**УДК 624.131.43, 624.131.522**

# О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ МОДЕЛЕЙ МЕХАНИКИ МНОГОФАЗНЫХ ГРУНТОВ

Н. Е. Галиуллина, М. Г. Храмченков, Э. М. Храмченков, А. Н. Чекалин, В. В. Михайлов

(НИИ математики и механики им. Н. Г. Чеботарева Казанского (Приволжского) федерального университета)

Исследуются уравнения баланса массы различных фаз грунта в полной постановке. Проанализированы следствия выявленных закономерностей массопереноса и деформирования ненасыщенного грунта, существенные для интерпретации опытных данных по компрессионному испытанию грунтов.

*Ключевые слова:* гидрогеомеханика, уравнение баланса массы, деформации, эффективные напряжения.

## Введение

Механика грунтов является той теоретической базой, которая "обслуживает" целый ряд прикладных наук по исследованию свойств грунтов и процессов, в них протекающих. Основные концепции механики грунтов, сформировавшиеся к настоящему времени, изложены, например, в [1, 2]. В последнее время наблюдается интенсивный интерес к новым постановкам задач механики грунтов в связи с исследованиями геоэкологической направленности, требующими, в том числе, детализации либо обобщения классических концепций. Подобные процедуры представляют как чисто теоретический интерес, так и позволяют по-новому взглянуть на традиционную информацию, полученную в результате экспериментальных исследований свойств грунтов, и наметить направления ее более комплексного использования. Так, исходя из уточненных уравнений баланса массы жидкой и твердой фаз грунта и используя данные классических компрессионных испытаний, можно дать более строгое описание некоторых закономерностей деформирования многофазного грунта, важное для построения корректных моделей процессов, протекающих в грунте при разнообразных воздействиях.

Уравнение, описывающее локальный баланс массы твердой и жидкой фаз грунта, наряду с законом движения этих фаз является определяющим для описания физико-механических свойств грунта в целом. Целью настоящей работы является получение уравнений баланса массы жидкой и твердой фаз грунта, более точно описывающих процессы переноса в деформирующемся ненасыщенном грунте по сравнению с известными из [3, 4].

## 1. Уравнение баланса массы жидкой фазы грунта

Запишем уравнение баланса массы (переноса массы) флюида в грунте:

$$\frac{\partial (ms\rho)}{\partial t} + \mathrm{div}(m\rho s\mathbf{V}) = 0. \qquad (1)$$

Здесь $\rho$ есть плотность флюида; $s$ — водонасыщенность грунта (степень насыщения [3]); $m$ — пористость грунта; $\mathbf{V}$ — скорость движения флюида в грунте [3, 4].

Запишем теперь уравнение баланса массы (переноса массы) твердого вещества пористого скелета грунта:

$$\frac{\partial \left[(1-m)\,\rho_s\right]}{\partial t} + \mathrm{div}\left[(1-m)\,\rho_s\mathbf{W}\right] = 0. \qquad (2)$$

Здесь, аналогично, $\rho_s$ есть плотность вещества твердой фазы; $\mathbf{W}$ — скорость движения вещества твердой фазы. При этом, очевидно,

$$\rho_s V_s = \rho_s\,(1-m)\,V = M_s, \;\; M_s = \mathrm{const}, \qquad (3)$$

где $V_s$, $V$, $M_s$ есть объем твердой фазы, объем представительного элемента пористой среды и масса твердой фазы в представительном объеме соответственно.

Определим коэффициент кубического расширения [5]:

$$\theta = \frac{V - V_0}{V_0}, \tag{4}$$

где $V_0$ — значение $V$ в начальный момент времени. Заметим, что в случае уменьшения объема при деформации определение (4) совпадает с определением относительной усадки. Используя предположение о малости коэффициента кубического расширения, будем с достаточной точностью полагать

$$V = V_0 \exp\theta, \quad V_0 = V(\theta = 0)\,. \tag{5}$$

Тогда, используя (5), записываем (3) в виде

$$\rho_s\,(1-m)\exp\theta = \frac{M_s}{V_0} = \mathrm{const}.$$

Дифференцируя последнее уравнение по времени, получаем

$$\frac{\partial m}{\partial t} = (1-m)\,\rho_s^{-1}\frac{\partial \rho_s}{\partial t} + (1-m)\,\frac{\partial \theta}{\partial t}. \tag{6}$$

Дифференцируя уравнение (2), получаем

$$-\frac{\partial m}{\partial t}\rho_s + (1-m)\,\frac{\partial \rho_s}{\partial t} + (1-m)\,\rho_s \mathrm{div}\mathbf{W} + \\ + \mathbf{W}\mathrm{grad}\Big[(1-m)\,\rho_s\Big] = 0. \tag{7}$$

Используя (6) и отбрасывая последний член в (7) как член второго порядка малости, имеем в итоге

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \mathrm{div}\mathbf{W}. \tag{8}$$

Факт малости последнего члена в (7) объясняется традиционным для механики пористых сред образом [6]. Из известного соотношения Терцаги $P = \sigma^f + p$, где $P$ — внешняя нагрузка на грунт, $\sigma^f$ — эффективное напряжение, $p$ — давление в жидкости, следует, что для $\mathrm{grad}\,P = 0$ справедливо $\mathrm{grad}\,\sigma^f = -\mathrm{grad}\,p$. Поскольку пористость грунта $m$ и плотность твердой фазы $\rho_s$ являются функциями аргументов $\sigma^f$ и $p$, то с учетом последнего соотношения член $\mathbf{W}\mathrm{grad}[(1-m)\,\rho_s]$ в уравнении (7) пропорционален произведению $\mathbf{W}\mathrm{grad}\,p$, следовательно, с учетом закона Дарси, произведению скорости $\mathbf{W}$ и скорости фильтрации $\mathbf{q}$. Механика пористых сред изучает процессы, протекающие с малыми скоростями, поэтому член, содержащий вторую степень скорости, может быть отброшен.

Далее, введя относительную скорость движения флюида в грунте (скорость фильтрации) $\mathbf{q} = ms\,(\mathbf{V} - \mathbf{W})$, запишем на основании уравнений (1) и (8)

$$ms\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho s\frac{\partial m}{\partial t} + m\rho\frac{\partial s}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\rho\mathbf{q}) + \mathrm{div}\,(\rho m s\mathbf{W}) = 0.$$

Преобразуя это уравнение и пренебрегая по тем же причинам, что и выше, членами второго порядка малости $\mathbf{q}\,\mathrm{grad}\,\rho$ и $\mathbf{W}\mathrm{grad}\,(m\rho)$, получаем

$$ms\rho^{-1}\frac{\partial \rho}{\partial t} + s\frac{\partial m}{\partial t} + m\frac{\partial s}{\partial t} + \mathrm{div}\mathbf{q} + ms\frac{\partial \theta}{\partial t} = 0. \tag{9}$$

С учетом (6) уравнение (9) переходит в уравнение

$$s\Big[m\rho^{-1}\frac{\partial \rho}{\partial t} + (1-m)\,\rho_s^{-1}\frac{\partial \rho_s}{\partial t}\Big] + \\ + m\frac{\partial s}{\partial t} + s\frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathrm{div}\mathbf{q} = 0. \tag{10}$$

Последнее является обобщением полученного А. В. Костериным [4] уравнения баланса массы жидкой фазы грунта для случая несжимаемых жидкой и твердой фаз грунта.

Рассмотрим деформацию грунта под действием внешней нагрузки для случая $s \neq 1$, т. е. в условиях неполного насыщения. При этом $\theta \leq 0$. Тогда, очевидно, фильтрация отсутствует и вся нагрузка приходится на скелет. Будем также считать, что водонасыщенность образца грунта будет быстро достигать значения, равновесного с влажностью, при которой проводятся компрессионные испытания образца. Другими словами, будем считать $s = \mathrm{const}$. Тогда из уравнения (10) следует

$$(1-m)\,\rho_s^{-1}\frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \frac{\partial \theta}{\partial t} = 0. \tag{11}$$

