

УДК 519.6:536.71

РЕШЕНИЕ КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ МЕТОДОМ УСРЕДНЕННЫХ КОСИНУСОВ

А. С. Егорова, Н. Г. Карлыханов
(Ивановский ГУ, РФЯЦ-ВНИИТФ)

Предлагается метод решения кинетического уравнения переноса излучения, основанный на усреднении исходного уравнения по угловой переменной. Для полученных уравнений построены разностные схемы на основе неявных TVD-подходов. Применимость предлагаемого метода исследовалась на решении ряда методических задач.

Ключевые слова: перенос излучения, TVD-подход, одномоментные уравнения переноса с усредненными косинусами.

Введение

В работе рассматривается один подход для расчета переноса излучения, основанный на усреднении кинетического уравнения по угловой переменной.

Часто используемый квазидиффузионный подход [1, 2] обладает рядом недостатков. Основной из них: соответствующая система уравнений является системой гиперболического типа, и согласно теореме Годунова для нее нельзя построить линейную монотонную схему второго порядка точности. Для преодоления данного недостатка применяются либо комбинированные схемы [3], либо TVD-подходы (Total Variation Diminishing) [4]. В последнем случае уравнение квазидиффузии записывается в инвариантах [5]. Построение инвариантов на разностном уровне представляет определенные трудности даже в одномерном случае, не говоря уже о двумерном и трехмерном. Применяемый авторами подход существенно проще метода инвариантов для квазидиффузии и легко обобщается на многомерный случай.

В отличие от квазидиффузионного подхода [1, 2], где используются двухмоментные уравнения с замыканием через коэффициент квазидиффузии, построено одномоментное уравнение с замыканием через усредненный косинус направления полета фотонов. Усредненные косинусы рассчитываются по аналогии с коэффициентом квазидиффузии исходя из решения кинетического уравнения по простым разностным схемам первого порядка точности. Ранее данный подход использовался для построения комбинированной разностной схемы для решения уравнения переноса излучения в двумерном случае [3].

Для полученных одномоментных уравнений строится разностная схема, основанная на неявных TVD-подходах [4]. Были исследованы ограничители типа $\min\text{mod}$ и Чакравати—Ошера [6]. В отличие от работы [4] ограничители брались как с n -го временного шага (линейная TVD-схема), так и с $(n+1)$ -го (нелинейная TVD-схема). Для нелинейной TVD-схемы полученная система нелинейных алгебраических уравнений решалась методом Ньютона.

Постановка задачи

Для простоты рассмотрим перенос излучения в плоском одномерном случае в неподвижной среде. В этом случае кинетическое уравнение имеет следующий вид:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I}{\partial t} + \mu \frac{\partial I}{\partial x} + (\kappa_a + \kappa_s) I - \frac{\kappa_s}{2} \int_{-1}^1 I(\mu') d\mu' = Q, \quad (1)$$

где c — скорость света; t — время; I — интенсивность излучения; μ — косинус угла полета фотона относительно оси x ; κ_a — коэффициент поглощения излучения; κ_s — коэффициент рассеяния излучения; Q — изотропный источник излучения.

Уравнение (1) дополняется граничными и начальными условиями следующего вида: $I(x_{left}, \mu > 0) = f_{left}(\mu, t)$ на левой границе; $I(x_{right}, \mu < 0) = f_{right}(\mu, t)$ на правой границе; $I(x, \mu, t = 0) = \varphi(x, \mu)$. Здесь $f_{left}(\mu, t)$, $f_{right}(\mu, t)$, $\varphi(x, \mu)$ — заданные функции.

Если уравнение (1) проинтегрировать по угловой переменной с весом, равным единице, то его можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial \langle \mu \rangle cU}{\partial x} + c\kappa_a U = 2Q. \quad (2)$$

Здесь введены обозначения

$$U = \frac{1}{c} \int_{-1}^1 I d\mu; \quad \langle \mu \rangle = \frac{\int_{-1}^1 \mu I d\mu}{\int_{-1}^1 I d\mu},$$

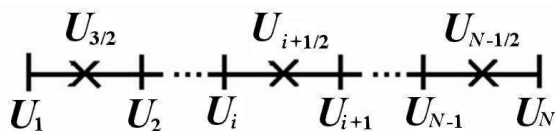
где U — плотность энергии излучения; $\langle \mu \rangle$ — средний косинус направления полета фотонов.

Уравнение (2) дополняется граничными и начальными условиями следующего вида: $U_{left} = \frac{1}{c} \int_0^1 f_{left}(\mu, t) d\mu$ на левой границе, если $\langle \mu \rangle > 0$, в противном случае граничное условие не ставится;

$U_{right} = \frac{1}{c} \int_{-1}^0 f_{right}(\mu, t) d\mu$ на правой границе, если $\langle \mu \rangle < 0$, в противном случае граничное условие не ставится; $U(t = 0) = \frac{1}{c} \int_{-1}^1 \varphi(x, \mu, t_0) d\mu$ ($f_{left}(\mu, t)$, $f_{right}(\mu, t)$, $\varphi(x, \mu, t_0)$ — заданные функции).

