

УДК 519.63

МЕТОД ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ОПЕРАТОРА ШАГА УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

О. М. Козырев, В. П. Литвинов
(РФЯЦ-ВНИИТФ)

Предлагается метод численного решения краевых задач уравнения теплопроводности. Метод основан на конструировании разностного оператора шага в виде операторного полинома. Конструирование операторного полинома происходит в пространстве фурье-образов с использованием многочленов Чебышева и Ланцоша. Алгоритм решения представляет собой явные пошаговые вычисления и реализован в виде схемы *предиктор-корректор*. Метод прост в реализации и поддается эффективному распараллеливанию. Изложение метода дается на примере решения задачи Коши для линейного уравнения теплопроводности. Представлены результаты численных решений известных тестовых задач.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, фурье-образ, полиномы Чебышева и Ланцоша.

Введение

Для численного решения уравнения теплопроводности с помощью сеточных методов используется, как правило, явная или неявная аппроксимация исходной дифференциальной задачи. Разностные методы, основанные на неявной аппроксимации, обладают высокой точностью и абсолютной устойчивостью вычислений. Такие методы, как правило, являются трудоемкими и не всегда поддаются эффективному распараллеливанию. Методы на основе явной аппроксимации лишены этих недостатков, они просты в реализации и позволяют проводить глубокое распараллеливание. Но использование явной схемы накладывает обременительное условие устойчивости [1], что увеличивает общий объем вычислительной работы.

Впервые вопрос о построении эффективных алгоритмов, обладающих меньшим объемом вычислений по сравнению с явной разностной схемой, исследован в работе [2]. Был предложен новый подход к построению итерационных процедур для решения уравнений параболического типа с заранее известным числом итераций, обеспечивающих устойчивость вычислений. В работах [3–7] предложена и практически опробована схема, реализуемая явными итерациями с чебышевским набором параметров. В этой схеме аппроксимация обеспечивается на первой итерации, а с помощью аналитических исследований находится необходимое количество итераций для обеспечения устойчивости вычислений.

В настоящей работе рассматривается численный метод решения краевых задач для нелинейного уравнения теплопроводности. Суть метода заключается в построении разностного оператора шага в виде операторного полинома на основе многочленов Чебышева и Ланцоша. Конструирование операторного полинома происходит в пространстве фурье-образов, где выполняется аппроксимация исходного дифференциального уравнения и аналитически вычисляется наименьший порядок полинома, необходимый для обеспечения устойчивости вычислений. Алгоритм расчета на каждом временном шаге представляет схему *предиктор-корректор*, реализуемую в виде рекуррентных соотношений, каждое из которых эквивалентно по трудоемкости явной разностной схеме. Поэтому метод

допускает высокую степень параллелизма и может быть эффективным при решении многомерных задач на многопроцессорных вычислительных системах.

Описание метода

Рассмотрим задачу Коши для линейного уравнения теплопроводности с одной пространственной переменной:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad x \in \mathbb{R}; \\ u(0, x) &= u^0(x). \end{aligned} \quad (1)$$

В случае явной аппроксимации исходному дифференциальному уравнению соответствует разностное уравнение вида

$$u^{n+1}(x) = u^n(x) + \tau Au^n(x),$$

записанное в операторном виде, где действие разностного оператора A на функцию $u(x)$ определяется как

$$Au(x) = h^{-2} \left(u(x+h) - 2u(x) + u(x-h) \right).$$

Неявная аппроксимация уравнения (1) приводит к уравнению вида

$$u^{n+1}(x) - \tau Au^{n+1}(x) = u^n(x).$$

Естественным обобщением рассмотренных уравнений является двухслойная разностная схема

$$u^{n+1}(x) = Gu^n(x), \quad (2)$$

где G — разностный оператор шага.

