

УДК 517.958:536.2

АНАЛИЗ НЕКОТОРЫХ СХЕМ ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ КВАЗИДИФфуЗИОННЫМ МЕТОДОМ

С. А. Грабовенская, А. А. Шестаков
(РФЯЦ-ВНИИТФ)

Рассматриваются четыре схемы для решения переноса теплового излучения квазидиффузионным методом, условия устойчивости, положительности и монотонности для них. Показано, что в отличие от старых схем две построенные новые схемы положительны в параболическом квазидиффузионном приближении.

Ключевые слова: перенос теплового излучения, квазидиффузионное приближение.

Введение

Система уравнений переноса излучения и уравнения энергии представляет собой сложную, нелинейную систему, поэтому ее часто решают в более простом приближении. Одним из широко применяемых является квазидиффузионное приближение [1]. Для нестационарной задачи оно приводит к гиперболической системе уравнений. Из теоремы Годунова известно, что для гиперболической системы не существует монотонной схемы второго порядка в классе линейных схем. Если пренебречь временной производной от потока излучения, то гиперболическая система перейдет в параболическое уравнение [2]. Для параболического уравнения с постоянным коэффициентом квазидиффузии $D = 1/3$ нет проблемы с построением монотонной схемы второго порядка. Однако при переменном коэффициенте квазидиффузии это проблематично, так как в дифференциальном случае не выполняется принцип максимума. Больше того, для такой системы не всегда удастся построить монотонную схему первого порядка. Применявшаяся ранее схема РОМБ [3, 4] не всегда позволяла получать монотонные и положительные решения для параболического уравнения с переменным коэффициентом квазидиффузии.

Одним из путей к построению монотонной схемы второго порядка для гиперболического уравнения является использование TVD-схем [5]. Однако, во-первых, они нелинейные, т. е. более сложные в реализации и менее экономичные, чем линейные схемы. Во-вторых, эти схемы требуют специальных видоизменений для счета односторонних производных у границ. В-третьих, они используют переход к инвариантам, применяемый для гиперболической системы уравнений. Дифференциальную систему переноса в квазидиффузионном приближении привести к инвариантам не удастся. В разностном виде переход к инвариантам возможен, но в параболическом случае использование TVD-схем с переходом к инвариантам затруднено. Наконец, реализация этих схем чрезвычайно сложна для многомерных геометрий и неструктурированных сеток.

В данной работе, не нарушая идеологии двухточечной схемы РОМБ, аппроксимирующей уравнения в рамках ячейки, предлагаются два варианта линейных разностных схем, улучшающих условия положительности решения. Для одного из них проводится численное сравнение с используемыми ранее схемами РОМБ [4] и TVD [5]. Суть новых схем заключается, во-первых, в разделении члена $\Delta_i(DU)$ на два слагаемых $D\Delta_i U$ и $U\Delta_i D$, а во-вторых, в использовании особой аппроксимации слагаемого $U\Delta_i D$. Разделение члена $\Delta_i(DU)$ на два слагаемых приводит к аппроксимации второго уравнения квазидиффузионной системы в неконсервативной форме. Однако это не нарушает консервативности схемы, так как в уравнении баланса участвует только первое уравнение с потоками

на границах, вычисляемыми с помощью второго уравнения. Первое слагаемое $D\Delta_i U$ не представляет сложности в аппроксимации, так как при подстановке в первое уравнение квазидиффузионной системы превращается в диффузионный член. Аппроксимация второго слагаемого имеет первый порядок по времени и второй порядок по пространству, а при получении отрицательного решения снижает порядок по пространству до первого. В новой схеме впервые применены разные соотношения связи для плотности излучения в разных уравнениях системы квазидиффузии. Значения плотности излучения, полученные из разных соотношений связи, отличаются в членах второго порядка аппроксимации. Особая аппроксимация плотности излучения во втором уравнении не нарушает консервативности схемы и отличается от аппроксимации плотности излучения в первом уравнении в худшем случае в членах первого порядка.

Постановка задачи

Рассмотрим одномерную систему переноса лучистой энергии в многогрупповом квазидиффузионном виде [1]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial U_g}{\partial t} + \frac{\partial (r^\sigma S_g)}{r^\sigma \partial r} + \alpha_{cg} U_g &= \alpha_{cg} B_g; \\ \frac{\beta}{c} \frac{\partial S_g}{\partial t} + \frac{\partial (D_g U_g)}{\partial r} + \alpha_g S_g + d_g U_g &= 0; \\ \frac{\partial E}{\partial t} &= \sum_{g=1}^G \alpha_{cg} (U_g - B_g). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь t — время; r — координата; c — скорость света; g — индекс энергетической группы, $g = 1, \dots, G$; $U_g = \int_{-1}^1 J_g d\mu$ — плотность излучения, умноженная на скорость света; $S_g = \int_{-1}^1 \mu J_g d\mu$ — поток излучения; J_g — интенсивность излучения; ε_g — энергия; $B_g = \frac{8\pi}{c^2 \tilde{h}^3} \int_{\Delta\varepsilon_g} \frac{\varepsilon^3}{\exp(\varepsilon/T) - 1} d\varepsilon$ —

функция Планка, умноженная на скорость света; \tilde{h} — постоянная Планка; α_{cg} — коэффициент поглощения фотонов; α_{sg} — коэффициент рассеяния фотонов; α_g — коэффициент ослабления, $\alpha_g = \alpha_{cg} + \alpha_{sg}$; E — внутренняя энергия вещества; $D_g, D_{g,1}$ — коэффициенты квазидиффузии; тип приближения характеризуется следующими значениями параметров:

- $\beta = 1$ — квазидиффузионное приближение (КД);
- $\beta = 0$ — квазидиффузионное приближение в параболическом случае (РД);
- $\beta = 1; D_g = 1/3$ — P_1 -приближение;
- $\beta = 0; D_g = 1/3$ — диффузионное приближение;

σ — тип геометрии:

- при $\sigma = 0$ — плоская геометрия с коэффициентами $d_g = 0, D_g = \frac{1}{U_g} \int_{-1}^1 \mu^2 J_g d\mu$;
- при $\sigma = 1$ — цилиндрически-симметричная геометрия, $d_g = \frac{1}{r} (2D_g + D_{g,1} - 1)$,
 $D_g = \frac{1}{U_g} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \cos^2 \varphi \int_{-1}^1 (1 - \mu^2) J_g d\mu d\varphi, D_{g,1} = \frac{1}{U_g} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \mu^2 J_g d\mu d\varphi, U_g = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 J_g d\mu d\varphi$;
- при $\sigma = 2$ — сферически-симметричная геометрия, $d_g = \frac{1}{r} (3D_g - 1), D_g = \frac{1}{U_g} \int_{-1}^1 \mu^2 J_g d\mu$.

