

УДК 517.958 + 519.64

К ДОКАЗАТЕЛЬСТВУ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА И ИНТЕГРАЛЬНОГО ТРАНСПОРТНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА УРАВНЕНИЯ ПАЙЕРЛСА

А. Н. Субботин
(РФЯЦ-ВНИИЭФ)

Приводится нетрадиционный вывод линейного интегродифференциального кинетического уравнения Больцмана из интегрального транспортного уравнения типа уравнения Пайерлса. Обсуждается *геометрический* смысл различных форм уравнения переноса, получаемых в процессе преобразований.

Ключевые слова: линейная теория переноса, линейное интегродифференциальное кинетическое уравнение, интегральное уравнение переноса частиц.

Введение

В линейной теории переноса частиц основным объектом изучения является интегродифференциальное кинетическое уравнение, часто называемое линейным уравнением Больцмана [1–7]. Построение некоторых схем математического моделирования процессов переноса, например, построение оценок в методе Монте-Карло [7–9] или численные расчеты переноса теплового излучения [10–12] основываются на интегральной форме уравнения переноса типа уравнения Пайерлса [13]. Как правило, обоснование эквивалентности этих двух форм уравнения переноса ведется по схеме вывода интегрального уравнения из интегродифференциального. Обратный переход, достаточно обычный для нелинейной теории [14], в литературе по линейной теории практически не встречается. В статье Алвина М. Вейнберга [3] имеется замечание, что обратный переход не представляет труда. Однако указание Вейнберга продифференцировать по t нестационарное интегральное уравнение трудно с математической точки зрения признать полным и строгим выводом уравнения. Особое место в теории переноса занимает развитая М. В. Масленниковым аксиоматическая модель явлений переноса, начинающаяся с вывода соотношения баланса частиц в конечном фазовом объеме [15]. Это так называемое обобщенное интегральное уравнение переноса непосредственно связывает физически наблюдаемые величины. Из такого интегрального соотношения при дополнительных предположениях следует вывод дифференциальной формы уравнения переноса, которое в простейшем частном случае совпадает с классическим линейным кинетическим уравнением. Аксиоматический подход требует виртуозного владения аппаратом теории меры. При этом М. В. Масленников подчеркивает, что "судьба отдельной частицы в конечном итоге нас интересовать не будет" и при построении обобщенной теории вероятностные понятия используются время от времени "лишь во вспомогательных рассуждениях и наводящих соображениях на физическом уровне строгости". В работах [10–12] вопрос об эквивалентности так называемого *дополнительного* интегрального уравнения интегродифференциальному уравнению вообще был оставлен открытым.

В статье построен переход от интегрального транспортного уравнения к линейному интегродифференциальному кинетическому уравнению. Первый раздел содержит предварительные сведения из линейной теории переноса частиц. Процессы, описываемые уравнениями переноса, являются по существу вероятностными. В статье использование вероятностной теории не выходит за рамки понятия плотности распределения случайной величины. Предполагается, что все рассматриваемые

функции *хорошие* и допускают законность всех преобразований. Сам результат преобразований не является неожиданным, и интересен скорее путь доказательства и получаемые "попутно" известные формы интегрального уравнения, имеющие прозрачный физический и вероятностный смысл. Сопоставление смысла интегрального уравнения для плотности эмиссии частиц с комментарием работ [10–12] к методу коэффициентов ослабления позволяет утверждать, что в этих работах реализована явная схема решения интегрального транспортного уравнения для эмиссии частиц.

1. Основные физические предположения линейной теории переноса. Разложение решения уравнения переноса в ряд Неймана

В классической линейной теории переноса интегродифференциальное кинетическое уравнение для плотности одного типа нейтральных частиц (нейтронов, гамма-квантов) в предположении отсутствия размножения можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n(t, \vec{r}, \vec{\omega}, V)}{\partial t} + V\vec{\omega} \cdot \nabla n(t, \vec{r}, \vec{\omega}, V) + V\Sigma(\vec{r}, V)n(t, \vec{r}, \vec{\omega}, V) = \\ = \int V'\Sigma(\vec{r}, V')n(t, \vec{r}, \vec{\omega}', V')C(\vec{r}; \vec{\omega}', V' \rightarrow \vec{\omega}, V)d\vec{\omega}'dV' + n_0(t, \vec{r}, \vec{\omega}, V). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $n(t, \vec{r}, \vec{\omega}, V)$ — плотность частиц, имеющих в момент времени t в точке \vec{r} скорость V в направлении $\vec{\omega}^1$; $\nabla n(t, \vec{r}, \vec{\omega}, V) = \frac{dn}{d\vec{r}}$ — градиент плотности по пространственным (конфигурационным) переменным; $\Sigma(\vec{r}, V)$ — полное макроскопическое сечение; $C(\vec{r}; \vec{\omega}', V' \rightarrow \vec{\omega}, V)$ — плотность распределения новых параметров $(\vec{\omega}, V)$ состояния частицы при условии, что частица столкнулась в точке $(\vec{r}, \vec{\omega}', V')$; $n_0(t, \vec{r}, \vec{\omega}, V)$ — плотность частиц, испущенных независимыми источниками.

Основные идеализирующие предположения для вывода уравнения (1):

1. Частица рассматривается как классическая точечная частица, для которой в любой момент времени полностью определено положение в пространстве координат и скоростей.
2. Вероятности всех элементарных актов взаимодействия частицы с веществом среды не зависят от предыстории и определяются природой этой частицы и свойствами вещества.
3. Вторичные частицы, возникающие в результате взаимодействия, рождаются в той же точке пространства, где произошло столкновение.
4. Частица между столкновениями движется прямолинейно и равномерно.
5. Среда изотропна, находится в стационарном состоянии, и столкновения частиц с веществом не меняют этого состояния.
6. Концентрация частиц в среде мала настолько, что вероятность взаимодействия их друг с другом пренебрежимо мала.
7. Функцию распределения числа частиц в элементе фазового объема можно описывать плотностью частиц $n(x)$ в точке x непрерывного фазового пространства: $N(dx) = n(x)dx$.

В этих предположениях уравнение (1) в математической физике получается предельным переходом $\Delta\vec{r} \rightarrow 0$, $\Delta t \rightarrow 0$ (дифференцируемость предполагается) из уравнения для изменений, происходящих в балансе коллектива частиц в момент t около точки шестимерного фазового пространства $(\vec{r}, \vec{\omega}, V)$ в малом объеме $\Delta\vec{r} \subset R^3$ трехмерного конфигурационного пространства за малый промежуток времени Δt [1–6]. Левая часть уравнения (1) отражает убыль частиц за счет свободного движения и столкновений (поглощения и рассеяния) с веществом среды, правая часть — прибыль за счет столкновений и за счет источников, работа которых определена независимо от решения уравнения. Часто это уравнение называется линейным уравнением Больцмана, поскольку в кинетической теории жидкостей и газов оно может быть получено из уравнения Больцмана для бинарной смеси в предположении, что "один из компонентов имеет очень малую плотность, так что столкновениями

¹ $(\vec{r}, \vec{V}) = (\vec{r}, \vec{\omega}, V)$ является обычным набором фазовых координат для нейтронов. Для фотонов, скорость которых постоянна и равна скорости света, естественным является набор $(\vec{r}, \vec{\omega}, E)$, где E — энергия частицы. Соответственно интегрирование по V заменяется интегрированием по E .