Будем конструировать оператор шага G в виде операторного полинома в пространстве фурье-образов с помощью многочленов Чебышева и Ланцоша. Применяя в пространстве L_2 к разностной схеме (2) преобразование Фурье [8], рассмотрим исходную задачу в пространстве фурье-образов функций L_2^* :

$$v^{n+1}(\omega) = P_s(\lambda) v^n(\omega).$$

Здесь $v(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} u(x) dx$ — фурье-образ [9] функции $u(x)$, а $P_s(\lambda)$ — некоторый искомый полином, соответствующий разностному оператору шага G . Через $\lambda(\omega)$ обозначен спектральный образ (фурье-образ) разностного оператора $-\tau A$, который равен $\lambda(\omega) = 2r - re^{i\omega h} - re^{-i\omega h} = 4r \sin^2 \alpha$, $0 \leq \lambda \leq 4r$, $0 \leq \alpha \leq \pi/2$, $\alpha = h\omega/2$, где $r = \tau h^{-2}$ — число Куранта для теплопроводности.

Для выполнения условия аппроксимации выберем искомый полином таким образом, чтобы первые два младших члена $P_s(\lambda)$ были равны 1 и $-\lambda$, что соответствует разностному оператору шага, младшие слагаемые которого будут равны E (единичный оператор) и τA . Это обеспечивает для выбранного оператора $-\tau A$ аппроксимацию исходного уравнения (1) с первым порядком по времени и вторым по пространству. Условие аппроксимации запишем в виде

$$\begin{cases} P_s(0) = 1; \\ \left. \frac{dP_s(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} = -1. \end{cases} \quad (3)$$

Для обеспечения устойчивости разностной схемы в пространстве L_2 необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\max_{0 \leq \lambda \leq 4r} |P_s(\lambda)| \leq 1. \quad (4)$$

Конструирование разностной схемы на основе полинома Чебышева

Первый способ построения искомого полинома $P_s(\lambda)$ основан на использовании многочлена Чебышева [10]

$$T_s(\xi) = \cos(s \arccos \xi), \quad -1 \leq \xi \leq 1.$$

Будем пользоваться следующими свойствами полинома:

$$\begin{aligned} |T_s(1)| &= 1, \quad \frac{dT_s(1)}{d\xi} = s^2, \quad \forall s; \\ |T_s(\xi)| &\leq 1, \quad \forall \xi \in [-1, 1], \quad \forall s; \\ T_{s+1}(\xi) &= 2\xi T_s(\xi) - T_{s-1}(\xi), \quad \forall s. \end{aligned} \quad (5)$$

Рассмотрим линейное отображение $\lambda = s^2(1 - \xi)$. В качестве полинома $P_s(\lambda)$ возьмем многочлен Чебышева, в котором сделана линейная замена аргумента:

$$P_s(\lambda) = T_s\left(1 - \frac{\lambda}{s^2}\right) = \tilde{T}_s(\lambda).$$

Тогда для любого порядка полинома выполняются условия аппроксимации

$$P_s(0) = T_s(1) = 1; \quad \frac{d}{d\lambda}P_s(0) = \frac{d}{d\xi}T_s(1) \frac{d\xi}{d\lambda} = s^2 \left(-\frac{1}{s^2}\right) = -1.$$

Для обеспечения устойчивости (4), учитывая свойство (5), при линейном отображении $\xi \in [-1, 1]$ на $\lambda \in [0, 4r]$ необходимо задать условие $\xi(\lambda = 4r) \geq -1$, что выполняется только, когда порядок полинома $s \geq \sqrt{2r}$.

Для реализации схемы *предиктор-корректор* запишем полином в виде

$$P_s(\lambda) = 1 - \lambda \tilde{L}_{s-1}(\lambda),$$

где $\tilde{L}_{s-1}(\lambda) = \left(1 - \tilde{T}_s(\lambda)\right)/\lambda$ получается преобразованием многочлена Ланцоша, который будет рассмотрен далее. Для построения многочлена \tilde{L}_{s-1} воспользуемся рекуррентными соотношениями для полинома Ланцоша, которые можно получить из рекуррентных соотношений для полинома Чебышева:

$$\begin{aligned} \tilde{L}_0(\lambda) &= 1; \quad \tilde{L}_1(\lambda) = 1 - \frac{\lambda}{2s^2}; \\ \tilde{L}_{\nu+1}(\lambda) &= 2 \left(\frac{\nu+1}{\nu+2}\right)^2 \left(1 - \frac{\lambda}{s^2}\right) \tilde{L}_\nu - \left(\frac{\nu}{\nu+2}\right)^2 \tilde{L}_{\nu-1} + \frac{2}{(\nu+2)^2}, \quad \nu = \overline{1, s-2}, \quad s \geq \sqrt{2r}. \end{aligned}$$

Тогда в пространстве сеточных функций можно записать схему типа *предиктор-корректор*, где количество пошаговых вычислений для обеспечения устойчивости определяется условием $s \geq \sqrt{2r}$:

– предиктор

$$\begin{aligned} u_m^{(n,0)} &= u_m^n; \quad u_m^{(n,1)} = \left(E + \frac{\tau A}{2s^2}\right) u_m^{(n,0)}; \\ u_m^{(n,\nu+1)} &= 2 \left(\frac{\nu+1}{\nu+2}\right)^2 \left(E + \frac{\tau A}{s^2}\right) u_m^{(n,\nu)} - \left(\frac{\nu}{\nu+2}\right)^2 u_m^{(n,\nu-1)} + \frac{2}{(\nu+2)^2} u_m^{(n,0)}; \\ \nu &= \overline{1, s-2}; \end{aligned}$$

– корректор

$$u_m^{n+1} = u_m^n + \tau A u_m^{(n,s-1)}.$$

Нетрудно заметить, что реализация схемы на каждом временном шаге сопоставима с вычислениями по явной схеме, но общий объем вычислений при этом пропорционален корню из числа Куранта.

Конструирование разностной схемы на основе полинома Ланцоша

Второй способ построения $P_s(\lambda)$ аналогичен рассмотренному в предыдущем разделе способу и основан на использовании многочлена Ланцоша [11]

$$L_s(\xi) = \frac{1 - T_{s+1}(\xi)}{(s+1)^2(1-\xi)}, \quad \xi \in [-1, 1].$$

Здесь $T_{s+1}(\xi)$ — многочлен Чебышева $(s+1)$ -го порядка. На рис. 1 для наглядности изображены полиномы Ланцоша первых четырех порядков.

Возьмем в качестве $P_s(\lambda)$ многочлен следующего вида:

$$P_s(\lambda) = L_s \left[1 - \frac{6\lambda}{s(s+2)} \right] = \tilde{L}_s(\lambda).$$

Тогда для любого порядка s условия (3) выполняются равенства

$$\begin{aligned} P_s(0) &= L_s(1) = 1; \\ \frac{d}{d\lambda} P_s(0) &= \frac{d}{d\xi} L_s(1) \frac{d\xi}{d\lambda} = \frac{s(s+2)}{6} \left[-\frac{6}{s(s+2)} \right] = -1. \end{aligned}$$

Для обеспечения устойчивости в силу линейности $\lambda = \frac{s(s+2)}{6}(1-\xi)$ необходимо, чтобы

$$\xi(\lambda = 4r) \geq -1. \tag{6}$$

Условие (6) выполняется только, когда порядок полинома $s \geq \sqrt{12r+1} - 1$.

Для реализации схемы *предиктор-корректор* запишем

$$P_s(\lambda) = 1 - \lambda \tilde{R}_{s-1}(\lambda), \quad \text{где } \tilde{R}_{s-1}(\lambda) = \frac{1 - \tilde{L}_s(\lambda)}{\lambda}.$$

Чтобы найти полином \tilde{R}_{s-1} , необходимо воспользоваться рекуррентными формулами, которые получаются из соотношений для многочлена Ланцоша:

$$\begin{aligned} \tilde{R}_0(\lambda) &= 1; \quad \tilde{R}_1(\lambda) = 1 - \frac{2\lambda}{s(s+2)}; \\ \tilde{R}_{\nu+1}(\lambda) &= 2 \frac{(\nu+1)(\nu+2)}{(\nu+3)(\nu+4)} \left[1 - \frac{6\lambda}{s(s+2)} \right] \tilde{R}_\nu - \frac{\nu(\nu+1)^2}{(\nu+3)^2(\nu+4)} \tilde{R}_{\nu-1} + \frac{12(\nu+2)}{(\nu+3)^2(\nu+4)}. \end{aligned}$$

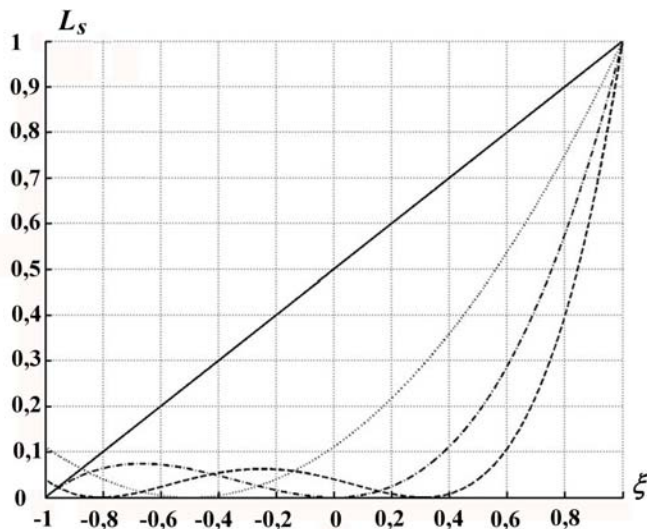


Рис. 1. Полиномы Ланцоша первых четырех порядков: — — $s = 1$; — $s = 2$; ····· — $s = 3$; - - - - $s = 4$

Тогда в пространстве сеточных функций получим разностную схему следующего вида:

– предиктор

$$u_m^{(n,0)} = u_m^n; \quad u_m^{(n,1)} = \left[E + \frac{2}{s(s+2)} \tau A \right] u_m^{(n,0)};$$

$$u_m^{(n,\nu+1)} = 2 \frac{(\nu+1)(\nu+2)}{(\nu+3)(\nu+4)} \left[E + \frac{6}{s(s+2)} \tau A \right] u_m^{(n,\nu)} -$$

$$- \frac{\nu(\nu+1)^2}{(\nu+3)^2(\nu+4)} u_m^{(n,\nu-1)} + \frac{12(\nu+2)}{(\nu+3)^2(\nu+4)} u_m^{(n,0)}, \quad \nu = \overline{1, s-2};$$

– корректор

$$u_m^{n+1} = u_m^n + \tau A u_m^{(n,s-1)}.$$

Спектральный анализ рассмотренных схем

Проанализируем поведение функций, соответствующих в пространстве образов Фурье разностным операторам шага для рассмотренных выше схем, и сравним с функциями для операторов шага дифференциального уравнения и неявной разностной схемы.

Сначала рассмотрим решение задачи Коши (1) на всей бесконечной прямой, которое можно представить в виде

$$u(t + \tau, x) = F(t + \tau, x) u^0(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t + \tau, x - y) u^0(y) dy,$$

где

$$F(t + \tau, x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(t + \tau)}} \exp\left(-\frac{x^2}{4(t + \tau)}\right).$$

Функции $F(t + \tau, x)$ в пространстве L_2^* соответствует фурье-образ $\rho(\alpha) = \exp(-4r\alpha^2)$. Оператору шага неявной разностной схемы соответствует образ $\rho_n(\alpha) = (1 + \lambda(\alpha))^{-1}$, $\lambda(\alpha) = 4r \sin^2(\alpha)$.

Для схем на основе полиномов Чебышева и Ланцоша имеем

$$\rho_{\text{ч}}(\alpha) = \cos\left(m \arccos\left(\frac{1 - \lambda(\alpha)}{m^2}\right)\right);$$

$$\rho_{\text{л}}(\alpha) = \frac{1 - \cos\left((p+1) \arccos(1 - \xi(\alpha))\right)}{(p+1)^2 \xi(\alpha)}, \quad \xi(\alpha) = \frac{6\lambda(\alpha)}{p(p+2)},$$

где $m = \sqrt{2r}$; $p = \sqrt{12r+1} - 1$.

На рис. 2 графически изображены фурье-образы операторов шага дифференциального уравнения, неявной схемы, а также схем на основе полиномов Чебышева и Ланцоша для числа Куранта $r = 5,0$. На рис. 3 функции представлены в окрестности нуля.

Вычислительный алгоритм на основе полинома Чебышева экономнее алгоритма на основе полинома Ланцоша. