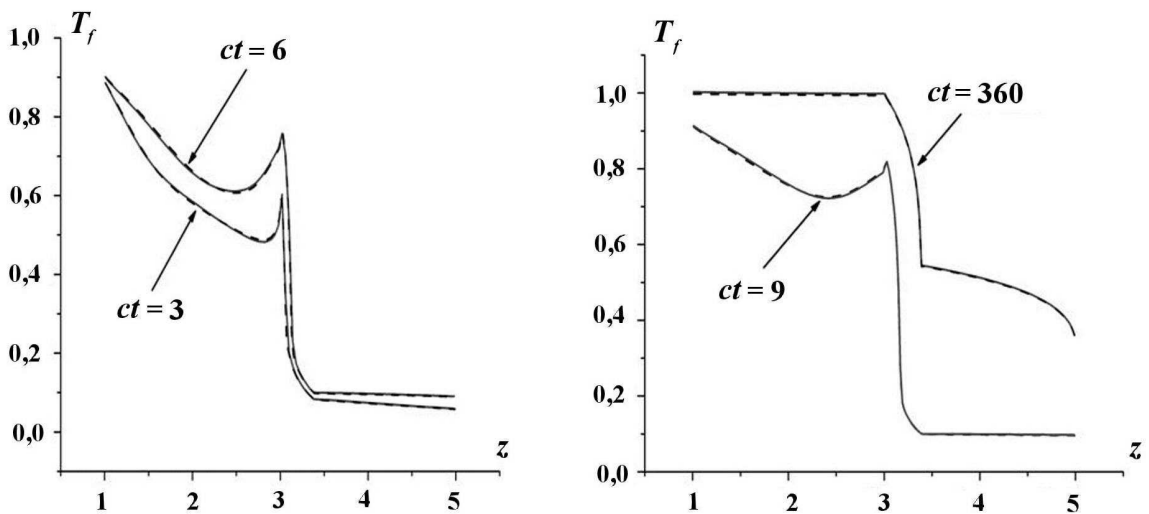


Рис. 10. Тест 6, плоская постановка. Профили температуры излучения на моменты времени  $ct = 3, 6, 9, 360$ : — — по методике [2, 5]; - - - - из расчета уравнений квазидиффузии по схеме второго порядка

### Заключение

Предложена гибридная схема для решения задач переноса излучения в спектральной квазидиффузионной постановке в двумерном осесимметричном случае. На решении большого числа задач показано, что рассмотренная гибридная схема, в отличие от схемы второго порядка точности, обеспечивает монотонное решение. При этом точность полученного решения выше, чем точность решения, полученного по схеме первого порядка.

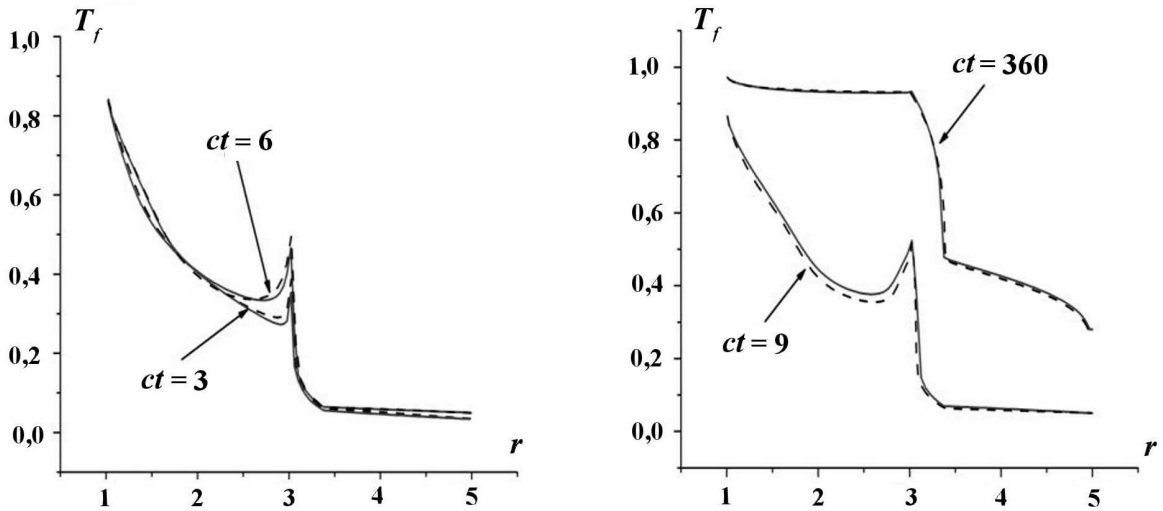


Рис. 11. Тест 6, сферическая постановка. Профили температуры излучения на моменты времени  $ct = 3, 6, 9, 360$ : — — по методике [2, 5]; - - - - из расчета уравнений квазидиффузии по схеме второго порядка

### Список литературы

1. Аристова Е. Н., Гольдин В. Я., Колпаков А. В. Методика расчета переноса излучения в теле вращения // Математическое моделирование. 1997. Т. 9, № 3. С. 91–108.
2. Карлыханов Н. Г. Применение метода квазидиффузии для решения задач переноса излучения // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2010. Вып. 1. С. 32–38.
3. Гаджиев А. Д., Селезнёв В. Н., Шестаков А. А.  $DS_n$ -метод с искусственной диссипацией и ВДМ-метод ускорения итераций для численного решения двумерного уравнения переноса теплового излучения в кинетической модели // Там же. 2003. Вып. 2. С. 33–46.
4. Lathrop K. D., Carlson B. G. Discrete ordinates angular quadrature of the neutron transport equation. LA-3186, 1965.
5. Карлыханов Н. Г. Построение оптимальных многодиагональных методов решения задач переноса излучения // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1997. Т. 37, № 4. С. 494–498.
6. Карлыханов Н. Г., Уракова А. В. Неявная схема решения уравнения переноса излучения в спектральном  $P_1$ -приближении на квадратной адаптивной сетке // Межд. конф. "Забабахинские научные чтения". Снежинск, 5–9 сентября 2005 г.
7. Fleck J. A., Jr., Cummings J. D. An implicit Monte-Carlo scheme for calculating time and frequency dependent nonlinear radiation transport // J. Comp. Phys. 1971. Vol. 8(3). P. 313–342.

Статья поступила в редакцию 10.04.10.