

УДК 533.9

ТЕСТЫ ДЛЯ ПРОГРАММ, ИСПОЛЬЗУЮЩИХ ГИБРИДНУЮ МОДЕЛЬ ПРИ ЧИСЛЕННОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ДИНАМИКИ ПЛАЗМЫ

А. И. Голубев, Н. П. Пятаков
(РФЯЦ-ВНИИЭФ)

Найдены аналитические решения двух модельных задач: задачи Коши для кинетического уравнения Власова со специальным начальным распределением ионов при их движении в заданном однородном магнитном поле и задачи для системы уравнений электронной гидродинамики и уравнений Максвелла в случае идеально проводящей плазмы. Решение второй задачи получено методом пробных функций. Эти решения могут быть использованы при тестировании прикладных программ, реализующих гибридную модель плазмы.

Ключевые слова: кинетическое уравнение Власова, задача Коши, метод характеристик, уравнения электронной гидродинамики, уравнения Максвелла, метод пробных функций.

Введение

Первые публикации, содержащие уравнения гибридной модели плазмы, относятся к середине 70-х годов прошлого столетия [1, 2]. В рамках этой модели для описания динамики ионных компонентов плазмы используется кинетический подход, а электроны представляются жидкостью, нейтрализующей заряд ионов. Эта модель оказалась чрезвычайно продуктивной и нашла широкое применение в последующие годы при изучении взаимодействия потоков разреженной плазмы в магнитном поле. Так, например, программы, реализующие гибридную модель плазмы, использовались при теоретических исследованиях динамики плазмы [3–6], при интерпретации результатов лабораторных экспериментов и активных экспериментов в космосе [7–9] и в других областях физики плазмы [10].

Численные алгоритмы, применяемые при решении уравнений гибридной модели, используют хорошо известный метод *частица в ячейке* для моделирования поведения ионных компонентов плазмы [11] и различные разностные схемы для решения уравнений электронной гидродинамики совместно с уравнениями Максвелла (см., например, [12–15]).

Следует отметить, что, несмотря на хорошо развитую общую теорию моделирования плазмы методом *частица в ячейке* [11], при решении этим методом конкретных прикладных задач требуется уделять особое внимание отдельным деталям метода, в частности, заданию начального распределения ансамбля модельных частиц. Большую помощь при этом могут оказать представительные тестовые задачи, в которых заранее известно временное поведение ансамбля модельных частиц. Так, при изучении взаимодействия ионизованного облака с окружающей плазмой в магнитном поле (см., например, [4, 6]) весьма полезной, по мнению авторов, оказывается задача о движении ансамбля ионов в пространственно однородном магнитном поле. Хотя решение задачи о движении *отдельной* заряженной частицы в заданном магнитном поле хорошо известно (см., например, [16]), аналитическое описание поведения средних величин для *ансамбля* таких частиц при движении в заданном однородном магнитном поле, по-видимому, отсутствует. Вместе с тем, как показал опыт авторов в процессе разработки программ моделирования динамики разреженной плазмы на основе гибридной модели, эта задача оказывается весьма полезной для выяснения свойств алгоритмов

расчета траекторий модельных частиц и их вкладов в средние характеристики плазмы. В данной работе получено аналитическое решение задачи Коши для кинетического уравнения Власова со специальным начальным распределением ионов при их движении в заданном однородном магнитном поле. Функция распределения в рассмотренной модельной задаче найдена методом характеристик.

В гибридной модели плазмы совокупность уравнений электронной гидродинамики и уравнений Максвелла является существенно нелинейной системой, имеющей сложные дисперсионные свойства [15]. Теоретическое исследование разностных схем, используемых при их решении, может быть выполнено лишь при значительных упрощающих предположениях и не всегда дает полного представления о свойствах этих схем, в частности реальных условиях их устойчивости. В данной работе предложено аналитическое решение модельной задачи для этой нелинейной системы в случае идеально проводящей плазмы. Решение получено методом пробных функций. При этом пространственно-временное поведение компонент самосогласованного магнитного поля выбрано сходным с их поведением в задаче о взаимодействии ионизованного облака с окружающей плазмой в магнитном поле [4, 6], а движение ионных компонентов плазмы подобрано таким образом, чтобы уравнения рассматриваемой системы удовлетворялись без явного введения в них, как это обычно делается в методе пробных функций, каких-либо фиктивных источников.