Граничные условия имеют вид

$$\alpha_{0,g} U_g + \beta_{0,g} S_g = \varphi_{0,g}; \quad \alpha_{1,g} U_g + \beta_{1,g} S_g = \varphi_{1,g},$$

где $\alpha_{0,g}, \beta_{0,g}, \varphi_{0,g}, \alpha_{1,g}, \beta_{1,g}, \varphi_{1,g}$ — параметры для задания граничных условий.

Разностная аппроксимация

Рассмотрим разностную аппроксимацию системы (1) в рамках одной ячейки. Тогда система разностных КД-уравнений принимает вид (для упрощения записи здесь опущены индексы g и $i + 1/2$)

$$\begin{aligned} \frac{1}{c\tau}U^{n+1} + \frac{1}{V_i}\Delta_i(r^\sigma S^{n+1}) + \alpha_c U^{n+1} &= \frac{1}{c\tau}U^n + \alpha_c B^{n+1}; \\ \frac{\beta}{c\tau}S^{n+1} + \frac{D}{h}\Delta_i U^{n+1} + \alpha S^{n+1} + (d + \lambda)U^{n+1} &= \frac{\beta}{c\tau}S^n, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\alpha = \alpha_c + \alpha_s$; $\tau = t^{n+1} - t^n$; $h = r_{i+1} - r_i$; $V_i = \frac{r_{i+1}^{\sigma+1} - r_i^{\sigma+1}}{\sigma + 1}$; $\lambda = \frac{\Delta_i D}{h}$.

Система уравнений (2) является незамкнутой. Для ее замыкания надо задавать дополнительные соотношения связи искомых величин в центрах ячеек с их аналогами на гранях. Эти соотношения определяют точность и монотонность схемы. Будем вводить указанные соотношения связи попарному. Дело в том, что в классе линейных разностных схем не удастся подобрать дополнительных соотношений связи для получения монотонного решения даже первого порядка аппроксимации. Поэтому в данной работе сравниваются три варианта соотношений связи для аппроксимации системы (1) в рамках одной ячейки.

Сначала рассмотрим соотношения связи для U и S по схеме РОМБ (первая схема), применяемые для решения системы КД-уравнений в работе [4]:

$$U_{i+1/2} = 0,5(U_i + U_{i+1}) + \delta\Delta_i S; \quad S_{i+1/2} = 0,5(S_i + S_{i+1}) + \theta\Delta_i U, \quad (3)$$

где δ, θ — параметры разностной схемы.

Подставляя (3) в систему (2), получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} a_i^0 U_i + b_i^0 U_{i+1} + c_i^0 S_i + d_i^0 S_{i+1} &= f_i^0; \\ a_i^1 U_i + b_i^1 U_{i+1} + c_i^1 S_i + d_i^1 S_{i+1} &= f_i^1, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} a_i^0 &= b_i^0 = 1, \quad c_i^0 = -2a, \quad d_i^0 = 2\bar{a}; \quad a = \delta + \frac{r_i^\sigma}{q_1 V_i}, \quad \bar{a} = \delta + \frac{r_{i+1}^\sigma}{q_1 V_i}; \\ a_i^1 &= -2m + p, \quad b_i^1 = 2m + p, \quad c_i^1 = 1 - 2\delta p, \quad d_i^1 = 1 + 2\delta p, \quad p = \frac{d + \lambda}{q}, \quad m = \theta + \frac{D}{qh}; \\ f_i^0 &= \frac{2}{q_1} \left(\frac{1}{c\tau}U^n + \alpha_c B^{n+1} \right); \quad f_i^1 = \frac{2\beta}{c\tau q} S^n; \quad q_1 = \frac{1}{c\tau} + \alpha_c; \quad q = \frac{\beta}{c\tau} + \alpha. \end{aligned}$$

Заметим, что при $\delta \geq 0$ коэффициенты $a_i^0, b_i^0, -c_i^0, d_i^0$ положительны, а коэффициенты $a_i^1, b_i^1, c_i^1, d_i^1$ из-за знакопеременности p могут менять знак. Знакопостоянными они становятся только при $p = 0$.

Во второй схеме используем следующую аппроксимацию системы (1)

$$\begin{aligned} \frac{1}{c\tau}U^{n+1} + \frac{1}{V_i}\Delta_i(r^\sigma S^{n+1}) + \alpha_c U^{n+1} &= \frac{1}{c\tau}U^n + \alpha_c B^{n+1}; \\ \frac{\beta}{c\tau}S^{n+1} + \frac{D}{h}\Delta_i U^{n+1} + \alpha S^{n+1} + (d + \lambda)U_h^{n+1} &= \frac{\beta}{c\tau}S^n. \end{aligned} \quad (5)$$

Соотношения связи для системы (5) имеют вид

$$\begin{aligned} U_{i+1/2} &= \nu_i U_i + (1 - \nu_i) U_{i+1} + \delta_i \Delta_i(r^\sigma S); \\ (r^\sigma S)_{i+1/2} &= \mu_i (r^\sigma S)_i + (1 - \mu_i) (r^\sigma S)_{i+1} + \theta_i \Delta_i U; \\ (U_h)_{i+1/2} &= \gamma_i U_i + (1 - \gamma_i) U_{i+1} + \xi_i \Delta_i(r^\sigma S), \end{aligned} \quad (6)$$

где $\delta, \theta, \xi, \nu, \mu, \gamma, 0 \leq \nu_i \leq 1, 0 \leq \mu_i \leq 1, 0 \leq \gamma_i \leq 1$ — параметры разностной схемы.

В соотношениях связи (6) используется разная аппроксимация в центре ячейки плотности излучения в первом и втором уравнениях системы (5). В общем случае разность $(U_h)_{i+1/2} - U_{i+1/2} = O(h)$ имеет первый порядок малости, при $\gamma = \nu = 0,5, \delta = O(h), \xi = O(h)$ эта разность имеет второй порядок малости, а при $\gamma = \nu, \delta = \xi$ она всегда обращается в нуль. Хотя второе уравнение системы (1) аппроксимируется в неконсервативной форме с другими соотношениями связи для U , это не нарушает консервативности схемы, так как в уравнении баланса участвует только первое уравнение с потоками на гранях, вычисляемыми с помощью второго уравнения.

Подставляя соотношения связи (6) в систему (5), получаем относительно $U_i, \bar{S}_i = (r^\sigma S)_i$ уравнения (4) с коэффициентами

$$\begin{aligned} a_i^0 &= \nu_i, & b_i^0 &= 1 - \nu_i, & c_i^0 &= -a_i, & d_i^0 &= a_i, & a_i &= \delta_i + \frac{1}{q_{1,i}V_i}; \\ a_i^1 &= -m_i + \gamma_i p_i, & b_i^1 &= m_i + (1 - \gamma_i) p_i, & c_i^1 &= \mu_i - p_i \xi_i, & d_i^1 &= 1 - \mu_i + p_i \xi_i; \\ p_i &= r_{i+1/2}^\sigma \frac{d_i + \lambda_i}{q_i}, & m_i &= \theta_i + \frac{D_i r_{i+1/2}^\sigma}{q_i h_i}; \\ f^0 &= \frac{1}{q_1} \left(\frac{1}{c\tau} U^n + \alpha_c B^{n+1} \right), & f^1 &= \frac{\beta r^\sigma}{c\tau q} S^n. \end{aligned}$$

Заметим, что при $\delta \geq 0$ коэффициенты $a_i^0, b_i^0, -c_i^0, d_i^0$ положительны, а коэффициенты $a_i^1, b_i^1, c_i^1, d_i^1$ из-за знакопеременности p могут менять знак, но в отличие от схемы РОМБ могут стать знакопостоянными не только при $p = 0$, но также при $\xi_i = 0$ и $\gamma_i = 0$ или $\gamma_i = 1$.

В третьей схеме разностная аппроксимация члена $\frac{\partial(DU)}{\partial r}$ производится в консервативной форме:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c\tau} U^{n+1} + \frac{1}{V_i} \Delta_i (r^\sigma S^{n+1}) + \alpha_c U^{n+1} &= \frac{1}{c\tau} U^n + \alpha_c B^{n+1}; \\ \frac{\beta}{c\tau} S^{n+1} + \frac{1}{h} \Delta_i (DU^{n+1}) + \alpha S^{n+1} + dU_h^{n+1} &= \frac{\beta}{c\tau} S^n. \end{aligned} \tag{7}$$

Для системы (7) рассмотрим соотношения связи в виде

$$\begin{aligned} (DU)_{i+1/2} &= 0,5 [(DU)_i + (DU)_{i+1}] + \delta \Delta_i (r^\sigma S); \\ (r^\sigma S)_{i+1/2} &= 0,5 [(r^\sigma S)_i + (r^\sigma S)_{i+1}] + \theta \Delta_i (DU); \\ (DU_h)_{i+1/2} &= \gamma_i (DU)_i + (1 - \gamma_i) (DU)_{i+1} + \xi_i \Delta_i (r^\sigma S), \end{aligned} \tag{8}$$

где $\delta, \theta, \gamma, \xi$ — параметры разностной схемы.

Подставляя (8) в систему (7), получаем уравнения (4) относительно $\bar{U}_i = (DU)_i, \bar{S}_i = (r^\sigma S)_i$ вместо U, S с коэффициентами

$$\begin{aligned} a_i^0 &= b_i^0 = 1, & c_i^0 &= -2a, & d_i^0 &= 2a, & a &= \delta + \frac{D_{i+1/2}}{q_1 V_i}; \\ a_i^1 &= 2p\gamma - 2m, & b_i^1 &= 2p(1 - \gamma) + 2m, & c_i^1 &= 1 - 2p\xi, & d_i^1 &= 1 + 2p\xi; \\ p &= \frac{dr_{i+1/2}^\sigma}{qD_{i+1/2}}, & m &= \theta + \frac{r_{i+1/2}^\sigma}{qh}; \\ f^0 &= \frac{2D_{i+1/2}}{q_1} \left(\frac{1}{c\tau} U^n + \alpha_c B^{n+1} \right); & f^1 &= \frac{2\beta}{c\tau q} (r^\sigma S^n)_{i+1/2}. \end{aligned}$$

Заметим, что при $\delta \geq 0$ коэффициенты $a_i^0, b_i^0, -c_i^0, d_i^0$ положительны, а коэффициенты $-a_i^1, b_i^1, c_i^1, d_i^1$ можно сделать положительными за счет выбора параметров γ, ξ .

Достоинством данной схемы по сравнению со схемой (5), (6) является то, что коэффициент $p = \frac{dr_{i+1/2}^\sigma}{qD_{i+1/2}}$ становится более знакоопределенным, так как в большинстве задач $D > 1/3$ и $d > 0$.

Недостатком данной схемы является то, что граничные условия для прогонки надо ставить относительно \bar{U}_i, \bar{S}_i вместо U, S , что предполагает интерполяцию коэффициента квазидиффузии на границе. Вторым недостатком данной схемы является то, что если коэффициент квазидиффузии считается не на итерациях, а один раз на шаге, то возникает рассогласование при получении плотности излучения в центрах ячеек на итерациях:

$$U_{i+1/2}^\nu = \frac{0,5 [(DU)_i^\nu + (DU)_{i+1}^\nu] + \delta\Delta_i (r^\sigma S^\nu)}{D_{i+1/2}^n}.$$

Система линейных уравнений (4) решается методом потоковой прогонки. Предполагаем связь между U_i и S_i в виде $X_i U_i + Y_i S_i = Z_i$, $X_i + Y_i = 1$, где X_i, Y_i, Z_i — прогоночные коэффициенты, которые вычисляются по рекуррентным формулам

$$\begin{aligned} X_{i+1} &= L_i (X_i \langle cb \rangle_i + Y_i \langle ba \rangle_i); \\ Y_{i+1} &= L_i (X_i \langle cd \rangle_i + Y_i \langle da \rangle_i); \\ Z_{i+1} &= L_i (X_i \langle cf \rangle_i + Y_i \langle fa \rangle_i + Z_i \langle ac \rangle_i); \\ L_i^{-1} &= X_i (\langle cb \rangle_i + \langle cd \rangle_i) + Y_i (\langle ba \rangle_i + \langle da \rangle_i); \\ X_0 &= \frac{\alpha_0}{\alpha_0 + \beta_0}; \quad Y_0 = \frac{\beta_0}{\alpha_0 + \beta_0}; \quad Z_0 = \frac{\varphi_0}{\alpha_0 + \beta_0}; \\ \langle ab \rangle &= a^1 b^0 - a^0 b^1; \quad \langle ca \rangle = c^1 a^0 - c^0 a^1; \dots \end{aligned} \tag{9}$$

Формулы обратной прогонки:

$$\begin{aligned} U_i &= L_i Y_{i+1}^{-1} (\langle bd \rangle_i Y_i U_{i+1} + \langle df \rangle_i Y_i + \langle cd \rangle_i Z_i), \quad S_i = Y_i^{-1} (Z_i - X_i U_i), \quad i = I-1, \dots, 1, 0; \\ U_I &= (\beta_1 Z_I - \varphi_1 Y_I) (\beta_1 X_I - \alpha_1 Y_I)^{-1}, \quad S_I = (\varphi_1 X_I - \alpha_1 Z_I) (\beta_1 X_I - \alpha_1 Y_I)^{-1}. \end{aligned} \tag{10}$$

При $Y_0 = 0$, а это возможно только на границе, поток вычисляем по формуле

$$S_i = L_i X_{i+1}^{-1} (\langle bd \rangle_i X_i S_{i+1} - \langle bf \rangle_i X_i + \langle ba \rangle_i Z_i).$$

Найдем условия устойчивости, положительности и монотонности рассмотренных выше схем.