Разностная аппроксимация уравнений с усредненными косинусами

Определим плотность энергии излучения U в центрах и на гранях ячеек (рис. 1). В этом случае неявная разностная схема для уравнения (2) примет вид



$$U_{i+1/2}^{n+1} - U_{i+1/2}^n + \frac{c\tau}{h} (\langle \mu_{i+1} \rangle U_{i+1}^{n+1} - \langle \mu_i \rangle U_i^{n+1}) + c\tau\kappa_a U_{i+1/2}^{n+1} = 2\tau Q_{i+1/2}. \quad (3)$$

В уравнении (3) индекс i меняется от 1 до $N - 1$. При положительном $\langle \mu_1 \rangle$ значение U_1^{n+1} определяется граничным условием. При отрицательном $\langle \mu_N \rangle$ значение U_N^{n+1} также определяется граничным условием.

В соответствии с TVD-методологией уравнение (3) дополняется соотношениями связи следующего вида:

– для $\langle \mu \rangle > 0$

$$\begin{aligned}
 U_{i+1}^{n+1} &= U_{i+1/2}^{n+1} + 0,5\phi_{i+1/2} \left(U_{i+1/2}^{n+1} - U_{i-1/2}^{n+1} \right), \\
 \phi_{i+1/2} &= \frac{L \left(\Delta U_{i-1/2}, \Delta U_{i+1/2} \right)}{\Delta U_{i-1/2}} = \frac{L \left(U_{i+1/2} - U_{i-1/2}, U_{i+3/2} - U_{i+1/2} \right)}{U_{i+1/2} - U_{i-1/2}} = L \left(1, \theta_{i+1/2} \right), \quad (4) \\
 \theta_{i+1/2} &= \frac{\Delta U_{i+1/2}}{\Delta U_{i-1/2}} = \frac{U_{i+3/2} - U_{i+1/2}}{U_{i+1/2} - U_{i-1/2}};
 \end{aligned}$$

– для $\langle \mu \rangle < 0$

$$\begin{aligned}
 U_i^{n+1} &= U_{i+1/2}^{n+1} - 0,5\phi_{i-1/2} \left(U_{i+3/2}^{n+1} - U_{i+1/2}^{n+1} \right), \\
 \phi_{i-1/2} &= \frac{L \left(\Delta U_{i+1/2}, \Delta U_{i-1/2} \right)}{\Delta U_{i+1/2}} = \frac{L \left(U_{i+3/2} - U_{i+1/2}, U_{i+1/2} - U_{i-1/2} \right)}{U_{i+3/2} - U_{i+1/2}} = L \left(1, \theta_{i-1/2} \right), \quad (5) \\
 \theta_{i-1/2} &= \frac{\Delta U_{i-1/2}}{\Delta U_{i+1/2}} = \frac{U_{i+1/2} - U_{i-1/2}}{U_{i+3/2} - U_{i+1/2}}.
 \end{aligned}$$

Для уравнений (4), (5) индекс i меняется от 2 до $N - 2$. При $i = 1$ или $i = N - 1$ коэффициент ϕ полагается равным нулю, т. е. в приграничных точках используется схема первого порядка точности.

Если функция $\phi(\theta)$ известна, то система уравнений (3)–(5) является системой линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $U_{i+1/2}^{n+1}$, U_{i+1}^{n+1} . Число уравнений равно $2N - 1$. Перенумерация неизвестных производится в следующем порядке:

1	2	3	...	$2i - 1$	$2i$...	$2N - 3$	$2N - 2$	$2N - 1$
U_1 ,	$U_{3/2}$,	U_2 ,	...	U_i ,	$U_{i+1/2}$,	...	U_{N-1} ,	$U_{N-1/2}$,	U_N .

В соответствии с принятой нумерацией матрица системы линейных уравнений (3)–(5) будет иметь семидиагональный вид.

Если в качестве ограничителя взять $\min \text{mod}$, то функция $\phi(\theta)$ примет вид [4]

$$\phi_{i+1/2} = \frac{1 + \text{sign}(\theta_{i+1/2})}{2} \min(1, |\theta_{i+1/2}|).$$

Если в качестве ограничителя взять ограничитель Чакравати–Ошера [6], то функция $\phi(\theta)$ примет вид

$$\phi_{i+1/2} = \frac{(1 - \delta) \min \text{mod}(1, \beta\theta_{i+1/2}) + (1 + \delta) \min \text{mod}(\beta, \theta_{i+1/2})}{2},$$

где $\min \text{mod}(a, b) = 0,5 (\text{sign}(a) + \text{sign}(b)) \min(|a|, |b|)$; β, δ – параметры ограничителя Чакравати–Ошера. Рекомендованные значения параметров: $\beta = 3$; $\delta = 1/3$.

Так как функция θ имеет дробно-линейный характер, то можно ожидать, что она слабо меняется за шаг τ . Таким образом, функцию-ограничитель $\phi(\theta)$ можно взять с n -го шага [4].

Формально TVD-схема является нелинейной. Если брать функцию ϕ с n -го шага, то не требуются дополнительных итераций по нелинейности. Поэтому в дальнейшем данную TVD-схему будем называть линейной.

Однако представляет интерес, когда функция $\phi(\theta)$ берется не с n -го шага, как описано в [4], а с $(n+1)$ -го шага. В этом случае соотношения (4), (5) будут иметь нелинейный характер. Для решения систем нелинейных уравнений применяем метод Ньютона. Функции $\phi(\theta)$ (рис. 2) не имеют непрерывных первых производных по θ . Использование данных функций при организации ньютоновского итерационного процесса не целесообразно. Для того, чтобы можно было корректно использовать эти функции, их необходимо аппроксимировать некими выражениями, которые имели бы непрерывные

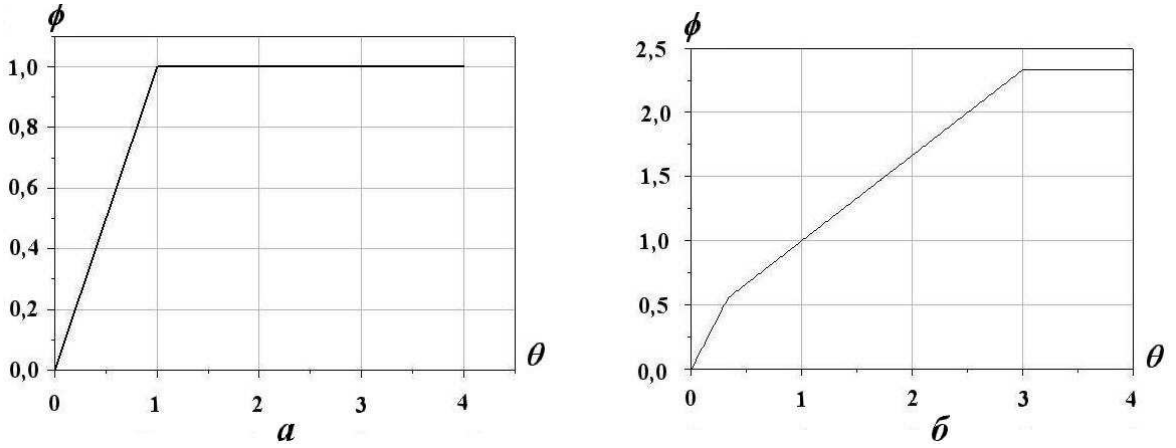


Рис. 2. Графики функций $\phi(\theta)$: a — ограничитель min mod; b — ограничитель Чакравати—Ошера

первые производные. В качестве таких выражений использовались полиномы третьего порядка в точках вблизи изломов функций $\phi(\theta)$, которые обеспечивали непрерывность функций и их первых производных. Для каждой точки излома функции $\phi(\theta)$ размер окрестности, в которой строился такой полином, составлял 10% от значения аргумента θ . В этом случае относительное отклонение сглаженных функций от точных функций в норме L_1 составляет доли процента.

Поскольку уравнения (4), (5) в случае, когда $\phi(\theta)$ берется с $(n+1)$ -го шага, являются нелинейными, то для дальнейшего использования их необходимо линеаризовать. Линеаризация производится путем разложения всех нелинейных членов в ряд Тейлора в окрестностях начального приближения с точностью до первого порядка. В этом случае линеаризованное уравнение (3) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \Delta U_{i+1/2}^{S+1} + U_{i+1/2}^S - U_{i+1/2}^n + \frac{c\tau}{h} \left(\langle \mu_{i+1} \rangle \Delta U_{i+1}^{S+1} - \langle \mu_i \rangle \Delta U_i^{S+1} \right) + \\ + \frac{c\tau}{h} \left(\langle \mu_{i+1} \rangle \Delta U_{i+1}^S - \langle \mu_i \rangle \Delta U_i^S \right) + c\tau \kappa_a \left(\Delta U_{i+1/2}^{S+1} + U_{i+1/2}^S \right) = 2\tau Q_{i+1/2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Линеаризованные соотношения связи (4), (5) примут вид:

– для $\langle \mu \rangle > 0$

$$\begin{aligned} \Delta U_{i+1}^{S+1} + \left\{ -1 + 0,5 \left[\phi - (1 + \theta) \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right] \right\} \Delta U_{i+1/2}^{S+1} + 0,5 \left(\phi - \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \Delta U_{i-1/2}^{S+1} - \\ - 0,5 \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \Delta U_{i+3/2}^{S+1} = U_{i+1/2}^S + 0,5 \phi \left(U_{i+1/2}^S - U_{i-1/2}^S \right) - U_{i+1}^S; \end{aligned} \quad (7)$$

– для $\langle \mu \rangle < 0$

$$\begin{aligned} \Delta U_i^{S+1} + \left\{ -1 + 0,5 \left[\phi - (1 + \theta) \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right] \right\} \Delta U_{i+1/2}^{S+1} + 0,5 \left(\phi - \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \Delta U_{i+3/2}^{S+1} - \\ - 0,5 \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \Delta U_{i-1/2}^{S+1} = U_{i+1/2}^S + 0,5 \phi \left(U_{i+3/2}^S - U_{i+1/2}^S \right) - U_i^S. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь $\Delta U^{S+1} = U^{S+1} - U^S$, где S — номер ньютоновской итерации. Формально при записи формул (6)–(8) в ряд Тейлора разложены не только нелинейные члены, но и линейные. Матрица системы линеаризованных уравнений (6)–(8) также имеет семидиагональный вид. Данную модификацию TVD-схемы в дальнейшем будем называть нелинейной.