Уравнения упрощенной гибридной модели плазмы

В данной работе рассмотрим упрощенный вариант гибридной модели, предполагая плазму идеально проводящей и пренебрегая влиянием электронного давления на движение частиц. В этом случае уравнения гибридной модели можно записать в следующем виде (см., например, [10, 12]; используется гауссова система единиц):

- кинетическое уравнение для функции распределения $f_k(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ ионов сорта k

$$\frac{\partial f_k}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_k}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\mathbf{F}_k}{m_k} \frac{\partial f_k}{\partial \mathbf{v}} = 0. \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{F}_k = Z_k (\mathbf{E} + [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] / c)$, где Z_k, m_k — заряд и масса ионов; c — скорость света в вакууме; \mathbf{E}, \mathbf{B} — напряженность электрического поля и индукция магнитного поля соответственно. При известной функции распределения концентрация ионов сорта k и их средняя скорость определяются следующими соотношениями:

$$n_k = \int f_k(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{v}; \quad n_k \mathbf{u}_k = \int \mathbf{v} f_k(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{v}; \quad (2)$$

- уравнения для электронов

$$en_e = \sum_k Z_k n_k; \quad \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{u}_e \times \mathbf{B}] = 0, \quad (3)$$

где $(-e)$ — заряд электрона; n_e — концентрация электронов; \mathbf{u}_e — их скорость;

- уравнения Максвелла, не содержащие тока смещения:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}. \quad (4)$$

Отметим, что скорость электронов равна

$$\mathbf{u}_e = \mathbf{u} - \frac{\mathbf{J}}{en_e}, \quad \mathbf{u} = \frac{1}{en_e} \sum_k Z_k n_k \mathbf{u}_k. \quad (5)$$

Будем получать аналитические решения уравнений (1)–(5) применительно к задаче о взаимодействии ионизованного облака с окружающей плазмой во внешнем магнитном поле, предполагая

при этом, что окружающая облако плазма пространственно однородна, а начальное распределение частиц облака сферически-симметрично. В этом случае единственным выделенным направлением в модели остается направление внешнего магнитного поля и задача становится осесимметричной с осью симметрии, направленной вдоль этого поля и проходящей через точку, являющуюся центром начального распределения частиц облака. Для задачи с осевой симметрией удобно записать уравнения гибридной модели в сферической системе координат (r, θ, φ) с центром в этой точке и полярной осью, направленной вдоль внешнего магнитного поля. В этой системе координат все величины не будут зависеть от переменной φ .

Кинетическое уравнение (1) для ионов сорта k примет вид [17] (индекс k для сокращения записи опустим)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f + v_r \frac{\partial}{\partial r} f + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} f + \left(\frac{v_\theta^2 + v_\varphi^2}{r} + \frac{F_r}{m} \right) \frac{\partial}{\partial v_r} f + \left(\frac{v_\varphi^2}{r} \operatorname{ctg} \theta - \frac{v_r v_\theta}{r} + \frac{F_\theta}{m} \right) \frac{\partial}{\partial v_\theta} f + \\ + \left(-\frac{v_\varphi v_\theta}{r} \operatorname{ctg} \theta - \frac{v_r v_\varphi}{r} + \frac{F_\varphi}{m} \right) \frac{\partial}{\partial v_\varphi} f = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Функция f в (6) имеет смысл плотности числа частиц в фазовом пространстве $(r, \theta, v_r, v_\theta, v_\varphi)$, приходящейся на единицу азимутального угла.

Для дальнейшего изложения удобно в уравнениях (2)–(6) перейти к безразмерным переменным и функциям. Используем в качестве основных следующие единицы измерения ($[a]$ означает единицу измерения величины a):

$$[r] = r_0; \quad [v] = u_0; \quad [n] = n_0; \quad [B] = B_0; \quad [m_k] = m_0; \quad [Z_k] = e,$$

где B_0 — индукция внешнего магнитного поля. Для остальных величин положим

$$[t] = \tilde{t}_0 = \frac{r_0}{u_0}; \quad [f] = f_0 = \frac{n_0}{u_0^3}; \quad [E] = E_0 = \frac{u_0}{c} B_0; \quad [J] = J_0 = e n_0 u_0.$$

Тогда, сохраняя для безразмерных величин те же обозначения, что и для размерных, будем иметь

$$\mathbf{F}_k = q Z_k (\mathbf{E} + [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]); \quad n_e = \sum_k Z_k n_k; \quad \mathbf{E} + [\mathbf{u}_e \times \mathbf{B}] = 0; \quad (7)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad \nabla \times \mathbf{B} = q M^2 \mathbf{J}, \quad (8)$$

где

$$q = \frac{r_0}{u_0} \frac{e B_0}{m_0 c}; \quad M^2 = \frac{4\pi m_0 n_0 u_0^2}{B_0^2}.$$

Остальные уравнения своего вида не изменят.