его частиц между собой можно пренебрегать по сравнению со столкновениями с частицами другого компонента" [16].

Переход к линейному уравнению, существенно более простому по сравнению с уравнением Больцмана для теории газов, возможен, если судьба одной частицы никак не влияет на судьбу другой. Такая независимость судеб обеспечивается предположениями 5 и 6. Предположение 6 о пренебрежимо малом вкладе в физику явления взаимных столкновений частиц хорошо согласуется с разреженностью потока частиц в практических задачах. Предположение 5 означает, что уравнение баланса частиц (1) не отражает баланса энергии при столкновениях частицы с веществом среды и не учитывает динамику среды.

Отметим простое, но важное обстоятельство. Линейность уравнения (1) позволяет его нормировать так, чтобы независимый источник был нормирован на одну частицу: $\int n_0(t, \vec{r}, \vec{\omega}, V) dt d\vec{r} d\vec{\omega} dV = 1$. После такой нормировки это уравнение можно рассматривать как уравнение для вероятностного процесса блуждания одной частицы. Предположение 2 означает, что процесс блуждания отдельной частицы является марковским процессом [17].

В вероятностной теории марковская, или цепная, зависимость является естественным обобщением понятия независимости. Марковское свойство процесса характеризуется отсутствием последействия или отсутствием памяти (lack of memory) и означает, что любая информация о прошлом процесса не меняет условной вероятности событий, относящихся к будущему. В эволюционной кинетической теории это соответствует предположению, что в каждый момент времени блуждание частицы полностью определяется условиями в этот момент, без учета предыстории. Выполнение марковского свойства существенно зависит от выбора фазового пространства. Удачный выбор фазового пространства может превратить случайный процесс в марковский. Так, движение частицы, находящейся в точке \vec{r} , зависит от скорости \vec{V} , которая определяется предысторией. При введении скорости в набор фазовых координат формально убирается эта зависимость от прошлого и рассматриваемый процесс превращается в марковский. В статье свойство марковости используется практически лишь для того, чтобы вероятность сложного события можно было представить произведением вероятностей последовательно происходящих составляющих событий.

Перечисленные предположения позволяют получить другое линейное уравнение — интегральное уравнение типа уравнения Пайерлса [13] для плотности числа столкновений частиц. В наиболее общей форме это уравнение имеет вид интегрального уравнения Фредгольма второго рода:

$$p(x) = p_1(x) + \int_X p(x') p(x' \rightarrow x) dx'. \quad (2)$$

Для интерпретации этого уравнения как уравнения для плотности столкновений частиц необходимо придать физический смысл переменным, наложив на них некоторые ограничения:

$X = \{x\}$ — фазовое пространство состояний частиц (как правило, $X = R^n$);

dx — мера Лебега в пространстве состояний X ;

$p_1(x)$ — плотность первых (после рождения в источнике) столкновений частиц в точке x (в состоянии x), $p_1(x) \geq 0$;

$p(x)$ — плотность всех (первых, вторых и т. д.) столкновений в точке x , $p(x) \geq 0$;

$p(x' \rightarrow x)$ — плотность вероятности перехода частицы из состояния x' в состояние x без промежуточных столкновений за шаг; $p(x' \rightarrow x) \geq 0$; $\int_X p(x' \rightarrow x) dx = 1 - p_c(x') \leq 1$. Функция

$p_c(x') = 1 - \int_X p(x' \rightarrow x) dx \geq 0$ называется вероятностью поглощения (capture) в точке x' . В отличие от уравнения (2) в этом определении поглощения интегрирование ведется по второму аргументу переходной вероятности².

²Неравенство $\int_X p(x' \rightarrow x) dx \leq 1$ справедливо в отсутствие размножений частиц в акте столкновения. Стрелка в записи $(x' \rightarrow x)$ двух аргументов функции $p(x' \rightarrow x)$ по сравнению с записью $p(x', x)$ наглядно передает физический смысл этих аргументов (естественная упорядоченность точек двух последовательных столкновений). Заметим, что для физических терминов (фазовое пространство, частица, столкновение, макроскопическое сечение) здесь и далее используется формальное математическое определение понятия. Это соответствует цели заниматься математической моделью, не претендуя на углубление в физику явлений.

Другие дополнительные предположения и определения, в частности связь между плотностью частиц $n(t, \vec{r}, \vec{\omega}, V)$ и плотностью столкновений частиц $p(x)$, будут вводиться по мере необходимости при проведении преобразований уравнений.

Если записать уравнение (2) в операторной форме

$$p = p_1 + Kp, \quad (3)$$

где K — линейный интегральный оператор, действующий в некотором банаховом пространстве L интегрируемых по Лебегу функций $p(x)$: $K \in \{L \rightarrow L\}$, $L = \{p(x)\}$, то решение уравнения (3) можно формально представить разложением в ряд Неймана: $p = (1 - K)^{-1}p_1 = p_1 + Kp_1 + K^2p_1 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} K^n p_1$. Здесь $[K^n p_1](x) = \int \dots \int_X p_1(x_1)p(x_1 \rightarrow x_2) \dots p(x_n \rightarrow x) dx_1 \dots dx_n$, ($n \geq 1$); $[K^0 p_1](x) = p_1(x)$. В теории переноса обычно полагают $L = L_1$ с нормой $\|p(x)\| = \int_X |p(x)| dx$. Предполагают, что для $\|K\| \leq \sup_x \int_X |p(x' \rightarrow x)| dx'$ выполнены условия сходимости ряда. Легко показать, что для сходимости ряда достаточно выполнение условия $\|K^m\| < 1$, где m — некоторое натуральное число [9, 17]. В прикладных задачах сходимость ряда Неймана и, следовательно, существование решения уравнения (2) обеспечиваются наличием поглощения, конечностью размеров системы и т. п. Формально решение уравнения (3) можно получить методом последовательных приближений, начиная с некоторого $P^{(0)}$: $P^{(N+1)} = p_1 + KP^{(N)}$. Эти итерации эквивалентны оценке решения по первым N членам ряда Неймана: $p_1 + KP^{(N)} = (I + K + K^2 + \dots + K^N)p_1 + K^{N+1}(P^{(0)})$. Если при $N \rightarrow \infty$ выполнены условия сходимости, то погрешность определяется формулой $P^{(N)} - p = K^N(P^{(0)} - p)$ [18]. При нормировке источника на 1 и отсутствии размножения члены ряда Неймана имеют прозрачный физический и вероятностный смысл: n -й член ряда — это рассчитанная на одну среднюю частицу источника плотность вероятности n -го (после рождения в источнике) столкновения в точке x :

$$p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(x) = p_1(x) + p_2(x) + \dots + p_n(x) + \dots$$

2. Полное макроскопическое сечение. Плотность распределения длины свободного пробега частицы. Оптическое расстояние между точками

Для перехода от уравнения (2) к уравнению (1) необходимо конкретизировать вид ядра интегрального оператора уравнения (2), определив пространство состояний частицы и вероятностный механизм перескоков частицы из одного состояния в другое в согласии с основными предположениями линейной теории переноса, перечисленными в разд. 1.

Сначала рассмотрим стационарную задачу, в которой в уравнении (1) плотность частиц не зависит от времени. Состояние частицы x — набор координат фазового пространства $X = R^3 \times R^3$ — будем обозначать (\vec{r}, \vec{V}) либо $(\vec{r}, \vec{\omega}, V)$, где \vec{r} — радиус-вектор положения частицы в пространстве R^3 ; \vec{V} — вектор скорости; $\vec{\omega}$ — единичный вектор направления полета; V — модуль скорости. Интегрирование по всему фазовому пространству $X = R^3 \times R^3$ будем обозначать двумя знаками интеграла подряд, а интегрирование по R^3 или по R^1 — одним знаком интеграла.

Предположим, что ядро $p(x' \rightarrow x)$ интегрального уравнения (2) — плотность вероятности перехода частицы из состояния x' в состояние x — представимо суперпозицией двух функций: $p(x' \rightarrow x) = [T \circ C](x') = T(C(x'))$. Здесь столкновительная функция C меняет параметры состояния частицы в акте столкновения, а транспортная функция T меняет параметры состояния в результате прямолинейного движения частицы после столкновения [7]. Вероятностный смысл этих функций: C — условная плотность распределения новых параметров $(\vec{\omega}, V)$ при условии столкновения в точке $x' = (\vec{r}', \vec{\omega}', V')$; T — условная плотность распределения очередной пространственной точки столкновения \vec{r} при условии, что после столкновения в точке \vec{r}' частица летит в направлении $\vec{\omega}$ с постоянной

скоростью V . Опираясь на марковское свойство независимости прошлого и будущего, $p(x' \rightarrow x)$ можно записать в виде произведения этих плотностей:

$$p(x' \rightarrow x) = T(C(x')) = C(\vec{V}' \rightarrow \vec{V} | \vec{r}') T(\vec{r}' \rightarrow \vec{r} | \vec{V}). \quad (4)$$

Термин *суперпозиция* подчеркивает некоммутативность умножения функций C и T , переводящих x' в x . Заметим, что запись правой части соотношения (4) означает, что первой на x' действует функция C .

Физически реальный смысл уравнение переноса приобретает, когда функции T и C определяются эффективными макроскопическими сечениями взаимодействия частиц со средой — полным и дифференциальным. Обратим внимание на то, что для вывода уравнения (1) из уравнения (2) явный вид дифференциального сечения, т. е. функции C , не существует. Достаточно чтобы функция C удовлетворяла требованиям ограниченности, дифференцируемости и т. п., необходимым для математической корректности преобразований, связанных с этим выводом.

Явный вид функции T , имеющей смысл плотности распределения длины свободного пробега частицы, вытекает из следующего вероятностного определения полного макроскопического сечения $\Sigma(\vec{r}, V)$ для изотропной среды, т. е. в предположении, что $\Sigma(\vec{r}, V)$ не зависит от направления полета $\vec{\omega}$.

Определение. Вероятность того, что частица, долетевшая без столкновений до точки \vec{r} со скоростью \vec{V} , испытает столкновение в малом интервале $(\vec{r}, \vec{r} + \vec{V}\Delta t)$, равна $\Sigma(\vec{r}, V)\Delta s + o(\Delta s)$, где расстояние $\Delta s = V\Delta t$.

Обозначим через ξ случайную длину свободного пробега частицы от точки \vec{r}' до точки \vec{r} в направлении $\vec{\omega}$ (рис. 1).

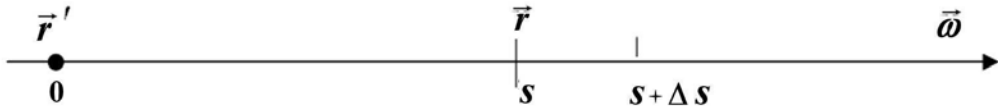


Рис. 1. Свободный пробег частицы от точки \vec{r}' в направлении $\vec{\omega}$

Из приведенного выше определения полного сечения $\Sigma(\vec{r}, V)$ получаем уравнение для функции распределения $F_\xi(s) = P\{\xi \leq s\} = F(s)$ случайной величины ξ при $s \geq 0$:

$$P\{\xi \in (s, s + \Delta s)\} \equiv F(s + \Delta s) - F(s) = (1 - F(s))(\Sigma(s)\Delta s + o(\Delta s)).$$

В правой части последнего равенства первый множитель $1 - F(s) = P\{\xi > s\}$ есть вероятность пролететь без столкновения расстояние s от точки \vec{r}' , второй множитель — вероятность столкнуться в интервале $(s, s + \Delta s)$. В этом представлении вероятности сложного события в виде произведения вероятностей опять использовано марковское свойство условной независимости прошлого и будущего при фиксированном настоящем. Разделив обе части последнего равенства на Δs и перейдя к пределу при $\Delta s \rightarrow 0$, получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dF}{ds} = (1 - F(s)) \Sigma(s)$$

с начальным условием $F(0) = 0$. Решение этого уравнения $F(s) = 1 - \exp\left(-\int_0^s \Sigma(l)dl\right)$. Отсюда плотность распределения случайной длины свободного пробега

$$p_\xi(s) = \begin{cases} \frac{dF}{ds} = \Sigma(s) \exp\left(-\int_0^s \Sigma(l)dl\right) & \text{при } s \geq 0; \\ 0 & \text{при } s < 0. \end{cases} \quad (5)$$

Такое распределение пробега (5) означает, что в форме интегрирования вдоль луча от фиксированной точки \vec{r} до точки \vec{r}' (в направлении, противоположном направлению $\vec{\omega}$) функция $T(\vec{r}' \rightarrow \vec{r} | \vec{\omega}, V)$ имеет следующий вид:

$$T(\vec{r}' \rightarrow \vec{r} | \vec{\omega}, V) = \Sigma(\vec{r}, V) \exp\left(-\int_0^s \Sigma(\vec{r} - l\vec{\omega}, V) dl\right), \quad (6)$$

где $\vec{r} = \vec{r}' + \vec{\omega}s$, $s = |\vec{r}' - \vec{r}|$.

Величина $\tau(\vec{r}', \vec{r}) = \int_0^s \Sigma(\vec{r} - l\vec{\omega}) dl$, где $s = |\vec{r}' - \vec{r}|$, $\vec{\omega} = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$, называется *оптическим расстоянием* между точками \vec{r}' и \vec{r} . Если вдоль направления $\vec{\omega}$ между точками \vec{r}' и \vec{r} полное сечение не меняется, т. е. $\Sigma(s) = \text{const} = \Sigma$ (случай однородной среды), оптическое расстояние $\tau(\vec{r}', \vec{r}) = \Sigma|\vec{r}' - \vec{r}|$.

В однородной среде ($\Sigma = \text{const}$) формулы для функции распределения и плотности распределения длины свободного пробега приобретают простой вид: $F_\xi(s) = 1 - e^{-\Sigma s}$; $p_\xi(s) = \Sigma e^{-\Sigma s}$. В случае бесконечной однородной среды несложные вычисления позволяют получить следующее известное соотношение между математическим ожиданием длины l свободного пробега в направлении $\vec{\omega}$ и полным макроскопическим сечением Σ :

$$l = E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} s p_\xi(s) ds = \int_0^{\infty} s \Sigma e^{-\Sigma s} ds = \frac{1}{\Sigma}.$$

3. Переход от интегрирования по объему к интегрированию вдоль луча.

Интегральное уравнение переноса в форме интегрирования вдоль луча

Определение функции T как плотности распределения длины свободного пробега позволяет следующим образом выразить плотность распределения первых столкновений $p_1(\vec{r}, \vec{V})$ через плотность частиц независимого источника $n_0(\vec{r}, \vec{V})$:

$$p_1(\vec{r}, \vec{V}) = \int n_0(\vec{r}', \vec{V}') T(\vec{r}' \rightarrow \vec{r} | \vec{V}') d\vec{r}' \quad (7)$$

Подставив $p_1(\vec{r}, \vec{V})$ из (7) и $p(x' \rightarrow x)$ из (4) в уравнение (2), получим:

$$p(\vec{r}, \vec{V}) = \int n_0(\vec{r}', \vec{V}') T(\vec{r}' \rightarrow \vec{r} | \vec{V}') d\vec{r}' + \int \int p(\vec{r}', \vec{V}') C(\vec{V}' \rightarrow \vec{V} | \vec{r}') T(\vec{r}' \rightarrow \vec{r} | \vec{V}') d\vec{V}' d\vec{r}'. \quad (8)$$

Когда система определена в ограниченной области пространства R^3 , *естественные* граничные условия — внешний поток частиц с поверхности внутрь системы — можно рассматривать в качестве источников. Для существования T на любом отрезке (\vec{r}', \vec{r}) требуется выпуклость множества точек \vec{r} , образующих ограниченную систему. Для решения задач методом Монте-Карло обычно не представляет трудностей "аккуратная" трактовка условий на границах невыпуклой системы. Например, можно невыпуклую систему окружить сферой с большим радиусом \vec{R} , область между внутренней границей этой сферы и границей системы считать вакуумом, а область вне этой сферы трактовать как поглощающую: $p_c(\vec{r}, \vec{V}) = 1$ при $\vec{r} \geq \vec{R}$. В работах [10–12] проблема невыпуклости изящно решается методом коэффициентов видимости.

Важную роль в выводе уравнения (1) из уравнения (8) играет форма интегрального уравнения, в которой интегрирование по объему конфигурационного пространства заменено интегрированием

вдоль луча. Возможность перехода к такой форме уравнения следует из определения функции T , которая в уравнении (8) описывает прямолинейное движение между двумя последовательными столкновениями в точках \vec{r}' и \vec{r} . При записи уравнения в форме (8) связь между направлением прямолинейного движения $\vec{\omega} = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$ и вектором $\vec{r} - \vec{r}'$ выражается в том, что функция T в подынтегральном выражении содержит δ -функцию $\delta\left(\vec{\omega} - \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\right)$, из-за которой уравнение (8) называется интегральным уравнением переноса с обобщенным ядром [9].

Переход от уравнения (8) с интегрированием по объему к уравнению с интегрированием вдоль луча (и обратный переход) основан на справедливости следующего интегрального равенства [6]:

$$\int_{W \in R^3} f(\vec{r}', \vec{r}, \vec{\omega}) \delta\left(\vec{\omega} - \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\right) \frac{1}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|^2} d\vec{r}' = \int_0^{l_0} f((\vec{r} - l\vec{\omega}), \vec{r}, \vec{\omega}) dl. \quad (9)$$

Обратим внимание на смысл обозначений в равенстве (9). Здесь $f(\vec{r}', \vec{r}, \vec{\omega})$ рассматривается как интегрируемая по переменной \vec{r}' функция при фиксированных значениях \vec{r} и $\vec{\omega}$. При фиксированных \vec{r} и $\vec{\omega}$ δ -функция связывает переменную точку \vec{r}' объема W с переменной интегрирования l луча: $\vec{r}' = \vec{r} - l\vec{\omega}$. Верхний предел интегрирования по переменной l , обозначенный в правой части равенства (9) как l_0 (l_0 может быть равен ∞), равен расстоянию от фиксированной точки \vec{r}' пространства R^3 до точки пересечения луча $\vec{r} - l\vec{\omega}$ с внешней границей ограниченной области интегрирования W . Расстояние $l \geq 0$ измеряется в направлении, противоположном фиксированному направлению $\vec{\omega}$. Наличие δ -функции означает, что вклад в интеграл в левой части равенства при интегрировании по всей области W пространства R^3 дают лишь точки луча $\vec{r} - l\vec{\omega}$.

Формальное доказательство равенства (9) следует из определения δ -функции на вероятностном пространстве направлений Ω ($\int_{\Omega} f d\vec{\omega} = 1$) как меры Дирака $\delta(\vec{\omega}_0) d\vec{\omega}$, сосредоточенной в точке $\vec{\omega}_0$ так,

$$\int_B \delta(\vec{\omega}_0) d\vec{\omega} = \begin{cases} 1, & \text{если } \vec{\omega}_0 \in B; \\ 0, & \text{если } \vec{\omega}_0 \notin B \end{cases} \quad \text{для любой измеримой области } B \subseteq \Omega \text{ [19].}$$

Для вещественной прямой R^1 это соответствует определению δ -функции в качестве линейного функционала на пространстве функций $f(x)$ такого, что $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0)$.

Для доказательства перейдем от координат с центром $\vec{r} = 0$ к сферической системе координат (l, ψ, θ) с центром в фиксированной точке \vec{r} [6]. В этой вспомогательной системе \vec{l} — радиус-вектор точки \vec{r}' , $l = |\vec{r} - \vec{r}'|$; $d\vec{r}' = dl \cdot l \cdot d\theta \cdot l \cdot \sin\theta \cdot d\psi$ — элемент объема около \vec{r}' . Углы — полярный θ и азимутальный ψ , $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \psi \leq 2\pi$ — определяют направление $\vec{\omega}' = \frac{\vec{l}}{l} = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{l}$ от фиксированной точки \vec{r} к точке \vec{r}' . Отсюда в координатах $(l, \vec{\omega}')$ $\vec{r}'(l, \vec{\omega}') = \vec{r} - l\vec{\omega}'$, и при нормировке меры $d\vec{\omega}'$ телесного угла на 1 $\left(\int_{\Omega} d\vec{\omega}' = 1\right)$ получим $d\vec{r}' = dl \cdot 4\pi \cdot l^2 \cdot d\vec{\omega}'$. По теореме Фубини левая часть равенства (9) превращается в повторный интеграл по l и $\vec{\omega}'$ от функции $f((\vec{r} - l\vec{\omega}'), \vec{r}, \vec{\omega})$. После интегрирования по $\vec{\omega}'$ с подстановкой по определению δ -функции $\vec{\omega}' = \vec{\omega}$ и очевидных сокращений этот интеграл равен интегралу по l в правой части (9).

На основании равенства (9) в дальнейших преобразованиях применяются две эквивалентные формы записи соотношений. Интегрирование по объему с короткой записью $T(\vec{r}' \rightarrow \vec{r} | \vec{V})$ неявно подразумевает зависимость функции T от полного сечения $\Sigma(\vec{r}, V)$, наличие в подынтегральном выражении множителя $\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2}$ и δ -функции $\delta\left(\vec{\omega} - \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\right)$. Длинная запись T в виде (6) с явно выраженной зависимостью от полного сечения (но без этого множителя и δ -функции) используется при переходе к интегрированию вдоль луча согласно (9).

Введем плотность потока частиц $\varphi(\vec{r}, \vec{V})$, связанную с плотностью частиц $n(\vec{r}, \vec{V})$ и плотностью столкновений $p(\vec{r}, \vec{V})$ формулами

$$\varphi(\vec{r}, \vec{V}) = Vn(\vec{r}, \vec{V}); \quad (10)$$

$$p(\vec{r}, \vec{V}) = \Sigma(\vec{r}, V)\varphi(\vec{r}, \vec{V}) = \Sigma(\vec{r}, V)Vn(\vec{r}, \vec{V}). \quad (11)$$

Введем плотность эмиссии частиц:

$$\chi(\vec{r}, \vec{V}) = n_0(\vec{r}, \vec{V}) + \int p(\vec{r}, \vec{V}')C(\vec{V}' \rightarrow \vec{V} | \vec{r})d\vec{V}'. \quad (12)$$

Пользуясь определением (12), уравнение (8) можно записать в виде

$$p(\vec{r}, \vec{V}) = \int \chi(\vec{r}', \vec{V})T(\vec{r}' \rightarrow \vec{r} | \vec{V})d\vec{r}'. \quad (13)$$

Пользуясь по определению (11) связью плотности столкновений с плотностью потока $p(\vec{r}, \vec{V}) = \Sigma(\vec{r}, V)\varphi(\vec{r}, \vec{V})$ и подставляя в соответствии с равенством (9) в уравнение (13) вид функции $T(\vec{r}' \rightarrow \vec{r} | \vec{V}) = \Sigma(\vec{r}, V)\exp\left(-\int_0^s \Sigma(\vec{r} - l\vec{\omega}, V)dl\right)$ в форме (6) интегрирования вдоль луча, получаем уравнение

$$\varphi(\vec{r}, \vec{V}) = \int_0^{l_0} \chi(\vec{r} - s\vec{\omega}, \vec{V})\exp\left(-\int_0^s \Sigma(\vec{r} - l\vec{\omega}, V)dl\right)ds. \quad (14)$$

Уравнения (13), (14) имеют прозрачный физический смысл. Обсуждению геометрического смысла линейных уравнений переноса посвящен разд. 6.

Уравнения (13), (14) являются стационарными уравнениями³. Для получения нестационарных уравнений требуется кроме зависимости функций n, φ, χ от времени ввести в подынтегральное выражение уравнений (13), (14) δ -функцию $\delta\left(t' - \left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{V}\right)\right)$, которая при интегрировании по пространству и времени учитывает связь расстояния между точками \vec{r}' и \vec{r} со временем пролета частицей этого расстояния (время запаздывания):

$$p(t, \vec{r}, \vec{V}) = \int_{-\infty}^t \int \chi(t', \vec{r}', \vec{V})T(\vec{r}' \rightarrow \vec{r} | \vec{V})\delta\left(t' - \left(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{V}\right)\right)d\vec{r}'dt'. \quad (15)$$

Переходя к форме интегрирования вдоль луча и пользуясь по определению (11) связью $p(\vec{r}, \vec{V}) = \Sigma(\vec{r}, V)\varphi(\vec{r}, \vec{V})$, получаем нестационарное уравнение

$$\varphi\left(t, \vec{r}, \vec{V}\right) = \int_0^{l_0} \chi\left(t - \frac{s}{V}, \vec{r} - s\vec{\omega}, \vec{V}\right)\exp\left(-\int_0^s \Sigma(\vec{r} - l\vec{\omega}, V)dl\right)ds. \quad (16)$$

³Впервые в приближении изотропного источника и изотропности рассеяния интегральное уравнение вида (14) было получено в 1939 г. Рудольфом Пайерлсом для описания диффузии моноэнергетических нейтронов [13].

4. Вывод линейного интегродифференциального кинетического уравнения Больцмана из интегрального транспортного уравнения

В этом разделе дается достаточно прозрачный вывод интегродифференциального уравнения переноса из интегрального. Доказательство стартует от уравнения (14) и существенно использует *лучевую* форму записи этого интегрального уравнения. В (14) не трудно узнать уравнение, которое получается в процессе традиционного вывода интегрального уравнения из интегродифференциального. Например, это интегральное соотношение приведено под номером (1.27) на странице 22 одной из лучших книг по теории переноса нейтронов — книге Д. Белла и С. Глестона "Теория ядерных реакторов" [5].

Как написать интегральное уравнение (14) для фиксированного состояния, близкого к (\vec{r}, \vec{V}) ? Предположим, что (\vec{r}, \vec{V}) является внутренней точкой замкнутого множества состояний, для которых справедливо уравнение (14). Тогда можно выбрать h настолько малым, что точка (\vec{r}_1, \vec{V}) , где $\vec{r}_1 = \vec{r} - h\vec{\omega}$, принадлежит этому множеству состояний. Заметив, что точка \vec{r}_1 находится на луче $\vec{r} - s\vec{\omega}$, перейдем к записи уравнения (14) для фиксированного состояния (\vec{r}_1, \vec{V}) с интегрированием вдоль этого луча, приняв по-прежнему в качестве переменных интегрирования s и l , отсчитываемых от точки \vec{r} : $l_0 \geq s \geq l \geq h \geq 0$. Обратив внимание на изменившиеся пределы интегрирования при такой подстановке переменных в уравнение (14) для (\vec{r}_1, \vec{V}) , получим уравнение

$$\varphi(\vec{r} - h\vec{\omega}, \vec{V}) = \int_h^{l_0} \chi(\vec{r} - s\vec{\omega}, \vec{V}) \exp\left(-\int_h^s \Sigma(\vec{r} - l\vec{\omega}, V) dl\right) ds. \quad (17)$$

Рассматривая h в качестве непрерывного параметра, из уравнения (17) дифференцированием по h можно получить интегродифференциальное кинетическое уравнение (1), смысл которого состоит в описании локального изменения плотности частиц (или плотности потока). В предположении локальной дифференцируемости этой плотности продифференцируем по h обе части равенства (17). Найдя значения производных при $h = 0$, тем самым найдем производную функции $\varphi(\vec{r}, \vec{V})$ в точке \vec{r} по направлению $\vec{\omega}$:

$$\frac{d\varphi(\vec{r}(h))}{dh} = \frac{d\varphi(\vec{r} - h\vec{\omega})}{d\vec{r}} \frac{d(\vec{r} - h\vec{\omega})}{dh}; \quad \left. \frac{d\varphi}{dh} \right|_{h=0} = -\vec{\omega} \nabla \varphi(\vec{r}, \vec{V}).$$

Обозначим через $f(s, h)$ подынтегральную функцию в правой части равенства (17):

$$f(s, h) = \chi(\vec{r} - s\vec{\omega}, \vec{V}) \exp\left(-\int_h^s \Sigma(\vec{r} - l\vec{\omega}, V) dl\right)$$

и для $I(h) = \int_h^{l_0} f(s, h) ds$ воспользуемся известной формулой $\frac{dI}{dh} = \int_h^{l_0} f'_h(s, h) ds - f(h, h) \frac{dh}{dh}$ дифференцирования по параметру определенного интеграла, у которого подынтегральная функция и пределы интегрирования зависят от этого параметра:

$$f(h, h) = \chi(\vec{r} - h\vec{\omega}, \vec{V}) \exp\left(-\int_h^h \Sigma(\vec{r} - l\vec{\omega}, V) dl\right) = \chi(\vec{r} - h\vec{\omega}, \vec{V});$$

$$f'_h(s, h) = \chi(\vec{r} - s\vec{\omega}, \vec{V}) \exp\left(-\int_h^s \Sigma(\vec{r} - l\vec{\omega}, V) dl\right) \frac{d}{dh} \left(-\int_h^s \Sigma(\vec{r} - l\vec{\omega}, V) dl\right);$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dh} \int_h^s \Sigma(\vec{r} - l\vec{\omega}, V) dl &= -\Sigma(\vec{r} - h\vec{\omega}, V); \\ \int_h^{l_0} f'_h(s, h) ds &= \Sigma(\vec{r} - h\vec{\omega}, V) \int_h^{l_0} \chi(\vec{r} - s\vec{\omega}, \vec{V}) \exp\left(-\int_h^s \Sigma(\vec{r} - l\vec{\omega}, V) dl\right) ds = \\ &= \Sigma(\vec{r} - h\vec{\omega}, V) \varphi(\vec{r} - h\vec{\omega}, \vec{V}) \end{aligned}$$

(переход к последнему равенству следует из уравнения (17)).

При $h = 0$ полученные выражения приводят к уравнению, связывающему изменение плотности потока частиц в точке (\vec{r}, \vec{V}) с плотностью эмиссии в этой же точке:

$$\vec{\omega} \nabla \varphi(\vec{r}, \vec{V}) + \Sigma(\vec{r}, V) \varphi(\vec{r}, \vec{V}) = \chi(\vec{r}, \vec{V}). \quad (18)$$

Подставив в уравнение (18) выражение $\chi(\vec{r}, \vec{V})$ из определения (12), получим стационарное уравнение для плотности потока частиц:

$$\vec{\omega} \nabla \varphi(\vec{r}, \vec{V}) + \Sigma(\vec{r}, V) \varphi(\vec{r}, \vec{V}) = \int \Sigma(\vec{r}, V') \varphi(\vec{r}, \vec{V}') C(\vec{V}' \rightarrow \vec{V} | \vec{r}) d\vec{V}' + n_0(\vec{r}, \vec{V}), \quad (19)$$

которое, пользуясь определением (10), можно записать для плотности частиц:

$$\vec{V} \nabla n(\vec{r}, \vec{V}) + V \Sigma(\vec{r}, V) n(\vec{r}, \vec{V}) = \int V' \Sigma(\vec{r}, V') n(\vec{r}, \vec{V}') C(\vec{V}' \rightarrow \vec{V} | \vec{r}) d\vec{V}' + n_0(\vec{r}, \vec{V}). \quad (20)$$

Для вывода нестационарного уравнения (1) достаточно рассмотреть уравнение

$$\varphi\left(t - \frac{h}{V}, \vec{r} - h\vec{\omega}, \vec{V}\right) = \int_h^{l_0} \chi\left(t - \frac{s}{V}, \vec{r} - s\vec{\omega}, \vec{V}\right) \exp\left(-\int_h^s \Sigma(\vec{r} - l\vec{\omega}, V) dl\right) ds, \quad (21)$$

которое с помощью параметра h получается из уравнения (16) точно так же, как уравнение (17) получается из (14).

Дифференцируя левую часть уравнения (21) по h ,

$$\frac{d\varphi}{dh} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} \left(t - \frac{h}{V}\right) \frac{\partial}{\partial h} \left(t - \frac{h}{V}\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial \vec{r}} \frac{\partial \vec{r}}{\partial h} = -\frac{\partial\varphi}{\partial t} \frac{1}{V} + \frac{\partial\varphi}{\partial \vec{r}} \frac{\partial \vec{r}}{\partial h},$$

получаем нестационарное интегродифференциальное уравнение (1) с недостающей в уравнениях (19), (20) производной по времени. Заметим, что дифференцирование правой части уравнения (21), как и переход от уравнений (13), (14) к нестационарным уравнениям (15), (16), предполагает отсутствие зависимости функций $C(\vec{V}' \rightarrow \vec{V} | \vec{r})$ и $T(\vec{r}' \rightarrow \vec{r} | \vec{V})$ от времени. Независимость от времени функций C и T в линейных задачах переноса соответствует предположению 5 (см. разд. 1) о стационарности среды, в которой происходит перенос частиц. Имея в виду стационарность среды, уравнения (1), (15), (16) нередко называют квазистационарными, поскольку вывод этих уравнений предполагает, что искомые функции (плотность, поток частиц) зависят от времени, но среда, в которой происходит блуждание частиц, остается стационарной и переходная вероятность инвариантна относительно сдвигов по времени.

5. Интегральное уравнение для плотности эмиссии частиц

Уравнение для плотности эмиссии частиц можно получить, если подставить в определение (12) выражение для плотности столкновений из уравнения (13):

$$\chi(\vec{r}, \vec{V}) = n_0(\vec{r}, \vec{V}) + \int \left(\int \chi(\vec{r}', \vec{V}') T(\vec{r}' \rightarrow \vec{r} | \vec{V}') d\vec{r}' \right) C(\vec{V}' \rightarrow \vec{V} | \vec{r}) d\vec{V}'. \quad (22)$$

В этом интегральном уравнении по сравнению с уравнением (8) для плотности столкновений источник входит явно, а не в виде первых столкновений. Поменялся по сравнению с уравнением (8) физический смысл координат (\vec{r}, \vec{V}) . В уравнениях (8), (13)–(16) они были состоянием частицы перед столкновением, а в уравнении (22) эти координаты описывают состояние частицы после столкновения (или в результате рождения в источнике). Эти изменения связаны с тем, что в подынтегральном выражении поменялись местами функции C и T . При попытке перехода к интегрированию вдоль луча эти изменения приводят уравнение (22) к следующему виду:

$$\chi(\vec{r}, \vec{V}) = \int_{R^3} I(\vec{\omega}', V') C(\vec{V}' \rightarrow \vec{V} | \vec{r}) d\vec{\omega}' dV' + n_0(\vec{r}, \vec{V}), \quad (23)$$

где $I(\vec{\omega}', V') = \int_0^{l_0(\vec{\omega}')} \chi(\vec{r} - s\vec{\omega}', \vec{V}') \exp\left(-\int_0^s \Sigma(\vec{r} - l\vec{\omega}', V') dl\right) ds$.

Уравнение (23) ясно выражает физический смысл того, что эмиссия в точке (\vec{r}, \vec{V}) зависит от всего пространства направлений и не может быть выражена в виде лучевой зависимости лишь по одному направлению. Этим обстоятельством можно объяснить сложности, возникшие у авторов работ [10–12] при попытке с помощью лучевой трактовки исследовать вопрос об эквивалентности так называемого *дополнительного* интегрального уравнения и интегродифференциального уравнения Больцмана (1). Дополнительное уравнение было предложено в этих работах для задач переноса лучистой энергии. На некотором этапе исследований авторы даже выражали сомнение в эквивалентности интегродифференциального уравнения Больцмана (1) и дополнительного уравнения [11, стр. 37]. В книге [12] нет сомнений в эквивалентности дополнительного интегрального уравнения и интегродифференциального уравнения. Однако нет и каких-либо преобразований дополнительного интегрального уравнения к виду интегрального уравнения, который был бы явно эквивалентен линейному интегродифференциальному уравнению Больцмана. Из уравнения (23) и комментария к смыслу приводимых в работах [10–12] формул метода коэффициентов ослабления с акцентированием внимания читателя на *фиксированном точечном источнике, пучке расходящихся лучей, времени запаздывания* и т. п. видно, что в работах [10–12] реализована явная схема решения квазистационарного уравнения для эмиссии частиц.

6. Заключительные замечания о геометрическом смысле интегрального и интегродифференциального уравнений переноса и о численном решении задачи переноса

Физический смысл различных конкретных форм уравнения переноса (1), (14), (23) можно с некоторой долей наглядности (*геометрически*) изобразить на плоскости. На рис. 2 жирная точка с исходящей из нее пунктирной жирной стрелкой символизируют точку (\vec{r}, \vec{V}) шестимерного фазового пространства состояний. Короткие стрелки разной длины изображают, как частицы формируют вклад в искомое решение в точке (\vec{r}, \vec{V}) . Концентрические пунктирные окружности с уменьшающимся радиусом соответствуют ε -окрестностям состояний процесса при дифференцировании — в

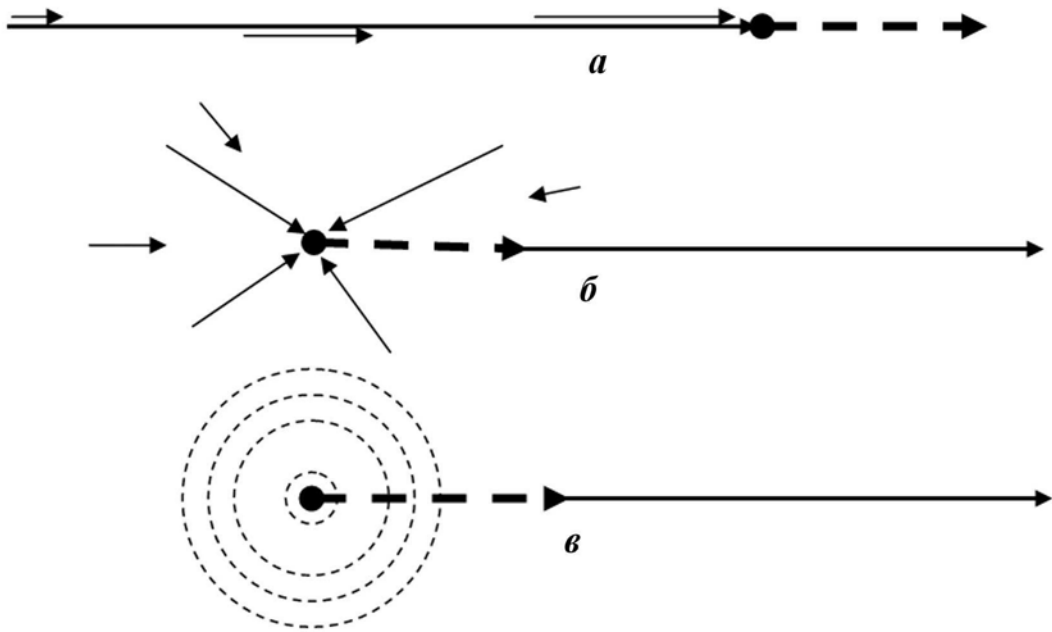


Рис. 2. Графическая иллюстрация смысла различных форм уравнения переноса: *a* — интегральное уравнение для плотности потока частиц; *б* — интегральное уравнение для плотности эмиссии частиц; *в* — интегродифференциальное уравнение для плотности частиц

процессе $\varepsilon \rightarrow 0$. Длинная стрелка, заканчивающаяся или начинающаяся в точке \vec{r} , символизирует полученное значение искомой функции $f(\vec{r}, \vec{V})$, относительно которой написано уравнение.

Рисунок 2, *a* призван показать физический смысл уравнения (14), связывающего поток частиц в точке (\vec{r}, \vec{V}) с эмиссией частиц в точках луча интегрирования, направленного из бесконечности в точку (\vec{r}, \vec{V}) . Ясно, что частицы, родившиеся в тех точках шестимерного пространства, которые не находятся на таком луче, пролетают мимо точки (\vec{r}, \vec{V}) . Следовательно, эти частицы не могут непосредственно внести вклад в поток в этой точке. Говоря иначе, плотность потока частиц в точке (\vec{r}, \vec{V}) определяется *прямым прострелом* в точку (\vec{r}, \vec{V}) из всех точек луча интегрирования $\vec{r} - s\vec{\omega}$. Внести свой вклад могут те и только те частицы, которые либо "родились" со скоростью \vec{V} в какой-либо точке источника, принадлежащей лучу интегрирования, либо претерпели столкновение в точке пересечения траектории полета с этим лучом и получили после столкновения скорость \vec{V} . Результат всех таких столкновений и работа независимого источника учтены в эмиссии. Вклад из далеких точек луча интегрирования экспоненциально падает с расстоянием, и решение в основном определяется эмиссией в близких к \vec{r} точках⁴. Суммарный вклад определяет плотность столкновений и в соответствии с определениями (10), (11) — плотность потока и плотность частиц в точке (\vec{r}, \vec{V}) . Искомая функция определена перед столкновением. Поэтому на рис. 2, *a* длинная стрелка упирается в точку (\vec{r}, \vec{V}) .

Рис. 2, *б* показывает, что эмиссия в точке (\vec{r}, \vec{V}) является результатом того, что частицы, добравшиеся со всех направлений в точку \vec{r} , испытали столкновение в этой точке и получили в результате

⁴В теории переноса излучения формулу $I_\nu = I_{\nu 0} \exp\left(-\int_0^s K_\nu dl\right)$, описывающую экспоненциальное уменьшение интенсивности (прямой прострел) монохроматического излучения вдоль некоторого направления, принято называть законом Бугера (или Бугера—Ламберта).

столкновения скорость \vec{V} . По сравнению с рис. 2, а поменялся физический смысл координат (\vec{r}, \vec{V}) . В уравнении (14) для плотности столкновений они были состоянием частицы перед столкновением, а в уравнении (23) для эмиссии координаты (\vec{r}, \vec{V}) — это состояние частицы после столкновения в точке \vec{r} (или в результате рождения в источнике).

Рис. 2, в символизирует, что баланс частиц в точке (\vec{r}, \vec{V}) полностью определяется скоростью процессов, происходящих непосредственно в этой точке. Для вычисления этой скорости достаточно знаний о поведении функции плотности частиц в бесконечно малой окрестности этой точки. В этой локальности — смысл перехода от интегрального уравнения (2) к интегродифференциальному (1). Здесь, как и в уравнении (23) для эмиссии, (\vec{r}, \vec{V}) — это состояние частицы после столкновения. Такое толкование координат (\vec{r}, \vec{V}) на рис. 2, б и 2, в отражается в том, что длинная стрелка исходит из точки (\vec{r}, \vec{V}) . Начало этой стрелки экранируется жирной пунктирной стрелкой.

Численное решение задачи переноса методом Монте-Карло сводится к последовательному моделированию событий *пробег* → *столкновение* → *пробег* ..., т. е. к циклическому вычислению функций T и C . Начинается цикл с моделирования стартовых координат траектории частицы в соответствии с функцией $n_0(\vec{r}, \vec{V})$. То есть формально, начиная с распределения независимого источника, решается уравнение (23) для эмиссии. Как отмечается в монографии [12], метод коэффициентов ослабления "по характеру вычислений имеет много общего с методом Монте-Карло". Фактически в том и другом методе моделированием обрывающегося с вероятностью 1 ряда Неймана для плотности величин фазовых состояний марковской цепи столкновений оцениваются функционалы от решения интегродифференциального уравнения Больцмана (1).

Список литературы

1. Дэвисон Б. Теория переноса нейтронов. М.: Атомиздат, 1960.
2. Владимиров В. С. Математические задачи односкоростной теории переноса частиц // Труды МИАН. 1961. Т. 61. М.: Издательство АН СССР.
3. Теория ядерных реакторов / Под ред. Г. Биркгофа и Э. Вигнера. М.: Госатомиздат, 1963.
4. Кейз К., Цвайфель П. Линейная теория переноса. М.: Мир, 1972.
5. Белл Д., Глестон С. Теория ядерных реакторов. М.: Атомиздат, 1974.
6. Кольчужкин А. М., Учайкин В. В. Введение в теорию прохождения частиц через вещество. М.: Атомиздат, 1978.
7. Спанье Дж., Гелбард Э. Метод Монте-Карло и задачи переноса нейтронов. М.: Атомиздат, 1972.
8. Марчук Г. И., Михайлов Г. А., Назаралиев М. А. и др. Метод Монте-Карло в атмосферной оптике. Новосибирск: Наука (Сибирское отделение), 1976.
9. Ермаков С. М., Михайлов Г. А. Статистическое моделирование. Издание второе, дополненное. М.: Наука, 1982.
10. Дементьев Ю. А., Карповцев Е. А., Нарожная И. А. и др. Метод коэффициентов ослабления // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2001. Вып. 2. С. 28—36.
11. Дементьев Ю. А., Карповцев Е. А., Морозова Е. В. и др. Дополнительное интегральное уравнение переноса излучения // Там же. 2001. Вып. 4. С. 35—41.
12. Дементьев Ю. А. Распределение лучистой энергии точечного источника. Новая форма интегрального уравнения переноса излучения. М.: Физматлит, 2005.

13. *Peierls R.* Critical conditions in the neutron multiplication // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1939. Vol. 35. P. 610—615.
14. *Валландер С. В.* Уравнения и постановка задач в аэродинамике разреженных газов. Сборник I / Под ред. С. В. Валландера. Л.: Издательство ЛГУ, 1963. С. 7—37.
15. *Масленников М. В.* Аксиоматическая модель явлений переноса частиц. М.: Наука, 1989.
16. *Черчиньяни К.* Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир, 1978.
17. *Кочубей Ю. К.* Статистическое моделирование кинетических процессов. Саров: ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", 2004.
18. *Кёртис Д.* Методы Монте-Карло для итерации линейных операторов: Пер. с англ. В. С. Владимирова // УМН. 1957. Т. 12. Вып. 5. С. 149—174.
19. *Миллер Б. М., Панков А. Р.* Теория случайных процессов в примерах и задачах / Под ред. А. И. Кибзуна. М.: Физматлит, 2007.

Статья поступила в редакцию 15.08.11.