Итерации по нелинейности проводятся до сходимости. Сходимость проверяется по следующему критерию:

$$|\Delta U^{S+1}| < \varepsilon (|U^{S+1} + \eta|). \quad (9)$$

Критерий (9) проверяется во всех точках по пространству. В практических расчетах использовались значения $\varepsilon = 10^{-5}$, $\eta = 10^{-3}$.

Примеры численных расчетов. Задачи о распространении излучения в вакууме

С целью проверки применимости предлагаемых методов были произведены серии расчетов задач с известными аналитическими решениями в шести постановках, сводимых к численному решению:

- 1) кинетического уравнения по схеме первого порядка по пространству и времени;
- 2) уравнения квазидиффузии по схеме второго порядка по пространству и первого порядка по времени;
- 3) уравнения с усредненными косинусами по схеме TVD с ограничителем min mod, линейный случай;
- 4) уравнения с усредненными косинусами по схеме TVD с ограничителем min mod, нелинейный случай;
- 5) уравнения с усредненными косинусами по схеме TVD с ограничителем Чакравати—Ошера, линейный случай;
- 6) уравнения с усредненными косинусами по схеме TVD с ограничителем Чакравати—Ошера, нелинейный случай.

Коэффициенты квазидиффузии и усредненные косинусы рассчитывались на основе решения кинетического уравнения (1) по схеме первого порядка.

Были рассмотрены задачи:

- 1) о переносе прямоугольного профиля в вакууме для плоской геометрии;
- 2) о распространении изотропного излучения от границ системы в вакууме;
- 3) о распространении изотропного излучения в вакууме от заданного начального профиля.

Две последние задачи имеют аналитические решения. Результаты расчетов представлены ниже.

Задача 1. Перенос прямоугольного профиля в вакууме для плоской геометрии. Рассмотрим задачу о распространении излучения в непоглощающей и нерассеивающей среде ($\kappa_a = \kappa_s = 0$), скорость света положим равной $c = 1$. В системе размером $L = 200$ в начальный момент времени интенсивность излучения равна нулю. В области, ограниченной координатами $x = 50$ и $x = 70$, задана единичная интенсивность излучения только для $\mu = 1$, для остальных углов интенсивность излучения равна нулю. Отметим, что для данной задачи коэффициент квазидиффузии и средний косинус равны единице. Данная задача имеет аналитическое решение.

Задача рассчитывалась с постоянным числом Куранта $k = c\tau/h = 0,5$ с разными шагами по пространству. Результаты расчетов в постановках 1—6 (см. выше) представлены на рис. 3.

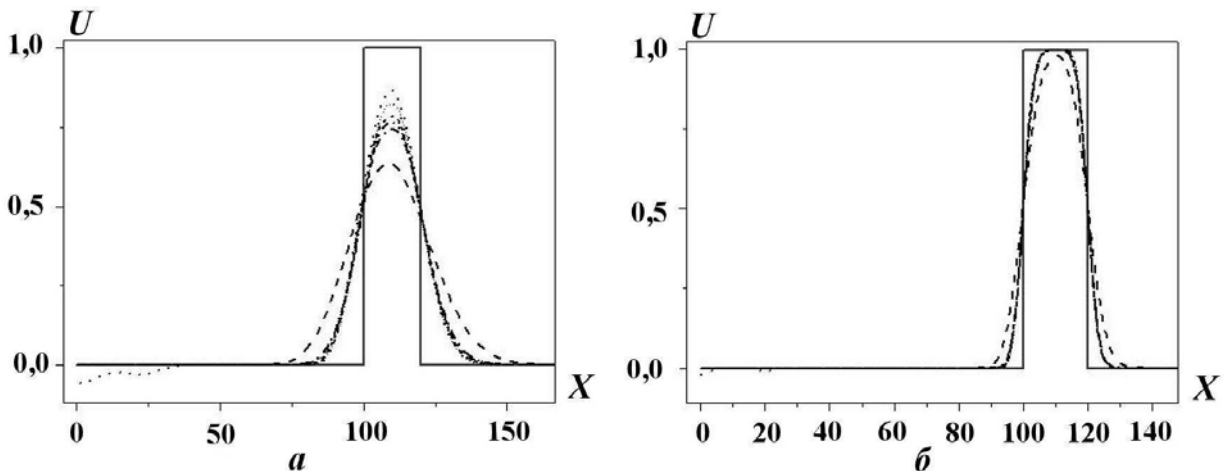


Рис. 3. Задача 1. Профили плотности энергии излучения на грубой (а) и подробной (б) сетках по пространству, $t = 50$: — — аналитическое решение; - - - — постановка 1; \cdots — постановка 2; - · - · — постановка 3; - · · - · — постановка 4; $\cdots\cdots$ — постановка 5; $\cdots\cdots\cdots$ — постановка 6

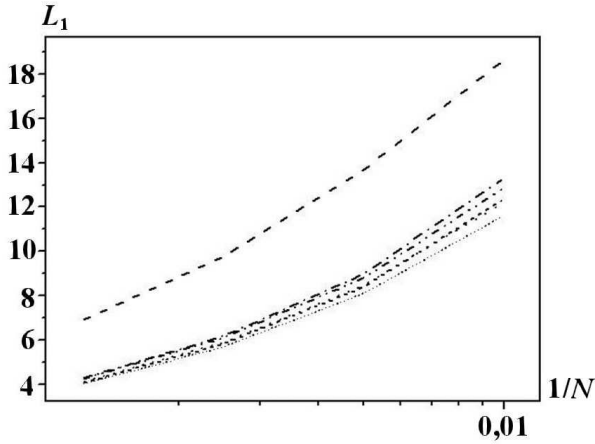


Рис. 4. Задача 1. Сходимость в норме L_1 по временной переменной при постоянном числе Куранта: — — — — постановка 1; ···· — постановка 2; - - - - постановка 3; - · - · - постановка 4; ······ — постановка 5; ······ — постановка 6

На рис. 4 представлена скорость сходимости используемых методов решения исходного уравнения (N — число точек сетки по пространству).

Как видно из рис. 3, квазидиффузионный подход дает немонотонное решение. На подробных сетках схемы второго порядка дают примерно одинаковый результат. Наилучшее приближение к точному решению, особенно на грубых сетках, имеет метод усредненных косинусов по нелинейной TVD-схеме с ограничителем Чакравати—Ошера (постановка 6).

Отметим, что в расчетах число ньютоновских итераций не превышало 3-4.

Задача 2. Распространение изотропного излучения от границ системы в вакууме.

Рассмотрим задачу о распространении излучения в непоглощающей и нерассеивающей среде ($\kappa_a = \kappa_s = 0$), скорость света положим равной единице. В системе размером $L = 100$ в начальный момент времени интенсивность излучения равна нулю. На левой границе задана изотропная интенсивность излучения, равная единице для $\mu > 0$, на правой границе изотропная интенсивность излучения равна единице для $\mu < 0$.

В расчете с постановкой 1 с параметром $k = 0,5$, числом точек по пространству $N = 101$ и числом точек по угловой переменной $M = 8$ было получено решение, представленное на рис. 5. На рисунке видна немонотонность даже для схемы первого порядка. Данная немонотонность обусловлена не качеством разностной схемы, а особенностью размазывания фронта волны при различных числах Куранта. Это хорошо видно из рис. 6, где представлены профили интенсивности излучения на момент времени $t = 50$ для положительных углов. Видно, что интенсивности излучения монотонны, но имеют различные размазывания фронта волны. Так, при $\mu = 1$ фронт размазался на существенно большее число точек, чем при $\mu = 1/7$. При интегрировании данных профилей по угловой переменной получается немонотонный профиль плотности энергии излучения.

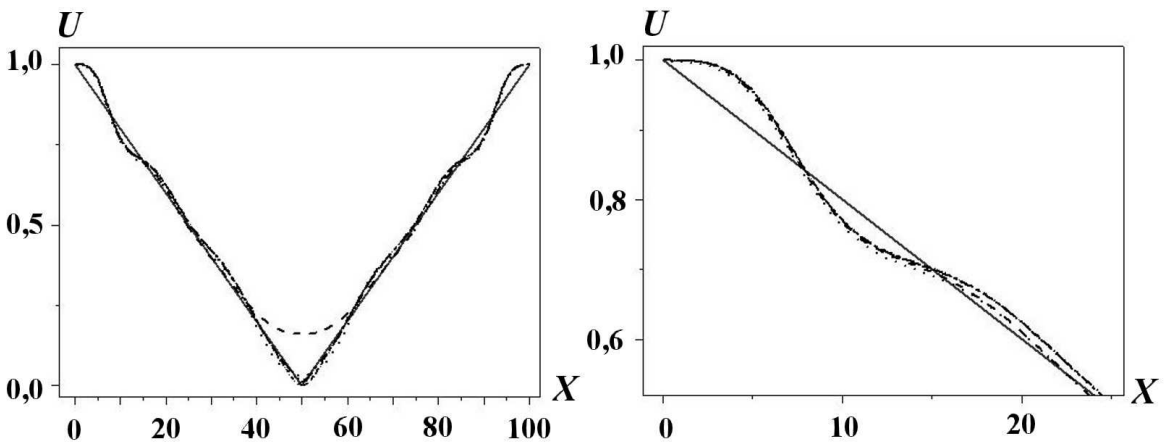


Рис. 5. Задача 2. Профили плотности энергии излучения, $t = 50$; $\tau = 0,25$ (справа — фрагмент профилей в увеличенном масштабе): — — — — аналитическое решение; - - - - постановка 1; ···· — постановка 2; - · - · - постановка 3; - · - · - постановка 4; ······ — постановка 5; ······ — постановка 6

Рассчитанные по представленным выше профилям профили коэффициентов квазидиффузии и средних косинусов также имеют немонотонный характер (рис. 7). Данная немонотонность исчезает с увеличением числа точек по угловой переменной. Уже при $M = 32$ немонотонность практически не наблюдается.

Была проведена серия расчетов с постоянным числом Куранта $k = 0,5$ с разными шагами по пространству. Чтобы не проявлялась немонотонность, данная серия расчетов проводилась с числом углов $M = 64$. Результаты расчетов представлены на рис. 8, 9.

Из рис. 9 видно, что все схемы второго порядка точности дают примерно одно и то же решение, которое имеет слабую немонотонность.

На рис. 10 представлены скорости сходимости

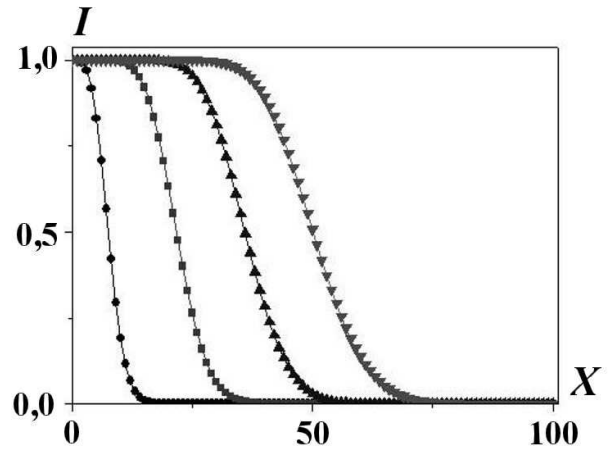


Рис. 6. Задача 2. Профили интенсивности излучения для положительных углов, $t = 50$: \bullet — $\mu = 1/7$; \blacksquare — $\mu = 3/7$; \blacktriangle — $\mu = 5/7$; \blacktriangledown — $\mu = 1$

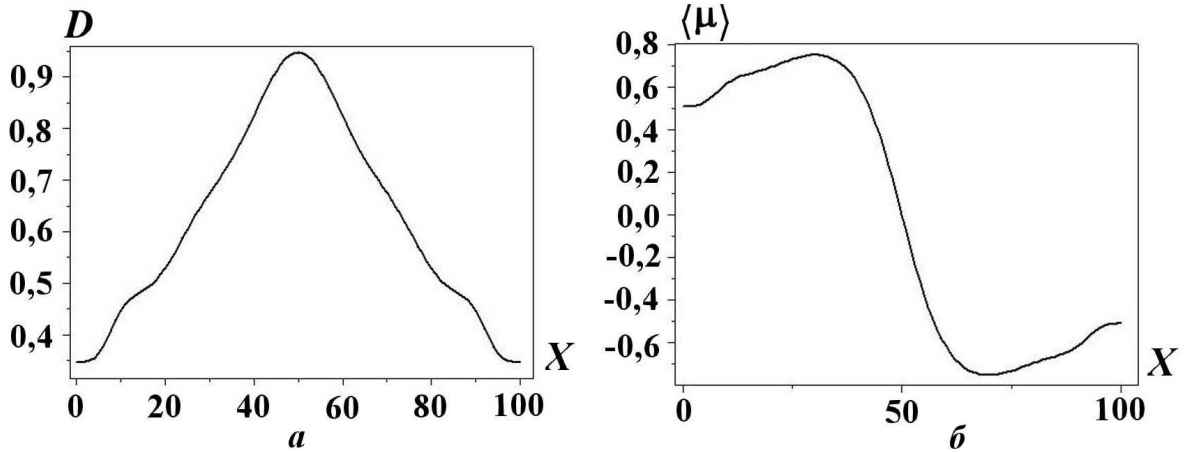


Рис. 7. Задача 2. Профили коэффициента квазидиффузии (а) и среднего косинуса (б), $t = 50$

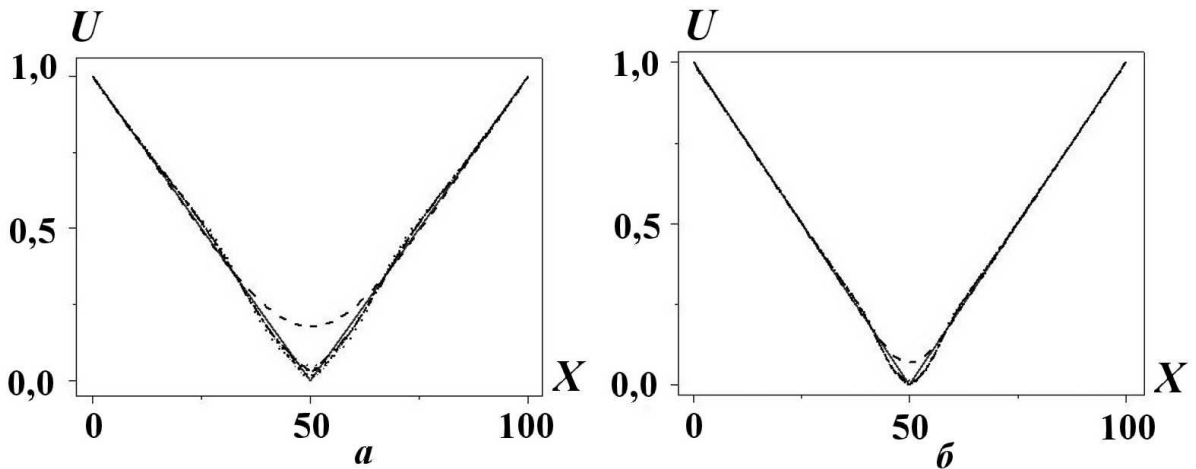


Рис. 8. Задача 2. Профили плотности энергии излучения на грубой (а) и подробной (б) сетках по пространству, $t = 50$: — — — — аналитическое решение; - - - — постановка 1; ··· — постановка 2; - · - · — постановка 3; · · · · — постановка 4; ····· — постановка 5; ······ — постановка 6

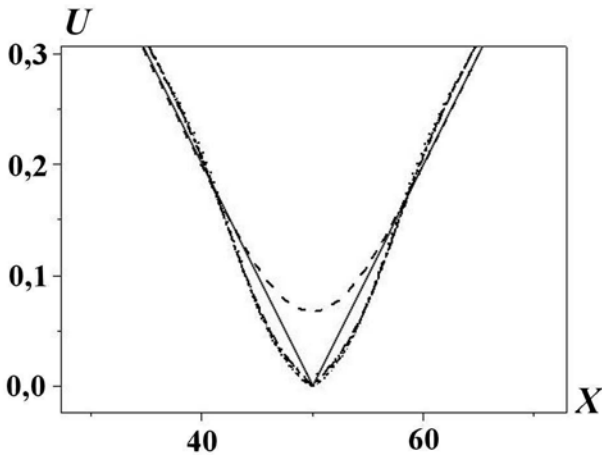


Рис. 9. Задача 2. Фрагмент распределения плотности энергии излучения на подробной сетке по пространству, $t = 50$: ———— — аналитическое решение; - - - - - постановка 1; ····· — постановка 2; - · - · - постановка 3; - · · - · - постановка 4; ······ — постановка 5; ········ — постановка 6

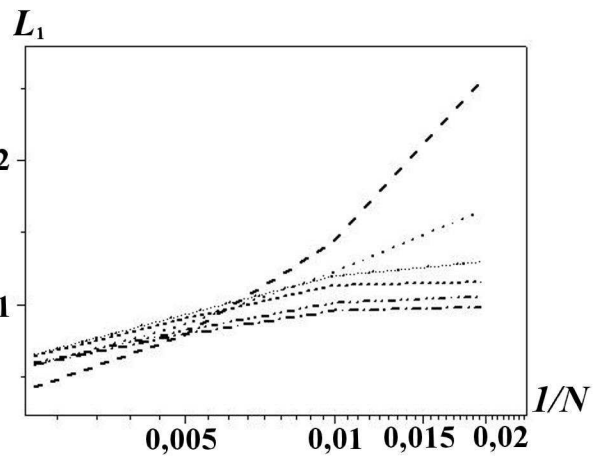


Рис. 10. Задача 2. Сходимость в норме L_1 по временной переменной при постоянном числе Куранта: - - - - - постановка 1; ····· — постановка 2; - · - · - постановка 3; - · · - · - постановка 4; ······ — постановка 5; ········ — постановка 6

сходимости численного решения к точному аналитическому решению в норме L_1 (N — число точек сетки по пространству). Из рисунка видно, что на грубой сетке по пространству наилучшее решение получается по методу средних косинусов по линейной TVD-схеме с ограничителем $\min \text{mod}$. На подробной сетке схемы второго порядка точности проявляют немонотонный характер, что, по-видимому, приводит к потере точности по сравнению со схемой первого порядка.

Задача 3. Распространение изотропного излучения в вакууме от заданного начального профиля. Рассмотрим задачу о распространении излучения в непоглощающей и нерассеивающей среде ($\kappa_a = \kappa_s = 0$), скорость света положим равной единице. В системе размером $L = 200$ в начальный момент времени интенсивность излучения равна нулю, кроме области, ограниченной координатами $x = 80$ и $x = 120$. В данной области в начальный момент времени задано изотропное излучение с единичной плотностью энергии излучения.

Задача рассчитывалась с постоянным числом Куранта $k = 0,5$, с разным числом точек по пространству: от $N = 101$ до $N = 801$. Число точек по угловой переменной $M = 64$.

Полученные решения представлены на рис. 11. Как видно из рисунка, для квазидиффузионного метода проявляется сильная немонотонность, в то время как при методах с усредненными косинусами имеются почти монотонные решения и на подробной сетке получаются примерно одинаковые результаты.

Из рис. 12 можно заметить, что схемы второго порядка точности дают небольшую немонотонность, что, по-видимому, сказывается на скорости сходимости численного решения к точному. Этот факт отражен на рис. 13, из которого видно, что для данной задачи наихудшая сходимость из-за немонотонных свойств имеет место в квазидиффузионном подходе. Подходы с усредненными косинусами проявляют слабую немонотонность, что также сказывается на точности решения. Схема первого порядка для данной задачи является наилучшей.

Заключение

Для одномоментных уравнений с усредненными косинусами построены неявные разностные схемы на основе TVD-подходов с использованием ограничителей типа $\min \text{mod}$ и Чакравати—Ошера. При этом ограничители, в отличие от рассмотренных ранее подходов, брались как с n -го, так и с $(n + 1)$ -го временного шага. По сравнению с квазидиффузионным подходом рассмотренные схемы имеют практически монотонный характер.

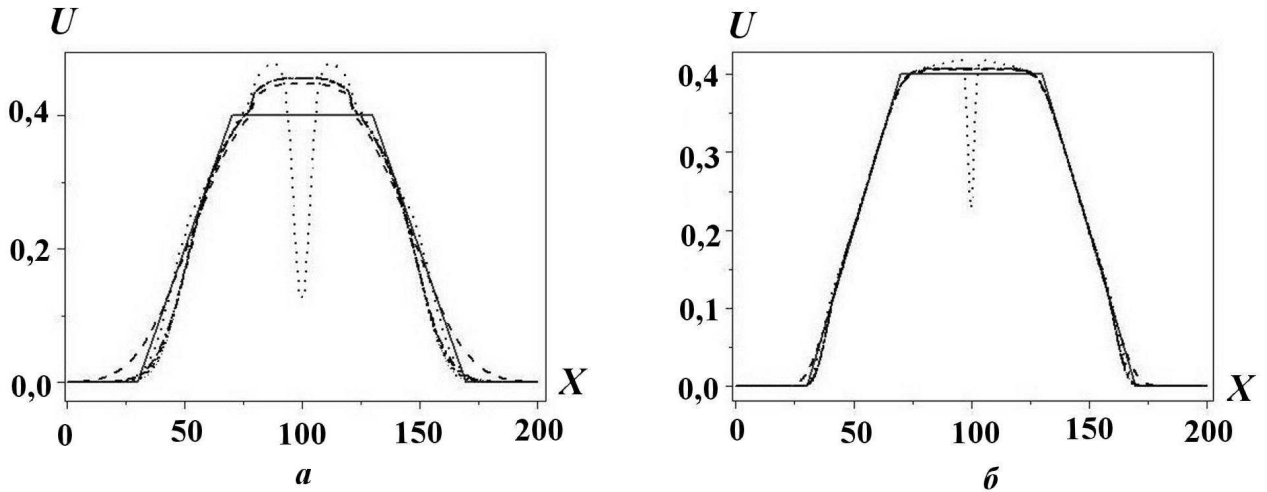


Рис. 11. Задача 3. Профили плотности энергии излучения на грубой (а) и подробной (б) сетках по пространству, $t = 50$: ———— — аналитическое решение; - - - - - постановка 1; ···· — постановка 2; - · - · - постановка 3; - · · - · - постановка 4; ······ — постановка 5; ······ — постановка 6

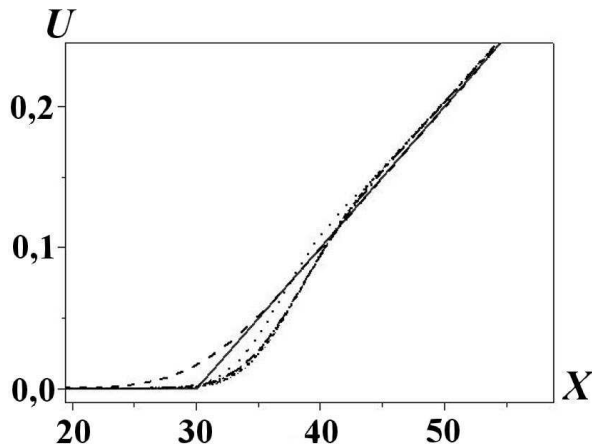


Рис. 12. Задача 3. Фрагмент профилей плотности энергии излучения на подробной сетке по пространству, $t = 50$: ———— — аналитическое решение; - - - - - постановка 1; ···· — постановка 2; - · - · - постановка 3; - · · - · - постановка 4; ······ — постановка 5; ······ — постановка 6

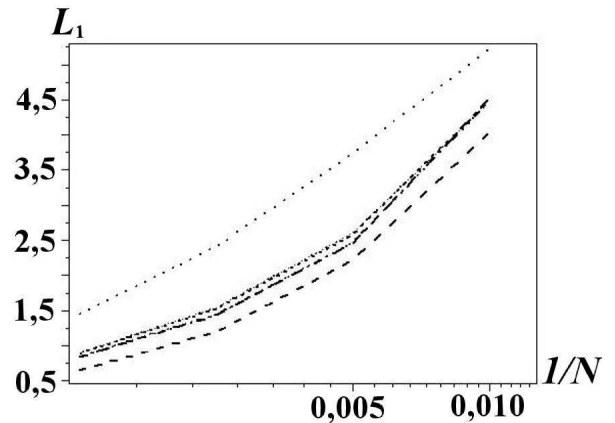


Рис. 13. Задача 3. Сходимость в норме L_1 по временной переменной при постоянном числе Куранта: - - - - - постановка 1; ···· — постановка 2; - · - · - постановка 3; - · · - · - постановка 4; ······ — постановка 5; ······ — постановка 6

Список литературы

1. Гольдин В. Я. Квазидиффузионный метод решения кинетического уравнения // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1964. Т. 4, № 6. С. 1078—1087.
2. Карлыханов Н. Г. Применение метода квазидиффузии для решения задач переноса излучения // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2010. Вып. 1. С. 32—38.
3. Карлыханов Н. Г., Уракова А. В., Шнитко С. А. Применение метода квазидиффузии для решения задач переноса излучения в спектральной кинетической постановке в двумерном осесимметричном случае на квадратной адаптивной сетке // Там же. 2011. Вып. 2. С. 33—43.

4. Гаджиев А. Д., Завьялов В. В., Шестаков А. А. Применение TVD-подхода к DS_n -методу решения уравнения переноса теплового излучения // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2009. Вып. 2. С. 37–48.
5. Гаджиев А. Д., Шестаков А. А., Завьялов В. В., Грабовенская С. А. Применение TVD-подхода к решению уравнения переноса теплового излучения квазидиффузионным методом // Там же. 2010. Вып. 3. С. 3–14.
6. Osher S., Chakravarthy S. High resolution schemes and the entropy condition // SIAM J. Numer. Anal. 1984. Vol. 21(5). P. 955–984.

Статья поступила в редакцию 01.12.2010.