Движение ансамбля ионов в пространственно однородном магнитном поле

Предположим, что поле $\mathbf{E} = 0$, а внешнее магнитное поле пространственно однородно и направлено вдоль полярной оси введенной ранее сферической системы координат (r, θ, φ) . Нетрудно получить следующие формулы для характеристики уравнения (6), проходящей при $t = t_0$ через точку $(r_0, \theta_0, v_{r0}, v_{\theta0}, v_{\varphi0})$:

$$r = \left[r_0^2 + (\alpha^2 + \beta^2) v_{\perp 0}^2 + v_{z0}^2 \tau^2 + 2\rho_0 (\alpha v_{\rho 0} + \beta v_{\varphi 0}) + 2z_0 \tau v_{z0} \right]^{1/2}; \quad (9)$$

$$\sin \theta = \frac{\rho}{r}; \quad \cos \theta = \frac{z}{r}; \quad (10)$$

$$v_r = \frac{\rho v_\rho + z v_z}{r}; \quad v_\theta = \frac{z \rho v_\rho - \rho^2 v_z}{\rho r}; \quad v_\varphi = \frac{\rho_0 (-s v_{\rho 0} + c v_{\varphi 0}) - \beta v_{\perp 0}^2}{\rho}. \quad (11)$$

В этих формулах

$$\begin{aligned}
 \tau &= t - t_0; & s &= \sin(\omega\tau); & c &= \cos(\omega\tau); & \alpha &= \frac{s}{\omega}; & \beta &= \frac{1-c}{\omega}; & \omega &= \frac{qZ}{m}; \\
 \rho^2 &= \rho_0^2 + (\beta^2 + \alpha^2) v_{\perp 0}^2 + 2\rho_0 (\alpha v_{\rho 0} + \beta v_{\varphi 0}); & z &= z_0 + v_{z 0}\tau; & r^2 &= \rho^2 + z^2; \\
 \rho v_{\rho} &= \rho_0 (c v_{\rho 0} + s v_{\varphi 0}) + \alpha v_{\perp 0}^2; & v_z &= v_{z 0}; \\
 v_{\perp 0}^2 &= v_{\rho 0}^2 + v_{\varphi 0}^2; & v_{\rho 0} &= v_{r 0} \sin \theta_0 + v_{\theta 0} \cos \theta_0; & v_{z 0} &= v_{r 0} \cos \theta_0 - v_{\theta 0} \sin \theta_0; \\
 \rho_0 &= r_0 \sin \theta_0; & z_0 &= r_0 \cos \theta_0.
 \end{aligned}$$

Примечание. При получении формул (9)–(11) удобно сначала найти выражения для характеристик кинетического уравнения в декартовой системе координат (x, y, z) с осью z , совпадающей с полярной осью сферической системы координат, а затем перейти по известным формулам к выражениям (9)–(11) в сферической системе координат.

Отметим важный частный случай, когда начальная скорость модельной частицы имеет вид $\mathbf{v}_0 = (v_{r 0}, 0, 0)$, где $v_{r 0} = r_0/t_0$. Для него получим

$$\rho^2 = \frac{\rho_0^2}{\omega^2 t_0^2} \left[(\omega t_0 + s)^2 + (1 - c)^2 \right]; \quad z = z_0 + \frac{r_0 \cos \theta_0}{t_0} (t - t_0) = z_0 \frac{t}{t_0}.$$

Отсюда следует, что отношение ρ/ρ_0 не зависит от начальных координат частицы и для всех частиц одинаково в любой момент времени t .

Обратимся теперь к получению решения задачи Коши для кинетического уравнения (6). Пусть при $t = t_0$ начальное условие в задаче Коши для уравнения (6) имеет вид

$$f(t = t_0) = \frac{N}{\frac{4}{3}\pi t_0^3} \tilde{\theta}(r_0 - t_0) \delta\left(v_{r 0} - \frac{r_0}{t_0}\right) \delta(v_{\theta 0}) \delta(v_{\varphi 0}),$$

где N — суммарное число ионов в ансамбле (в принятых выше единицах измерения); $\tilde{\theta}(x) = 1$ при $x < 0$ и $\tilde{\theta}(x) = 0$ при $x > 0$. Тогда при $t > t_0$ решением задачи Коши будет функция

$$f = \frac{N}{\frac{4}{3}\pi t_0^3} \tilde{\theta}(r_0(\bullet) - t_0) \delta(w_r(\bullet)) \delta(w_{\theta}(\bullet)) \delta(w_{\varphi}(\bullet)), \quad (12)$$