Условия устойчивости, положительности и монотонности

Для системы (9) видно, что если выполняются условия

$$\langle cb \rangle_i \geq 0; \quad \langle ba \rangle_i \geq 0; \quad \langle cd \rangle_i \geq 0; \quad \langle da \rangle_i \geq 0; \quad X_0 \geq 0; \quad Y_0 \geq 0; \quad X_0 + Y_0 > 0, \tag{11}$$

то прогоночные коэффициенты X_i, Y_i всегда лежат в интервале $[0, 1]$, т. е. вычисляются устойчиво. Устойчивое вычисление коэффициента Z_i требует выполнения условия

$$|L_i \langle ac \rangle_i| \leq 1. \tag{12}$$

Требование положительности коэффициента Z_i приводит к дополнительным условиям:

$$\langle cf \rangle_i \geq 0; \quad \langle fa \rangle_i \geq 0; \quad \langle ac \rangle_i \geq 0; \quad Z_0 \geq 0. \tag{13}$$

Для устойчивости формул обратной прогонки (10) необходимо, чтобы при вычислении U выполнялись условия $|L_i Y_{i+1}^{-1} \langle bd \rangle_i Y| \leq 1$, или при выполнении условий (11)

$$|\langle bd \rangle_i| Y_i \leq \langle cd \rangle_i X_i + \langle da \rangle_i Y_i \tag{14}$$

и на границе $\beta X_I \neq \alpha Y_I$.

Требование положительности U приводит к условиям

$$\langle bd \rangle_i \geq 0; \quad \langle df \rangle_i \geq 0; \quad U_I \geq 0. \quad (15)$$

Устойчивость вычисления потока при $Y_i \neq 0$ следует из устойчивости Z_i, U_i при ограниченности X_i и Y_i^{-1} .

Первая схема (РОМБ). Выполнение условий (11), (12), (14) при $a \geq 0, m \geq 0$ гарантирует устойчивость прогонки и вместе с ней устойчивость разностной схемы РОМБ. Выполнение условия положительности U зависит от выбора параметров δ, θ .

Счет задач начинается по схеме с параметрами, обеспечивающими второй порядок аппроксимации по пространству. При отрицательности U в каждой конкретной точке можно переходить на схему первого порядка аппроксимации по пространству с другими параметрами δ, θ в данной точке. В этом случае необходимо пересчитать коэффициенты a, b, c, d в данной точке и прогоночные коэффициенты X, Y, Z во всех точках. Чтобы упростить процедуру пересчета и не повторять вычисление коэффициентов X, Y, Z , можно проверять условия (13)–(15) сразу и в зависимости от этого выбирать параметры δ, θ . Это накладывает более жесткие требования на параметры схемы, так как положительное решение может получаться и при нарушении этих условий. Однако если не повторять вычисление коэффициентов X, Y, Z и плотности излучения U при пересчете, то счет заметно удешевляется.

Для устойчивости схемы РОМБ из условий (11), (12), (14) следует необходимость выполнения условий

$$a \geq 0; \quad m \geq 0; \quad m \geq 0,5p; \quad \delta |p| \leq 0,5; \quad (16)$$

$$V \geq 2 |p| \frac{r^\sigma}{q_1}. \quad (17)$$

Условие (17) является очень жестким, так как не зависит от параметров схемы и даже в РД-приближении ограничивает размер ячейки снизу. В диффузионном случае при $p = 0$ (17) выполняется всегда и остаются только условия $a \geq 0$ и $m \geq 0$.

Из условий положительности (13), (15) с учетом (16), (17) и знакопеременности коэффициента f^1 следует

$$(1 - 2\delta p) f^0 \geq 2a |f^1|, \quad 2\delta p \leq 1; \quad (18)$$

$$(2m - p) f^0 \geq |f^1|, \quad 2m \geq p. \quad (19)$$

Эти условия всегда выполняются в диффузионном случае при $\beta = 0, \delta \geq 0, m \geq 0$. При $\beta = 1$ условия (18), (19) выполняются не всегда и построить положительную схему именно из-за этих условий в гиперболическом случае не удастся, поэтому без их выполнения можно гарантировать только устойчивость прогонки.

Параметры δ, θ в работах [4, 5–9] для данной схемы выбираются в виде

$$\delta = \frac{1}{4m}; \quad \theta = \frac{h}{4} \Lambda \left(\frac{D}{q} \right), \quad (20)$$

где $\Lambda(A)$ — разностный оператор второй производной по пространству:

$$\Lambda(A)_{i+1/2} = \frac{A_{i-1/2} - 2A_{i+1/2} + A_{i+3/2}}{h^2}.$$

Для параметров δ, θ из (20) выполнены условия $a \geq 0, m \geq 0$ и схема имеет второй порядок аппроксимации по пространству. Однако остальные условия (16), (17) могут нарушаться, поэтому схема не является устойчивой. Переход на схему первого порядка с $\delta = \frac{1}{2|p|}, \theta = 0,5 |p|$ помогает выполнить все условия (16). Однако при произвольных δ, θ условия (16) могут нарушаться.

Отсюда следует, что в P_1 -приближении при $p = 0$ схема РОМБ является устойчивой, но неположительной [7–9]. В диффузионном приближении при $p = \beta = 0$ схема РОМБ является устойчивой и положительной. Условие монотонности выполняется только в диффузионном случае. Это показано в работах [5, 8, 9].

В результате получаем, что схема РОМБ в КД- и РД-приближениях может быть неустойчивой, в P_1 -приближении она устойчива, но неположительна и немонотонна, в диффузионном приближении — устойчива, положительна и монотонна.

Вторая схема. Рассмотрим вторую схему с соотношениями связи (6). Для выполнения устойчивости схемы РОМБ из условий (11), (12), (14) следуют условия

$$m \geq 0; \quad a \geq 0; \quad a = \xi; \quad \nu = \gamma; \quad (21)$$

$$am \geq 1 + \nu\mu - \mu - \nu. \quad (22)$$

Условия положительности (13), (15) с учетом (21), (22) выполняются, если

$$\begin{aligned} (\mu - p\xi) f^0 &\geq a |f^1|, \quad \mu - p\xi \geq 0; \\ (1 - \mu + p\xi) f^0 &\geq a |f^1|, \quad 1 - \mu + p\xi \geq 0; \\ (m - p\gamma) f^0 &\geq \nu |f^1|, \quad m - p\gamma \geq 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Эти условия всегда выполняются в диффузионном случае при $p = \beta = 0$. При $\beta = 1$ условия (23) выполняются не всегда и построить положительную схему именно из-за этих условий в гиперболическом случае сложно, а без их выполнения можно гарантировать только устойчивость схемы.

Для выполнения условий (23) при нарушении условия $\mu - p\xi \geq 0$ или условия $1 - \mu + p\xi \geq 0$ потребуем зануления коэффициента ξ , при нарушении условия $m - p\gamma \geq 0$ — зануления коэффициента γ . Тогда условия (23) для любых значений функции Планка будут выполняться при

$$\beta \max(x, z, s) |S^n| \leq U^n, \quad x = \frac{a\omega}{\mu - p\xi} \geq 0, \quad z = \frac{a\omega}{1 - \mu + p\xi} \geq 0, \quad s = \frac{\nu\omega}{m - p\gamma} \geq 0, \quad \omega = \frac{q_1 r^\sigma}{q}. \quad (24)$$

В случае, если такой выбор параметров не помогает выполнению условий (23), в этой точке можно занулять коэффициент β , т. е. считать в данной точке стационарные уравнения.

Счет задачи начинается по схеме с параметрами $\nu = \mu = \gamma = 0,5$; $\xi = \delta + \frac{1}{q_1 V_i} \geq 0$; $\delta = \frac{1}{4m}$; $\theta = \frac{h}{4} \Lambda \left(\frac{Dr^\sigma}{q} \right)$. При этих параметрах схема имеет второй порядок аппроксимации по пространству и первый порядок аппроксимации по времени.

Соотношения связи принимают вид

$$\begin{aligned} U_{i+1/2} &= \frac{U_i + U_{i+1}}{2} + \delta_i \Delta_i (r^\sigma S); \\ (r^\sigma S)_{i+1/2} &= \frac{(r^\sigma S)_i + (r^\sigma S)_{i+1}}{2} + \theta_i \Delta_i U; \\ (U_h)_{i+1/2} &= \frac{U_i + U_{i+1}}{2} + \left(\delta + \frac{1}{q_1 V_i} \right) \Delta_i (r^\sigma S). \end{aligned}$$

При выполнении условия $m \geq 0,5p$ и нарушении условия $|p| \xi \leq 0,5$ полагаем $\xi = 0$, т. е. получаем

$$(U_h)_{i+1/2} = \frac{U_i + U_{i+1}}{2}.$$

Это не нарушает второго порядка аппроксимации по пространству. Поэтому при нарушении условий (22) и при $p \leq 0$ полагаем $\gamma = 1$ — получаем схему первого порядка аппроксимации $(U_h)_{i+1/2} = U_i$.

При нарушении условий (22) и при $p \geq 0$ полагаем $\gamma = 0$ — получаем схему первого порядка аппроксимации $(U_h)_{i+1/2} = U_{i+1}$.

При выполнении условия $|p|\xi \leq 0,5$ и нарушении условия $m \geq \gamma p$ в системе (23) (это возможно только при $p \geq 0$) полагаем $\gamma = 0$, т. е. получаем

$$(U_h)_{i+1/2} = U_{i+1} + \left(\delta + \frac{1}{q_1 V_i} \right) \Delta_i (r^\sigma S).$$

В этом случае имеем схему первого порядка аппроксимации.

При нарушении условия $a \geq 0,5\xi$ полагаем $\xi = 0$, т. е. получаем $(U_h)_{i+1/2} = U_{i+1}$.

В результате можно сформулировать

Утверждение 1. *Схема (5), (6) с вышеперечисленным алгоритмом выбора параметров положительна, если в начальный момент выполняется условие $U_{i+1/2}^{n=0} \geq 0$, на границах $X_0 \geq 0, Y_0 \geq 0, Z_0 \geq 0, X_0 + Y_0 > 0, U_I \geq 0$ и выполняется условие ограничения потока (24).*

Следствие 1. *В диффузионном случае при $\beta = 0, D = 1/3$ схема (5), (6) положительна без условия ограничения потока и имеет второй порядок аппроксимации по пространству.*

Следствие 2. *В параболическом квазидиффузионном случае при $\beta = 0$ схема (5), (6) положительна без условия ограничения потока, но может снижать порядок аппроксимации по пространству до первого при нарушении условия $m \geq 0,5p$.*

Следствие 3. *В P_1 -приближении при $\beta = 1, D = 1/3, p = 0$ схема (5), (6) положительна при условии ограничения потока (24) и имеет второй порядок аппроксимации по пространству.*

Можно показать, что для выполнения условия монотонности схемы требуется более жесткое условие ограничения изменения потока

$$\beta \max(x_1, x_2) |\Delta_{i-1/2} S^n| \leq \Delta_{i-1/2} U^n, \quad x_1 = \frac{aq_1}{d_1 q}, \quad x_2 = \frac{q_1}{q} \frac{Xa + Y}{X(0,5 - p\xi) + Y(m - \gamma p)} \geq 0. \quad (25)$$

Утверждение 2. *Схема (5), (6) монотонна в линейном случае. Это означает, что U_i^{n+1} монотонно возрастает, если выполняется условие $\Delta_{i-1/2} U^n \geq 0$, на границах $(Z_1 - Z_0) \geq 0, (U_I - U_{I-1}) \geq 0$, источник возрастает, $\Delta_{i-1/2} B^{n+1} \geq 0$, и выполняется условие ограничения изменения потока (25). Решение U_i^{n+1} монотонно убывает, если в начальный момент выполняется условие $\Delta_{i-1/2} U^n \leq 0$, на границах $(Z_1 - Z_0) \leq 0, (U_I - U_{I-1}) \leq 0$, источник убывает, $\Delta_{i-1/2} B^{n+1} \leq 0$, и выполняется условие ограничения изменения потока (25).*

Следствие 1. *В зависимости от выполнения условий ограничения потока (24), (25) схема может быть положительной, но немонотонной и монотонной, но неположительной.*

Сформулируем утверждение о положительности и монотонности схемы.

Утверждение 3. *Если выполняются условия на поток (24), (25), то схема (5), (6) положительна и монотонна при соответствующих начальных и граничных условиях.*

Следствие 1. *В параболическом квазидиффузионном случае при $\beta = 0$ схема (5), (6) положительна и монотонна без условий на поток, но может снижать порядок аппроксимации по пространству до первого при нарушении условия $m \geq 0,5p$.*

Следствие 2. *В P_1 -приближении при $\beta = 1, D = 1/3, p = 0$ схема (5), (6) положительна и монотонна при условиях ограничения потока и имеет второй порядок аппроксимации по пространству.*

Следствие 3. *В диффузионном случае при $\beta = 0, D = 1/3$ схема (5), (6) положительна и монотонна без условий на поток и имеет второй порядок аппроксимации по пространству.*

Следствие 4. *Если все коэффициенты $a_i^0, b_i^0, -c_i^0, d_i^0, f_i^0, -a_i^1, b_i^1, c_i^1, d_i^1, f_i^1$ системы (4)–(6) положительны, то схема (5), (6) положительна и монотонна при выполнении условий (23) и соответствующих начальных и граничных условиях.*

Третья схема. Для получения ограничений на выбор параметров δ , θ , γ , ξ в третьем варианте (соотношения связи (8)) раскроем угловые скобки в прогоночных коэффициентах (9), (10). Получим ограничения, аналогичные полученным для второй схемы.

Счет задачи начинается по схеме с параметрами $\gamma = 0,5$, $\xi = \delta + \frac{D}{q_1 V_i} \geq 0$, $\delta = \frac{1}{4m}$, $\theta = \frac{h}{4} \Lambda \left(\frac{r^\sigma}{q} \right)$. При этих параметрах схема имеет второй порядок аппроксимации по пространству и первый порядок аппроксимации по времени.

Соотношения связи принимают вид

$$\begin{aligned} (DU)_{i+1/2} &= \frac{(DU)_i + (DU)_{i+1}}{2} + \delta_i \Delta_i (r^\sigma S); \\ (r^\sigma S)_{i+1/2} &= \frac{(r^\sigma S)_i + (r^\sigma S)_{i+1}}{2} + \theta_i \Delta_i (DU); \\ (DU_h)_{i+1/2} &= \frac{(DU)_i + (DU)_{i+1}}{2} + \left(\delta + \frac{D}{q_1 V_i} \right) \Delta_i (r^\sigma S). \end{aligned}$$

При выполнении условия $m \geq 0,5p$ и нарушении условия $|p| \xi \leq 0,5$ полагаем $\xi = 0$.

При нарушении одного из условий (23) и при $p \leq 0$ полагаем $\gamma = 1$. Если $p \geq 0$ полагаем $\gamma = 0$.

При выполнении условия $|p| \xi \leq 0,5$ и нарушении условия $m \geq \gamma p$ полагаем $\gamma = 0$.

При нарушении условия $a \geq 0,5\xi$ полагаем $\xi = 0$.

При нарушении одного из условий $\langle df \rangle_i \geq 0$, $\langle cf \rangle_i \geq 0$, $\langle fa \rangle_i \geq 0$ полагаем $\beta = 0$. В вакууме при $\beta = 0$ коэффициент $q = \frac{\beta}{c\tau} + \alpha$ может обратиться в нуль, поэтому при переходе на $\beta_i = 0$ и $p_i = 0$ для вакуума полагаем $f^1 = 0$ и $\theta = \frac{c\tau h}{4} \Lambda (Dr^\sigma)$.

Выбор параметров можно осуществлять, анализируя коэффициенты a , b , c , d . Коэффициенты a_i^0 , b_i^0 , $-c_i^0$, d_i^0 всегда положительны. При $c_i^1 \leq 0$ (эквивалентно условию $p\xi \geq 0,5$) полагаем $\xi = 0$; при $d_i^1 \leq 0$ ($p\xi \leq -0,5$) также $\xi = 0$; при $b_i^1 \leq 0$ ($m \leq \gamma p - 1$) полагаем $\gamma = 0$; при $-a_i^1 \leq 0$ ($m \leq \gamma p$) полагаем $\gamma = 1$.

При выполнении условий, аналогичных условиям для второй схемы, для данной схемы выполняются утверждения 1—3 относительно \bar{U} , \bar{S} , $\Delta_i \bar{U}$. В третьей схеме в формуле (24) для параметра ω отсутствует множитель $r_{i+1/2}^\sigma$.

Для совместного решения системы уравнений энергии и переноса излучения используется метод выделения диагональной матрицы ВДМ [10].

Численные расчеты

В данной работе сравниваются результаты численных расчетов, полученные по схеме (5), (6), схемам РОМБ [4] и TVD [5]. Рассматриваемые схемы исследовались на двух задачах в сферически-симметричной геометрии.

Задача 1 (первая задача Флека) имеет гладкое решение, поэтому она используется для определения численных порядков сходимости схем. Задача 2 (вторая задача Флека) характеризуется большим числом итераций из-за резких отличий оптических толщин в соседних областях, поэтому в ней анализируются профиль теплового фронта и скорость сходимости итераций. Достаточно сказать, что эту задачу практически невозможно решить с помощью классических схем и методом простой итерации. Схема второго порядка с параметрами $\delta = \theta = 0$ приводит к большим осцилляциям в решении, а схема первого порядка с параметрами $\delta = \theta = 0,5$ сильно размывает фронт. При методе простой итерации из-за медленной сходимости может наступать ложная сходимость, при которой правильное решение не достигается.

В новой схеме (5), (6) использовался следующий алгоритм выбора параметров. Счет задач начинается с параметрами $\nu = \mu = \gamma = 0,5$, $\xi = \delta + \frac{1}{q_1 V_i}$, $\delta = \frac{1}{4m}$, $\theta = \frac{h}{4} \Lambda \left(\frac{Dr^\sigma}{q} \right)$. При $c_i^1 \leq 0$ или $d_i^1 \leq 0$

полагаем $\xi = 0$, при $b_i^1 \leq 0$ полагаем $\gamma = 0$, при $a_i^1 \geq 0$ полагаем $\gamma = 1$. При нарушении одного из условий $\langle df \rangle_i \geq 0$, $\langle cf \rangle_i \geq 0$, $\langle fa \rangle_i \geq 0$ полагаем $\beta_i = 0$.

Задача 1. На левой границе ($1 \leq r \leq 5$) задано излучение планковского источника температуры $B_\nu(T = 1)$, на правой — условие *свободной поверхности*. Коэффициент поглощения равен $\kappa_g = 27(1 - e^{-\varepsilon_g/T})/\varepsilon_g^3$; $E = 0,81T$; $k = 0$; $T^0 = 0,001$. Критерий сходимости: $|T^{\nu+1} - T^\nu| \leq 10^{-4}(1 + T^{\nu+1})$. По пространству использовалась равномерная сетка с измельчением, шаг последовательно уменьшался в два раза: $\Delta r = 0,08; 0,04; 0,02; 0,01$. По времени шаг выбирался с последовательным уменьшением в 4 раза: $\tau = 2 \cdot 10^{-6}; 0,5 \cdot 10^{-6}; 1,25 \cdot 10^{-7}; 3,125 \cdot 10^{-8}$.

На рис. 1 приведены профили температуры вещества, полученные по схеме РОМБ на четырех сетках с $\Delta r = 0,08; 0,04; 0,02; 0,01$. Видно, что профили температуры вещества на сетках с $\Delta r < 0,02$ практически совпадают. На подробной сетке с $\Delta r < 0,02$ результаты, полученные по новой схеме (6) и схеме TVD, практически совпадают с результатами, полученными по схеме РОМБ.

В табл. 1 приведены порядки сходимости разных схем. Видно, что порядок сходимости линейных схем (6) и схемы РОМБ в норме L_1 близок ко второму, а порядок сходимости нелинейной схемы TVD дает большой разброс по значениям. Это объясняется нелинейностью задачи и схемы TVD.

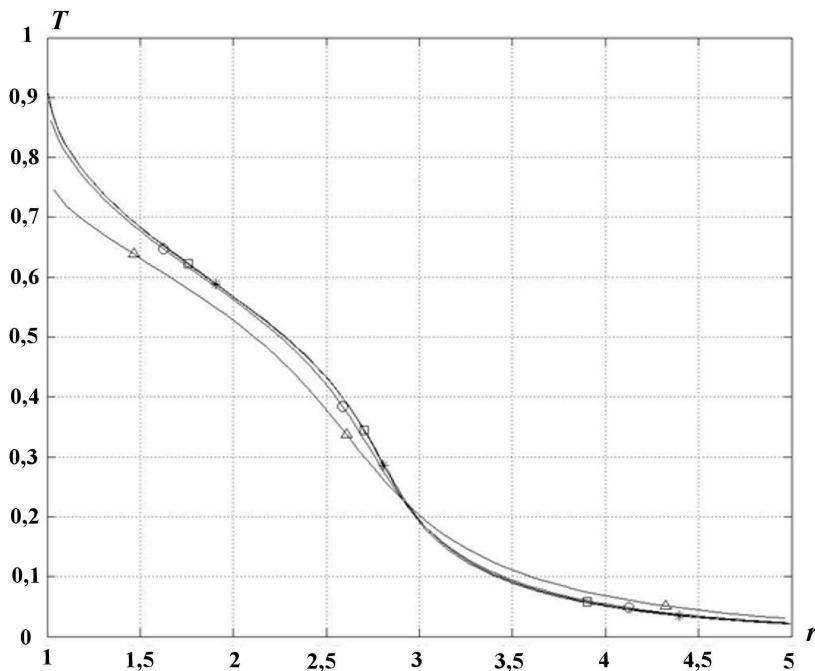


Рис. 1. Профили температуры вещества на момент времени $t = 0,01$: \triangle — $\Delta r = 0,08$; \circ — $\Delta r = 0,04$; \square — $\Delta r = 0,02$; $*$ — $\Delta r = 0,01$

Таблица 1

Порядки сходимости схем

Тип схемы	Число интервалов	
	56/112/224*	112/224/448
TVD	0,4	2,5
РОМБ	2,3	3,2
Схема (6)	1,9	1,8

* Знак "/" отделяет число интервалов сетки в трех проведенных расчетах.

Задача 2. На левой границе задано излучение планковского источника температуры $B_\nu (T = 1)$, на правой — условие свободной поверхности. В областях 1 ($1 \leq r \leq 3$) и 3 ($3,4 \leq r \leq 5$) коэффициент поглощения равен $\kappa_g = 27 (1 - e^{-\varepsilon_g/T}) / \varepsilon_g^3$, в области 2 ($3 \leq r \leq 3,4$) $\kappa_g = 10\,000 (1 - e^{-\varepsilon_g/T}) / \varepsilon_g^3$. Всюду $E = 0,81T$; $k = 0$ и $T^0 = 0,001$. Критерий сходимости: $|T^{\nu+1} - T^\nu| \leq 10^{-4} (1 + T^{\nu+1})$.

Использовались следующие сетки:

- 1) по пространству: $r_1 = 1; 1,004; 1,04; r_4 = 1,1; \dots; r_{22} = 2,9 (\Delta r = 0,1); r_{23} = 2,987; 2,999; 3; 3,001; 3,004; 3,013; r_{29} = 3,04; \dots; r_{37} = 3,36 (\Delta r = 0,04); r_{38} = 3,396; 3,4; 3,404; 3,44; r_{42} = 3,5; \dots; r_{57} = 5 (\Delta r = 0,1)$;
- 2) по группам: $g_{1\dots 16} = 0; 0,3; 0,6; 0,8; 1,2; 1,5; 1,8; 2,4; 2,7; 3; 4; 5; 7; 9; 11; 15$;
- 3) по времени: $\tau = 0,0002$.

В качестве *точного* решения использовался результат, полученный в расчетах на сходимость по кинетическому уравнению.

На рис. 2 приведены профили температуры вещества на три момента времени. Выбраны характерные моменты движения тепловой волны: $t = 0,004$ — прогрев области 1; $t = 0,028$ — вхождение и начало распространения излучения в плотном веществе; $t = 0,15$ — прогрев области 2 и выход на стационарный режим.

Из рис. 2 видно, что на первый момент времени $t = 0,004$ прогрев области 1 быстрее всего осуществляется при использовании схемы (6), по-видимому, за счет диссипативной добавки $\frac{1}{q_1 V_i} \Delta_i (r^\sigma S)$ в соотношениях связи $(U_h)_{i+1/2} = \gamma_i U_i + (1 - \gamma_i) U_{i+1} + \xi_i \Delta_i (r^\sigma S)$, $\xi = \delta + \frac{1}{q_1 V_i}$ (это может происходить также из-за перехода на диффузионный режим $\beta_i = 0$, но в данной задаче таких переходов нет). Однако прогрев области 2 на первый и последующие моменты времени происходит медленнее, чем при использовании TVD-схемы (профили температуры вещества круче). Схема РОМБ на первый и второй моменты времени дает наилучшие результаты. На последний момент времени при выходе на стационарный режим наилучшие результаты дает схема (6).

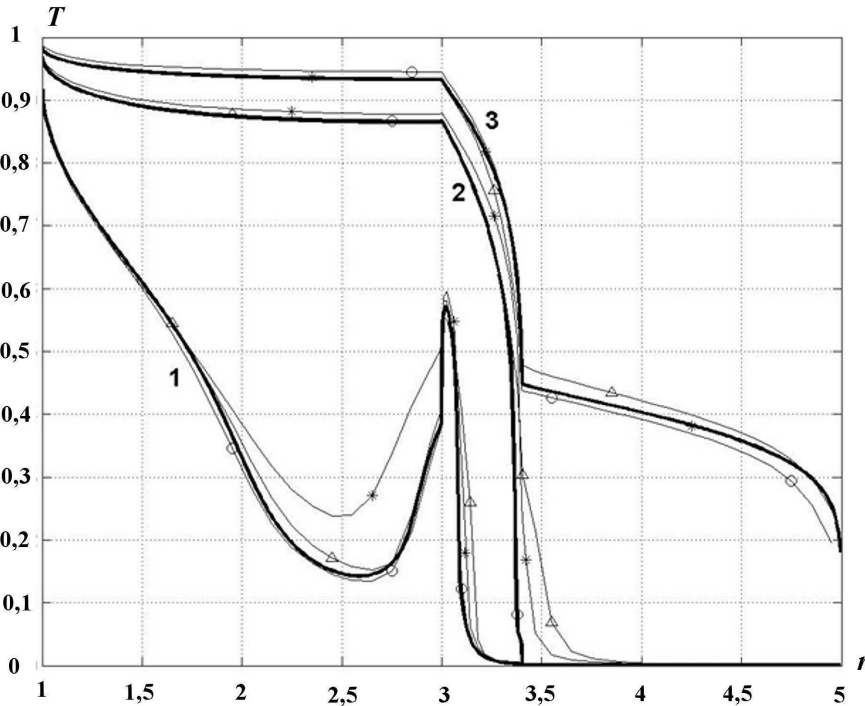


Рис. 2. Профили температуры вещества: 1 — $t = 0,004$; 2 — $t = 0,028$; 3 — $t = 0,15$; о — схема РОМБ; Δ — схема TVD; * — схема (6); — — точное решение

Более быстрый прогрев области 1 по схеме (6) объясняется еще тем, что переход на диффузионный режим осуществляется не при условии $U_i < 0$, а при нарушении более жестких условий $\langle df \rangle_i \geq 0$, $\langle cf \rangle_i \geq 0$, $\langle fa \rangle_i \geq 0$, которые удобны при выборе параметров схемы, но могут вносить излишнюю диффузионность в решение задачи. В данной задаче при $\beta_i = 0$ коэффициент $q = \frac{\beta}{\sigma\tau} + \alpha$ не обращается в нуль, поэтому не нужно рассматривать шесть вариантов, рассмотренных для задачи 1.

Вторая задача Флека характеризуется большим числом итераций, поэтому проанализируем сходимость итераций в разных схемах.

В табл. 2 приведены суммарное, среднее и максимальное числа итераций за первые 20 шагов. В строке с максимальным числом итераций приводится (через /) шаг, на котором этот максимум достигается. Далее число итераций быстро уменьшается, поэтому суммарное и среднее число итераций достаточно приводить за первые 20 шагов.

Из табл. 2 видно, что наилучшую скорость сходимости итераций имеет схема РОМБ. Это объясняется в первую очередь тем, что линейные и однородные схемы проще, а схема РОМБ является линейной и однородной. Схема TVD является нелинейной, поэтому у нее сходимость наихудшая. Новые схемы (5), (6) и (7), (8) являются линейными, но неоднородными с переключателями при нарушении условий положительности решения.

Анализ проведенных расчетов показывает, что все схемы дают положительное решение по T и U . Результаты, полученные по новой схеме (6), хорошо согласуются с результатами, полученными по схемам РОМБ и TVD. Но в отличие от этих схем для схемы (6) аналитически гарантируется возможность получения положительного решения.

Авторы считают, что в данной работе впервые предложена разностная схема для решения переноса теплового излучения квазидиффузионным методом с аналитическим обоснованием получения положительного решения в параболическом случае.

Таблица 2

Сходимость итераций в разных схемах при $\tau = 0,0002$, $\varepsilon_{\text{сх}} = 0,0001$

Число итераций	Тип схемы		
	TVD	РОМБ	Схема (6)
Суммарное за 20 шагов	305	190	236
Среднее	15,25	9,5	11,8
Максимальное	22/4	14/6	18/3

Список литературы

1. Гольдин В. Я. Квазидиффузионный метод решения кинетического уравнения // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1964. Т. 4, № 6. С. 1078–1087.
2. Антоненко Э. Н., Долголёва Г. В., Крупина С. Н. Программа расчета одномерных задач лазерного термоядерного синтеза (SND) // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1993. Вып. 2. С. 3–9.
3. Гаджиев А. Д., Писарев В. Н. Неявный конечно-разностный метод РОМБ для численного решения уравнений газовой динамики с теплопроводностью // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1979. Т. 19, № 5. С. 1288–1303.
4. Гаджиев А. Д., Селезнев В. Н., Романова Е. М., Шестаков А. А. Методика ТОМ4-КД для математического моделирования двумерных уравнений переноса излучения в многогрупповом квазидиффузионном приближении // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2001. Вып. 4. С. 48–59.
5. Гаджиев А. Д., Грабовенская С. А., Завьялов В. В., Шестаков А. А. Применение TVD-подхода к решению уравнения переноса теплового излучения квазидиффузионным методом // Там же. 2010. Вып. 3. С. 3–14.

6. Писарев В. Н. О параметрическом семействе схем РОМБ для нелинейного уравнения теплопроводности // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики. 1985. Вып. 1. С. 30–42.
7. Гаджиев А. Д., Шестаков А. А. Метод РОМБ для решения многогруппового уравнения переноса излучения в P_1 -приближении // Там же. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1989. Вып. 3. С. 66–70.
8. Гаджиев А. Д., Шестаков А. А. Об устойчивости и сходимости конечно-разностной схемы РОМБ для совместного решения уравнения энергии и уравнения переноса излучения в P_1 -приближении // Там же. 1993. Вып. 1. С. 31–37.
9. Шестаков А. А. Безусловно устойчивые разностные схемы для решения задачи переноса лучистой энергии в диффузионном и P_1 -приближениях // Там же. Вып. 3. С. 47–53.
10. Гаджиев А. Д., Шестаков А. А. Метод выделения диагональной матрицы для численного решения уравнения переноса излучения в P_1 -приближении по схеме РОМБ // Там же. 2006. Вып. 1. С. 3–13.

Статья поступила в редакцию 15.10.10.