Вводя обозначение для сжимаемости твердой фазы $\beta_1 = (1-m)\,\rho_s^{-1}\dfrac{\partial \rho_s}{\partial P}$, где $P$ — внешняя нагрузка [7], и предполагая для простоты $\beta_1 = \mathrm{const}$ (более корректное определение сжимаемости твердой фазы будет дано в разд. 3), получаем из уравнения (11) следующую зависимость:

$$\beta_1 P + \theta = 0. \tag{12}$$

Рассмотрим теперь деформацию грунта под действием внешней нагрузки после замачивания. При этом, очевидно, $s = 1$ и $\theta \leq 0$. Фильтрацией для простоты рассуждений будем пренебрегать. В этих условиях вся нагрузка воспринимается жидкой фазой. Тогда из уравнения (10) получаем аналогично (12)

$$(\beta_1 + \beta_f)\, P + \theta = 0, \tag{13}$$

где введено обозначение для сжимаемости жидкой фазы $\beta_f \dfrac{\partial P}{\partial t} = m\rho^{-1} \dfrac{\partial \rho}{\partial t}$, $P$ — внешняя нагрузка [7].

Хорошо известно, что $\beta_f \ll \beta_1$ [7], поэтому график зависимости усадки от внешней нагрузки до замачивания образца подчиняется уравнению (12), а после замачивания — уравнению (13), испытывая в точке замачивания характерный скачок с одной кривой на другую, в полном соответствии с данными экспериментов (рис. 1).

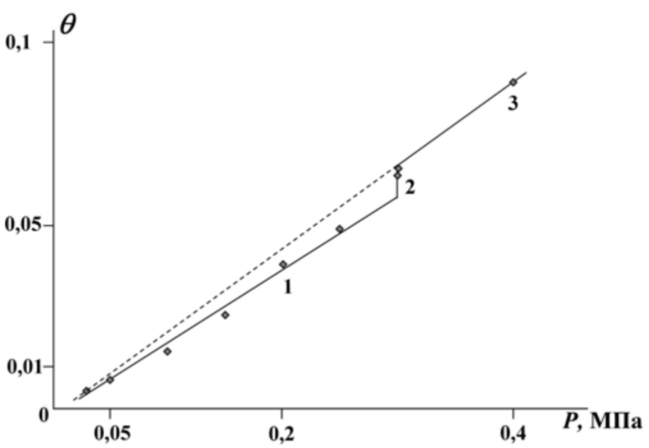


Рис. 1. Зависимость относительной усадки грунта от внешней нагрузки в процессе с промежуточным замачиванием: ♦ — экспериментальные данные; —— — расчетная кривая: 1 — до замачивания (расчет по (12)); 2 — во время замачивания; 3 — после замачивания (расчет по (13))

## 2. Уравнение баланса массы твердой фазы грунта

Обратимся снова к уравнению (3). Перепишем его с учетом (4) в виде

$$1 - m = \frac{M_s}{\rho_s\,(1+\theta)\,V_0}, \quad M_s = \mathrm{const}. \tag{14}$$

Тогда, разложив $\rho_s$ в ряд по величине внешней нагрузки с удержанием первой степени разложения, т. е. имея $\rho_s = \rho_s^0 \left[1 + (\rho_s^0)^{-1} \dfrac{\partial \rho_s}{\partial P}\right] = \rho_s^0(1 + \beta_s P)$, получим из (14)

$$1 - m = \frac{1 - m_0}{(1+\theta)\,(1+\beta_s P)}, \tag{15}$$

где $m_0$ — начальное значение $m$. Из соотношения (15) легко получить, воспользовавшись определением коэффициента пористости, следующее выражение:

$$e = e_0 \left[\frac{\theta + \beta_s P(1+\theta)}{m_0} + 1\right]. \tag{16}$$

Необходимо отметить, что, пренебрегая сжимаемостью твердой фазы, т. е. считая, что $\beta_s = 0$, из (16) можно получить следующее выражение для коэффициента пористости:

$$e = e_0 \left(\frac{\theta}{m_0} + 1\right). \tag{17}$$

Последнее выражение совпадает с соответствующей формулой в [8, с. 32], полученной из геометрических рассуждений. Действительно, в соответствии с [8, с. 32] имеем

$$e_i = e_0 - (1 + e_0)\,\frac{s_i}{h}, \tag{18}$$

где $e_i$ — коэффициент пористости грунта при любой степени нагрузки; $e_0$ — начальный коэффициент пористости грунта; $s_i$ — полная осадка образца при данной нагрузке; $h$ — начальная высота образца грунта. С учетом определения усадки (4) при введенных обозначениях имеем

$$e = e_i; \qquad \theta = -\frac{s_i}{h}.$$

Тогда из (18) немедленно следует (17).

Поскольку экспериментальные данные по зависимости коэффициента пористости от относительной осадки, т. е. от величины $s_i/h$, были получены с помощью формулы (18), то в этом случае имеется практически полное соответствие измеренных данных и рассчитанных по формуле (17) (рис. 2).

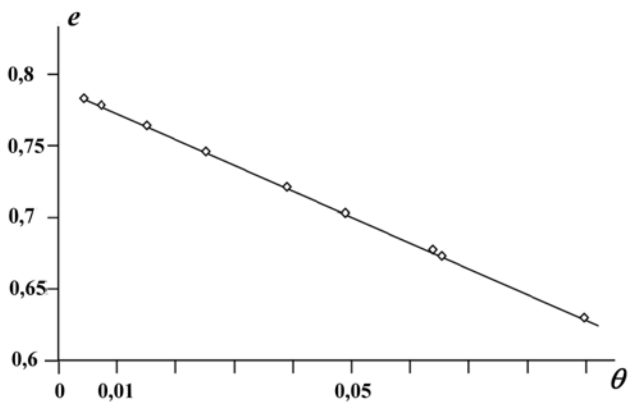


Рис. 2. Зависимость коэффициента пористости грунта от относительной усадки грунта под действием внешней нагрузки: ♢ — экспериментальные данные; —— — расчетная кривая

## 3. Уравнения механики многофазных грунтов

Уравнение (11), описывающее локальный баланс массы жидкой фазы грунта, в случае, когда жидкая фаза занимает долю $s$ в поровом объеме грунта, имеет вид

$$s\left[m\rho_1^{-1}\frac{\partial\rho_1}{\partial t}+(1-m)\,\rho_s^{-1}\frac{\partial\rho_s}{\partial t}\right]+ \\ +m\frac{\partial s}{\partial t}+s\frac{\partial\theta}{\partial t}+\mathrm{div}\mathbf{q}_1=0. \qquad (19)$$

Здесь $\rho_1$ есть плотность одного из флюидов; $\rho_s$ — плотность вещества твердой фазы; $s$ — насыщенность пор грунта данным флюидом (степень насыщения [6]); $m$ — пористость грунта; $\mathbf{q}_1$ — скорость фильтрации данного флюида.

Считая, что оставшаяся доля объема пор грунта занята другим флюидом, не смешивающимся с первым (многофазный грунт), и используя те же рассуждения, что и выше, запишем уравнение баланса массы второго флюида, помечая плотность и скорость фильтрации второго флюида индексом 2 и учитывая, что насыщенность порового объема вторым флюидом равна соответственно $1-s$:

$$(1-s)\left[m\rho_2^{-1}\frac{\partial\rho_2}{\partial t}+(1-m)\,\rho_s^{-1}\frac{\partial\rho_s}{\partial t}\right]- \\ -m\frac{\partial s}{\partial t}+(1-s)\,\frac{\partial\theta}{\partial t}+\mathrm{div}\mathbf{q}_2=0. \qquad (20)$$

Здесь $\mathbf{q}_2$ — скорость фильтрации второго флюида, очевидно, не равная скорости фильтрации первого. Обычно для вычисления скоростей фильтрации несмешивающихся флюидов используют представления о фазовых проницаемостях флюидов [6]. Складывая уравнения (19) и (20), получаем

$$m\left[s\rho_1^{-1}\frac{\partial\rho_1}{\partial t}+(1-s)\,\rho_2^{-1}\frac{\partial\rho_2}{\partial t}\right]+ \\ +(1-m)\,\rho_s^{-1}\frac{\partial\rho_s}{\partial t}+\frac{\partial\theta}{\partial t}+\mathrm{div}\mathbf{q}=0,$$

где $\mathbf{q}=\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2$ есть суммарная скорость фильтрации. Следуя [6] и полагая, что давление в обоих флюидах одно и то же, т. е. пренебрегая капиллярным давлением между флюидами, имеем

$$\rho_s^{-1}\frac{\partial\rho_s}{\partial t}=\beta_s\frac{\partial p}{\partial t}+\beta_p\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial t}. \qquad (21)$$

Здесь введены сжимаемости твердой фазы $\beta_s$ и порового объема $\beta_p$ соответственно [9], а также использовано известное соотношение $\sigma_{ij}=\bar{\sigma}_{ij}+ p\delta_{ij}$, где $\sigma_{ij}$ — тензор напряжений внешней нагрузки на грунт; $\bar{\sigma}_{ij}$ — тензор межгранулярных напряжений (в соответствии с терминологией [9]); $p$ — давление в жидкости; $\delta_{ij}$ — дельта-тензор Кронекера. Используя определение тензора эффективных напряжений $\sigma_{ij}^f=\bar{\sigma}_{ij}+p\gamma\delta_{ij}$ из [9], преобразовываем уравнение (21):

$$\rho_s^{-1}\frac{\partial\rho_s}{\partial t}=(\beta_s-\gamma\beta_p)\,\frac{\partial p}{\partial t}+\beta_p K\frac{\partial\theta}{\partial t}. \qquad (22)$$

Здесь использовано соотношение $\bar{\sigma}=K\theta$, где $\bar{\sigma}=\dfrac{1}{3}\sum\limits_i\bar{\sigma}_{ii}$, $K=\beta^{-1}$ — модуль упругого сжатия твердой фазы грунта, $\beta$ — сжимаемость грунта [9].

Вводя определения сжимаемости жидких фаз $\rho_1^{-1}\dfrac{\partial\rho_1}{\partial t}=\beta_{f,1}\dfrac{\partial p}{\partial t}$, $\rho_2^{-1}\dfrac{\partial\rho_2}{\partial t}=\beta_{f,2}\dfrac{\partial p}{\partial t}$ и далее подставляя их в уравнение (4), с учетом (22) получаем

$$m\beta'\frac{\partial p}{\partial t}+\left(1-\gamma'\right)\frac{\partial\theta}{\partial t}+\mathrm{div}\mathbf{q}=0, \qquad (23)$$

где введены обозначения

$$m\beta'=m\left[s\beta_{f,1}+(1-s)\beta_{f,2}\right]+(1-m)(\beta_s-\gamma\beta_p);$$
$$\gamma'=(1-m)\beta_p/\beta.$$

Необходимо сказать, что величиной $\gamma'$ обычно пренебрегают в силу ее малости [9].

Уравнение (23) по виду совпадает с уравнением (15) из [9] с той лишь разницей, что уравнение (15) в [9] получено для случая полного насыщения пор грунта однородным флюидом, а уравнение (23) в рассматриваемом случае описывает двухфазную фильтрацию, так что эффективная сжимаемость флюида $\beta'$ является функцией насыщенности пор грунта одним из флюидов (как правило, воды), а скорость фильтрации $\mathbf{q}$ есть суммарная скорость фильтрации. Таким образом, полученное уравнение (23) можно считать обобщением уравнения (15) из [9] на случай двухфазной фильтрации.

Предполагая твердый скелет грунта упругим, для эффективных напряжений на основании [9] имеем

$$\sigma_{ij}^{f} = -\left(K - \frac{2}{3}G\right)\theta\delta_{ij} - 2G\varepsilon_{ij},$$

где $\varepsilon_{ij}$ — тензор деформаций; $G$ — модуль сдвига. В одномерном случае для вертикального сжимающего напряжения $\sigma_{zz}$ в грунте имеем

$$\sigma_{zz} = -\left(K + \frac{4}{3}G\right)\theta + (1-\gamma)\,p.$$

Тогда уравнение (23) примет вид

$$\left[\alpha\left(1-\gamma'\right) + m\beta'\right]\frac{\partial p}{\partial t} - \alpha\left(1-\gamma'\right)\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t} + \mathrm{div}\mathbf{q} = 0,$$
$$\alpha = \left(K + \frac{4}{3}G\right)^{-1}.$$

Для однофазной насыщенной фильтрации последнее уравнение известно как уравнение Флорина [2]. Таким образом, можно сказать, что получено обобщение уравнения Флорина на случай двухфазной фильтрации.

## 4. Деформирование ненасыщенных грунтов

Обратимся теперь к процессу деформирования ненасыщенного грунта, когда одной из фаз в грунте является воздух, а другой — вода. Воспользуемся уравнением (19). Поскольку нагрузка на грунт в этом случае не передается на воду, давление в ней равно атмосферному, принимаемому за нуль.

Выше анализировалась ситуация, когда всестороннее сжатие материала скелета обеспечивается давлением флюидов, окружающих частицы скелета. Здесь ситуация иная, и в первом приближении можно считать скелет несжимаемым. Это приближение выглядит справедливым для связного грунта, частицы которого имеют одинаковую форму и размеры. Для реальных грунтов это, безусловно, не так. Частицы грунта более мелких фракций при деформировании за счет переупаковки будут занимать место между более крупными по размеру частицами, так что деформация последних приведет к тому, что часть более мелких частиц окажется в условиях всестороннего сжатия под действием приложенной нагрузки. Таким образом, можно ввести эффективный коэффициент сжимаемости твердой фазы $\beta_p'' \le \beta_p$, поскольку, строго говоря, только часть частиц грунта будет находиться в условиях всестороннего сжатия.

Для твердой фазы запишем

$$\rho_s V_s = \rho_s\,(1-m)\,V = M_s, \quad M_s = \mathrm{const},$$

где $V_s$ — объем твердой фазы; $V$ — объем представительного элемента пористой среды; $M_s$ — масса твердой фазы в представительном объеме. Используя предположение о малости коэффициента объемного расширения и учитывая, что влажность грунта $s$, плотность воды $\rho_w$ и масса $M_w$ воды в грунте связаны соотношением

$$M_w = \rho_w s m V_0 \exp\theta,$$

записываем для влажности грунта

$$s = \frac{V_w}{m}\exp\left(-\theta\right), \quad V_w = \frac{M_w}{\rho_w V_0} = s_0 m_0.$$

Здесь индексом 0 отмечены начальные значения соответствующих величин. Продифференцируем последнее уравнение:

$$ds = -\frac{V_w}{m^2}\exp\left(-\theta\right)dm - \frac{V_w}{m}\exp\left(-\theta\right)d\theta = $$
$$= -s\left(\frac{dm}{m} + d\theta\right).$$

Тогда имеем

$$m\frac{ds}{s} + d\theta = -dm + (1-m)\,d\theta. \qquad (24)$$

Из уравнения (19) при отсутствии фильтрации (до замачивания грунта) следует

$$s\,(1-m)\,\rho_s^{-1}\frac{\partial \rho_s}{\partial t} + m\frac{\partial s}{\partial t} + s\frac{\partial \theta}{\partial t} = 0. \qquad (25)$$

Используя с учетом сделанных выше оговорок соотношение $\rho_s^{-1}\dfrac{\partial \rho_s}{\partial t} = \beta_p''\dfrac{\partial P}{\partial t}$, где $P$ есть внешняя нагрузка, получаем из уравнений (24) и (25)

$$\beta_p'' \frac{dP}{dt} = -\frac{1}{1-m}\frac{dm}{dt} + \frac{d\theta}{dt}.$$

Последнее уравнение легко интегрируется:

$$\beta_p'' P = \ln(1-m) + \theta + C, \quad C = \mathrm{const}. \qquad (26)$$

Постоянная $C$ в (26) находится из условий $P = 0$; $\theta = 0$; $m = m_0$. Тогда имеем окончательно

$$P = \frac{1}{\beta_p''}\left(\ln\frac{1-m}{1-m_0} + \theta\right). \qquad (27)$$

Преобразуя (27) с учетом определения коэффициента объемного расширения (усадки), получаем

$$P = \frac{1}{\beta_p''}\Big[\ln(1-\theta) + \theta\Big]. \qquad (28)$$

Удерживая в уравнении (28) только второй член разложения функции логарифма, получаем итоговую зависимость

$$P = \frac{1}{2\beta_p''}\,\theta^2, \qquad (29)$$

которая хорошо согласуется с экспериментальными данными компрессионных испытаний до замачивания (рис. 3).

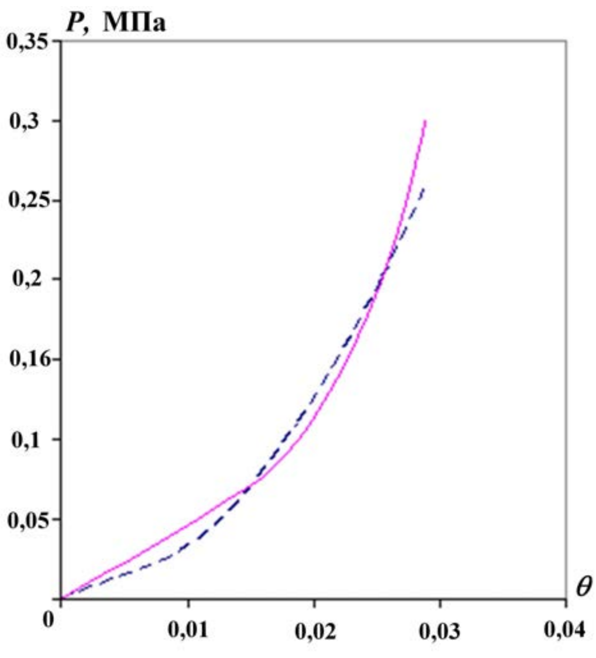


Рис. 3. Зависимость относительного сжатия ненасыщенного грунта от приложенной нагрузки: – – – — экспериментальные данные; —— — теоретическая кривая (в соответствии с (29))

## Заключение

В результате выполненной работы:

1. Предложен подход к получению обобщенного уравнения баланса массы жидкой фазы в ненасыщенном грунте. Полученное в результате уравнение позволяет объяснить поведение компрессионной кривой грунта с учетом промежуточного замачивания. Кроме того, это уравнение позволяет сформулировать целый ряд новых задач по консолидации ненасыщенного грунта, имеющих важное геоэкологическое значение.
2. Получено уравнение баланса массы твердой фазы грунта. Из него получена зависимость для связи коэффициента пористости грунта и относительной усадки грунта, совпадающая в простейшем случае с известной классической формулой. Последнее обстоятельство играет важную роль для новой интерпретации данных по усадке грунта под действием постоянной нагрузки.

Работа выполнена при поддержке МНТЦ (грант № 3868).

## Список литературы

1. *Зарецкий Ю. К.* Лекции по современной механике грунтов. Ростов н/Д: Изд-во Рост. ун-та, 1989.
2. *Флорин В. Ф.* Основы механики грунтов. Т. 1. Л.—М.: Госстройиздат, 1959; Т. 2. Л.—М.: Госстройиздат, 1961.
3. *Королев В. А.* Термодинамика грунтов: Учебное пособие. М.: Изд-во МГУ, 1997.
4. *Костерин А. В.* Модели и задачи механики насыщенных и пористых сред // На рубеже веков. Казань: Изд-во Казан. матем. общества, 2003. С. 310—318.
5. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1973.
6. *Николаевский В. Н.* Механика пористых и трещиноватых сред. М.: Недра, 1984.
7. *Булатов В. В.* Глубинная геомеханика. М.: Недра, 1990.

8. *Цытович Н. А.* Механика грунтов (краткий курс): Учебник для строит. вузов. 4-е изд., перераб. и доп. М.: Высшая школа, 1983.
9. *Verruijt A.* The theory of consolidation // Fundamentals of Transport Phenomena in Porous Media. Part 2: Deformation of Porous Media. Martinas Nijhoff Publishers, 1984. P. 351—368.

Статья поступила в редакцию 17.12.10.