где $r_0(\bullet)$, $w_r(\bullet) = v_{r 0}(\bullet) - \frac{r_0(\bullet)}{t_0}$, $w_{\theta}(\bullet) = v_{\theta 0}(\bullet)$, $w_{\varphi}(\bullet) = v_{\varphi 0}(\bullet)$ являются функциями аргументов t , r , θ , v_r , v_{θ} , v_{φ} . Для того, чтобы записать решение задачи Коши в явном виде через эти аргументы, следует выразить через них начальные условия r_0 , θ_0 , $v_{r 0}$, $v_{\theta 0}$, $v_{\varphi 0}$. Воспользуемся формулами (9), (11). Заменяем в них τ на $-\tau$, величины с индексом 0 — на соответствующие величины без индекса, а величины без индекса — на величины с индексом 0. Тогда получим

$$r_0^2 = \rho_0^2 + z_0^2; \quad \rho_0^2 = \rho^2 + (\beta^2 + \alpha^2) v_{\perp}^2 + 2\rho(-\alpha v_{\rho} + \beta v_{\varphi}); \quad z_0 = z - v_z \tau; \quad (13)$$

$$\left. \begin{aligned}
 r_0 v_{r 0} &= \rho_0 v_{\rho 0} + z_0 v_z; \\
 \rho_0 r_0 v_{\theta 0} &= z_0 \rho_0 v_{\rho 0} - \rho_0^2 v_z; \\
 \rho_0 v_{\varphi 0} &= \rho (s v_{\rho} + c v_{\varphi}) - \beta v_{\perp}^2,
 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

где $\rho_0 v_{\rho 0} = \rho (c v_{\rho} - s v_{\varphi}) - \alpha v_{\perp}^2$.

Не будем приводить явный вид функции f , поскольку в итоге потребуются лишь выражения для средних характеристик $n(t, r, \theta)$, $\mathbf{u}(t, r, \theta)$. При их вычислении необходимо провести интегрирование по переменным v_r, v_θ, v_φ . Для упрощения выкладок будем интегрировать в других переменных, а именно в переменных w_r, w_θ, w_φ . Как следует из формул (14), переход к этим переменным упростится, если предварительно ввести промежуточные переменные интегрирования

$$\widehat{v}_\rho = cv_\rho - sv_\varphi; \quad \widehat{v}_\varphi = sv_\rho + cv_\varphi; \quad \widehat{v}_z = v_z. \quad (15)$$

Якобиан \widehat{J} перехода от переменных v_r, v_θ, v_φ к переменным (15) равен $\widehat{J} = 1$. Перепишем соотношения (13), (14) в новых переменных:

$$r_0^2 = \rho_0^2 + z_0^2; \quad \rho_0^2 = \rho^2 + (\beta^2 + \alpha^2) \widehat{v}_\perp^2 - 2\rho(\alpha\widehat{v}_\rho + \beta\widehat{v}_\varphi); \quad z_0 = z - \widehat{v}_z\tau; \quad (16)$$

$$\left. \begin{aligned} r_0 v_{r0} &= \rho_0 v_{\rho 0} + z_0 \widehat{v}_z; \\ \rho_0 r_0 v_{\theta 0} &= z_0 \rho_0 v_{\rho 0} - \rho_0^2 \widehat{v}_z; \\ \rho_0 v_{\varphi 0} &= \rho \widehat{v}_\varphi - \beta \widehat{v}_\perp^2, \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

где теперь $\rho_0 v_{\rho 0} = \rho \widehat{v}_\rho - \alpha \widehat{v}_\perp^2$. Отметим, что $\widehat{v}_\perp^2 = \widehat{v}_\rho^2 + \widehat{v}_\varphi^2 = v_\rho^2 + v_\varphi^2 = v_\perp^2 = v_{\perp 0}^2 = v_{\rho 0}^2 + v_{\varphi 0}^2 = \widehat{v}_{\rho 0}^2 + \widehat{v}_{\varphi 0}^2$.

Найдем нули аргументов δ -функций в формуле (12), т. е. решим относительно переменных $\widehat{v}_\rho, \widehat{v}_z, \widehat{v}_\varphi$ систему уравнений

$$w_r = \frac{1}{r_0} \left(\rho_0 v_{\rho 0} + z_0 v_{z0} - \frac{r_0^2}{t_0} \right) = 0; \quad w_\theta = \frac{1}{r_0} (z_0 v_{\rho 0} - \rho_0 v_{z0}) = 0; \quad w_\varphi = v_{\varphi 0} = 0.$$

Из нее имеем

$$v_{\rho 0} = \frac{\rho_0}{t_0}; \quad v_{z0} = \frac{z_0}{t_0}; \quad v_{\varphi 0} = 0.$$

Тогда, учитывая уравнения (17) и то, что $\widehat{v}_z = v_z = v_{z0}$, находим

$$\rho \widehat{v}_\rho = \alpha \widehat{v}_\perp^2 + \frac{\rho_0^2}{t_0}; \quad \rho \widehat{v}_\varphi = \beta \widehat{v}_\perp^2; \quad \widehat{v}_z = \frac{z_0}{t_0}. \quad (18)$$

При этом

$$\widehat{v}_\perp^2 = v_{\rho 0}^2 + v_{\varphi 0}^2 = v_{\rho 0}^2 = \frac{\rho_0^2}{t_0^2}. \quad (19)$$

Подставляя формулы (18), (19) в (16), в нулях аргументов δ -функций получаем

$$\rho_0^2 = \frac{\rho^2 t_0^2}{(t_0 + \alpha)^2 + \beta^2}; \quad z_0 = \frac{z t_0}{t_0 + \tau} = \frac{z t_0}{t}. \quad (20)$$

Введем новое обозначение $\Delta = (t_0 + \alpha)^2 + \beta^2$, тогда $r_0^2 = \frac{\rho^2 t_0^2}{\Delta} + \frac{z^2 t_0^2}{t^2}$. Учитывая (19), (20), из (18) имеем

$$\rho \widehat{v}_\rho = (t_0 + \alpha) \frac{\rho_0^2}{t_0^2} = (t_0 + \alpha) \frac{\rho^2}{\Delta}; \quad \rho \widehat{v}_\varphi = \beta \frac{\rho_0^2}{t_0^2} = \beta \frac{\rho^2}{\Delta}; \quad \widehat{v}_z = \frac{z_0}{t_0} = \frac{z}{t}. \quad (21)$$

Теперь при вычислении моментов перейдем от функции распределения (12) к переменным w_r, w_θ, w_φ . Эти переменные выражаются через промежуточные переменные $\widehat{v}_\rho, \widehat{v}_\varphi, \widehat{v}_z$ по формулам

$$\begin{aligned} w_r &= v_{r0} - \frac{r_0}{t_0} = \frac{1}{r_0} \left(\rho_0 v_{\rho 0} + z_0 v_{z0} - \frac{r_0^2}{t_0} \right) = \frac{1}{r_0} \left(\rho \widehat{v}_\rho - \alpha \widehat{v}_\perp^2 + z_0 \widehat{v}_z - \frac{r_0^2}{t_0} \right); \\ w_\theta &= v_{\theta 0} = \frac{1}{r_0} (z_0 v_{\rho 0} - \rho_0 v_{z0}) = \frac{1}{r_0 \rho_0} \left[z_0 (\rho \widehat{v}_\rho - \alpha \widehat{v}_\perp^2) - \rho_0^2 \widehat{v}_z \right]; \\ w_\varphi &= v_{\varphi 0} = \frac{1}{\rho_0} (\rho \widehat{v}_\varphi - \beta \widehat{v}_\perp^2). \end{aligned} \quad (22)$$

Вычислим якобиан $J = \left| \frac{D(w_r, w_\theta, w_\varphi)}{D(\widehat{v}_\rho, \widehat{v}_\varphi, \widehat{v}_z)} \right|$ в нулях аргументов δ -функций в формуле (12). Заметим, что в этом случае при вычислении производных в формулах (22) можно ограничиться дифференцированием только выражений в скобках. Искомый якобиан J равен

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\rho}{r_0 \Delta} [(t_0 + \alpha)^2 - \beta^2] & \frac{1}{r_0} \frac{2\beta\rho}{\Delta} (t_0 + \alpha) & \frac{z_0}{r_0} \frac{t}{t_0} \\ \frac{z_0}{\rho_0} \frac{\rho}{r_0 \Delta} [(t_0 + \alpha)^2 - \beta^2] & \frac{z_0}{\rho_0} \frac{1}{r_0} \frac{2\beta\rho}{\Delta} (t_0 + \alpha) & -\frac{\rho_0 t}{r_0 t_0} \\ -\frac{2\beta}{\rho_0 t_0^2} \frac{\rho(\alpha + t_0)}{\Delta} & \frac{\rho}{\rho_0} \frac{(t_0 + \alpha)^2 - \beta^2}{\Delta} & 0 \end{vmatrix} = \frac{t}{t_0^3} \Delta.$$

Зная якобиан, нетрудно вычислить распределение концентрации частиц:

$$n(r, \theta, \varphi) = \int f d\mathbf{v} = \frac{N}{\frac{4}{3}\pi t \Delta} \tilde{\theta} \left(\sqrt{\frac{\rho^2}{\Delta} + \frac{z^2}{t^2}} - 1 \right).$$

При вычислении поля скоростей потребуются выражения для v_r , v_θ , v_φ в нулях аргументов δ -функций. Подставив выражения (21) в (15), получим

$$\begin{aligned} v_\rho &= c\widehat{v}_\rho + s\widehat{v}_\varphi = c \frac{\rho(\alpha + t_0)}{\Delta} + s \frac{\beta\rho}{\Delta} = \rho \frac{ct_0 + \alpha}{\Delta}; \\ v_\varphi &= -s\widehat{v}_\rho + c\widehat{v}_\varphi = -s \frac{\rho(\alpha + t_0)}{\Delta} + c \frac{\beta\rho}{\Delta} = -\rho \frac{st_0 + \beta}{\Delta}; \\ v_z &= \widehat{v}_z = \frac{z}{t}. \end{aligned}$$

Чтобы перейти к v_r , v_θ , v_φ , нужно воспользоваться формулами (11). Окончательно для компонент средней скорости частиц $\mathbf{u}(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{n} \int \mathbf{v} f d\mathbf{v}$ находим

$$u_r = \frac{1}{r} \left(\rho^2 \frac{ct_0 + \alpha}{\Delta} + z^2 \frac{1}{t} \right); \quad u_\theta = \frac{z\rho}{r} \left(\frac{ct_0 + \alpha}{\Delta} - \frac{1}{t} \right); \quad u_\varphi = -\rho \frac{st_0 + \beta}{\Delta}.$$

Замечание 1. Если положить, что частота $\omega = 0$, получим задачу о свободном разлете шарового облака в пустоту. В этом случае $s = 0$, $c = 1$, $\alpha = \tau$, $\beta = 0$, $\Delta = t^2$ и получаются хорошо известные выражения

$$n(r, \theta, \varphi) = \frac{N}{\frac{4}{3}\pi t^3} \tilde{\theta}(r - t); \quad u_r = \frac{r}{t}; \quad u_\theta = 0; \quad u_\varphi = 0.$$

Аналитическое решение модельной задачи для системы уравнений электронной гидродинамики и уравнений Максвелла

Для задачи с осевой симметрией удобно ввести в рассмотрение компоненту A_φ векторного потенциала \mathbf{A} такого, что $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. В этом случае из уравнений Максвелла получаются два скалярных уравнения для вычисления компонент A_φ, B_φ :

$$\frac{\partial A_\varphi}{\partial t} + E_\varphi = 0; \quad \frac{\partial B_\varphi}{\partial t} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial E_r}{\partial \theta} - \frac{\partial r E_\theta}{\partial r} \right). \quad (23)$$

В этих уравнениях согласно (7)

$$E_r = u_{e\varphi} B_\theta - u_{e\theta} B_\varphi; \quad E_\theta = u_{er} B_\varphi - u_{e\varphi} B_r; \quad E_\varphi = u_{e\theta} B_r - u_{er} B_\theta. \quad (24)$$

В свою очередь,

$$B_r = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} A_\varphi \sin \theta; \quad B_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r A_\varphi, \quad (25)$$

а компоненты скорости электронов \mathbf{u}_e определяются из уравнений (5):

$$u_{er} = u_r - \frac{1}{M^2 q n_e} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (B_\varphi \sin \theta); \quad u_{e\theta} = u_\theta + \frac{1}{M^2 q n_e} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_\varphi); \quad (26)$$

$$u_{e\varphi} = u_\varphi - \frac{1}{M^2 q n_e} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} r B_\theta - \frac{\partial}{\partial \theta} B_r \right). \quad (27)$$

В дальнейшем для сокращения записи используем обозначение $M^2 q n_e = n$.

При получении аналитического решения уравнений (23)–(27) воспользуемся методом пробных функций [18, 19], определяя при этом компоненты средней скорости ионов таким образом, чтобы они приводили к заранее заданному магнитному полю. Отметим, что уравнения (23)–(27) существенно упростятся, если предположить, что

$$u_\theta = -\frac{1}{nr} \frac{\partial}{\partial r} r B_\varphi.$$

В этом случае $u_{e\theta} = 0$ и в уравнениях (23)–(27) можно явно выделить угловую зависимость, если предположить, что концентрация электронов не зависит от переменной θ .

Введем новые неизвестные a_φ , b_φ , b_r , b_θ , α_φ , $\alpha_{e\varphi}$, e_φ , e_r , e_θ , полагая при этом, что они будут зависеть лишь от переменных r , t :

$$\begin{aligned} A_\varphi &= a_\varphi \sin \theta; & B_\varphi &= b_\varphi \sin \theta \cos \theta; & B_r &= b_r \cos \theta; & B_\theta &= b_\theta \sin \theta; \\ u_\varphi &= \alpha_\varphi \sin \theta; & u_{e\varphi} &= \alpha_{e\varphi} \sin \theta; & E_r &= e_r \sin^2 \theta; & E_\theta &= e_\theta \sin \theta \cos \theta; & E_\varphi &= e_\varphi \sin \theta. \end{aligned}$$

Если теперь положить

$$u_r = \alpha_r(r, t) - \frac{3}{nr} b_\varphi \sin^2 \theta,$$

то согласно (26) компонента u_{er} не будет зависеть от угла θ :

$$u_{er} = \alpha_r - \frac{2}{nr} b_\varphi. \quad (28)$$

Предположим, что зависимости $n(r, t)$, $a_\varphi(r, t)$, $b_\varphi(r, t)$ известны; по формулам (25) можно вычислить функции $b_r(r, t)$, $b_\theta(r, t)$. С учетом сделанных выше предположений найдем функции $\alpha_r(r, t)$, $\alpha_\varphi(r, t)$ таким образом, чтобы удовлетворялись уравнения (23)–(27). С учетом (23), (24), (28) имеем

$$\alpha_r = u_{er} + \frac{2}{nr} b_\varphi = \frac{1}{b_\theta} \frac{\partial a_\varphi}{\partial t} + \frac{2}{nr} b_\varphi.$$

Определение зависимости $\alpha_\varphi(r, t)$ проведем с использованием второго соотношения в (23). Предварительно заметим, что согласно (27)

$$\alpha_\varphi = \alpha_{e\varphi} + \frac{1}{nr} \left(b_r + \frac{\partial r b_\theta}{\partial r} \right). \quad (29)$$

Из второго уравнения (23) для функции $\alpha_{e\varphi}(r, t)$ получим соотношение вида

$$\frac{2a_\varphi}{r} \left(\frac{\partial \alpha_{e\varphi}}{\partial r} - \frac{\alpha_{e\varphi}}{r} \right) = \frac{\partial b_\varphi}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial r u_{er} b_\varphi}{\partial r}.$$

Из этого соотношения, полагая, что $\alpha_{e\varphi}(r=0, t) = 0$, можно численно или аналитически определить функцию $\alpha_{e\varphi}(r, t)$ и по формуле (29) вычислить $\alpha_\varphi(r, t)$.

Приведем результаты изложенного выше подхода для случая, когда магнитное поле имеет вид

$$B_r = (1 - e^{-\alpha r^2/t^2}) \cos \theta; \quad B_\theta = - \left[1 + \left(\alpha \frac{r^2}{t^2} - 1 \right) e^{-\alpha r^2/t^2} \right] \sin \theta; \quad B_\varphi = B_{\varphi 0} \frac{r^2 t}{2} e^{-\beta r/t} \sin \theta \cos \theta, \quad (30)$$

где $\alpha, \beta, B_{\varphi 0}$ — некоторые параметры; в этом случае $A_\varphi = \frac{r}{2} (1 - e^{-\alpha r^2/t^2}) \sin \theta$. Отметим, что если построить проекции силовых линий этого поля на плоскость $\varphi = \text{const}$, то их распределение будет качественно согласовываться с распределением проекций силовых линий в задачах, рассмотренных в работах [4, 6].

В этом случае компоненты скорости ионов определяются функциями вида

$$\begin{aligned} u_r &= \alpha_r - \frac{3}{2} \sin^2 \theta B_{\varphi 0} \frac{rt}{M^2 q n_e} e^{-\beta r/t}; \quad u_\theta = \frac{B_{\varphi 0}}{M^2 q n_e} \frac{rt}{2} e^{-\beta r/t} \left(\beta \frac{r}{t} - 3 \right) \sin \theta \cos \theta; \\ u_\varphi &= \left[\tilde{\alpha}_\varphi + \frac{e^{-\alpha r^2/t^2}}{M^2 q n_e} \alpha \frac{r}{t^2} \left(2\alpha \frac{r^2}{t^2} - 5 \right) \right] \sin \theta, \end{aligned} \quad (31)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_r &= \frac{\alpha \frac{r^3}{t^3} e^{-\alpha r^2/t^2}}{1 + \left(\alpha \frac{r^2}{t^2} - 1 \right) e^{-\alpha r^2/t^2}} + B_{\varphi 0} \frac{rt}{M^2 q n_e} e^{-\beta r/t}; \\ \tilde{\alpha}_\varphi &= -r B_{\varphi 0} \int_r^\infty \frac{e^{-\beta r/t}}{1 - e^{-\alpha r^2/t^2}} \left[\frac{r}{2} \left(1 + \beta \frac{r}{t} \right) + \frac{3}{2} u_{er} t \left(1 - \frac{\beta r}{t} \right) + \frac{r}{2} t \frac{\partial u_{er}}{\partial r} \right] dr; \\ u_{er} &= \frac{\alpha \frac{r^3}{t^3} e^{-\alpha r^2/t^2}}{1 + \left(\alpha \frac{r^2}{t^2} - 1 \right) e^{-\alpha r^2/t^2}}. \end{aligned}$$

Решение (30) не зависит ни от значений M^2, q , ни от концентрации электронов $n_e(r, t)$. Задавая в тестируемой программе движение ионов согласно (31), можно, сравнивая численное решение и решение (30), получить представление о свойствах разностной схемы решения уравнений (4), (5).

Замечание 2. Как это обычно принято в гибридных моделях плазмы, плотность заряда электронов полагается равной суммарной плотности зарядов ионов (см. формулы (3)), поэтому непосредственно само уравнение непрерывности для концентрации электронов в этих моделях не используется. Если бы оно применялось наряду с другими уравнениями электронной гидродинамики, то и тогда можно было бы воспользоваться полученными выше результатами. Однако при этом пришлось бы добавить в уравнение непрерывности фиктивный источник электронов, поскольку в рассмотренной выше модельной задаче концентрация электронов является заранее задаваемой функцией.

Заключение

В данной работе приведены аналитические решения двух модельных задач, а именно аналитическое описание поведения средних величин для ансамбля ионов при их движении в заданном однородном магнитном поле и аналитическое решение модельной задачи для нелинейной системы уравнений электронной гидродинамики и уравнений Максвелла в случае идеально проводящей плазмы. Эти решения могут быть использованы при тестировании прикладных программ, реализующих гибридную модель плазмы.

Отметим, что аналитическое решение для двумерной нелинейной системы уравнений электронной гидродинамики и уравнений Максвелла, найденное в данной работе для сферической системы координат, несложно переписать для декартовых координат и получить в результате представительный тест для программ, предназначенных для численного моделирования динамики плазмы в трехмерной геометрии.

Список литературы

1. *Chodura R. A.* Hybrid-fluid-particle model of ion heating in high-max-number shock waves // *Nucl. Fusion*. 1975. Vol. 15. P. 55—61.
2. *Sgro A. G., Nielson C. W.* Hybrid model studies of ion dynamics and magnetic field diffusion during pinch implosion // *Phys. Fluids*. 1976. Vol. 19, No 1. P. 126—133.
3. *Голубев А. И., Соловьёв А. А., Терёхин В. А.* О бесстолкновительном разлете ионизованного облака в однородную замагниченную плазму // *ПМТФ*. 1978. № 5. С. 33—42.
4. *Башурин В. П., Голубев А. И., Терёхин В. А.* О бесстолкновительном торможении ионизованного облака, разлетающегося в однородную замагниченную плазму // Там же. 1983. № 5. С. 10—17.
5. *Гаранин С. Ф., Голубев А. И., Исмаилова Н. А.* Двумерное моделирование перпендикулярной бесстолкновительной ударной волны // *Физика плазмы*. 2000. Т. 26, № 5. С. 426—433.
6. *Winske D., Gary P. S.* Hybrid simulation of debris-ambient ion interactions in astrophysical explosions // *J. Geophys. Res.* 2007. Vol. 112. P. A10303(1—11).
7. *Антонов В. М., Башурин В. П., Голубев А. И. и др.* Экспериментальное исследование бесстолкновительного взаимодействия сверхальфвеновских взаимопроникающих потоков плазмы // *ПМТФ*. 1985. № 6. С. 3—9.
8. *Антонов В. М., Башурин В. П., Голубев А. И. и др.* Исследование взаимодействия потоков бесстолкновительной плазмы при больших числах Альфвена—Маха // *Докл. АН СССР*. 1986. Т. 289, № 1. С. 72—75.
9. *Delamere P. A., Swift D. W., Stenbaek-Nielson H. C.* A three-dimensional hybrid code simulation of the december 1984 solar wind AMPTE release // *Geophys. Res. Letters*. 1999. Vol. 26, No 18. P. 2837—2840.
10. *De Bartolo R., Greco A., Veltri P.* A 3D kinetic-fluid numerical code for stationary equilibrium states in magnetized plasmas // *Comput. Phys. Commun.* 2008. Vol. 178. P. 647—664.
11. *Бэдсел Ч., Ленгдон А.* Физика плазмы и численное моделирование. М.: Энергоатомиздат, 1989.
12. *Голубев А. И., Соловьёв А. А.* Алгоритм численного решения задачи о сильном взрыве в разреженной плазме // *Числ. методы мех. спл. среды*. 1979. Т. 10, № 4. С. 23—41.
13. *Harned D. S.* Quasineutral hybrid simulation of macroscopic plasma phenomena // *J. Comput. Phys.* 1982. Vol. 47, No 3. P. 452—462.
14. *Matthews A. P.* Current advance method and cyclic leapfrog for 2D multispecies hybrid plasma simulations // *Ibid.* 1994. Vol. 112, No 1. P. 102—116.
15. *Башурин В. П., Голубев А. И., Шагалиева В. С.* О численном решении уравнений электронной гидродинамики при высокой замагниченности электронов // *Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов*. 1995. Вып. 3. С. 20—24.
16. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. М.: Наука, 1967.
17. *Коган М. Н.* Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1967.
18. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1977.

19. *Голубев А. И.* Некоторые вопросы методики численного моделирования двумерных течений бесстолкновительной замагниченной плазмы // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1982. Вып. 1(9). С. 24–27.

Статья поступила в редакцию 09.03.11.
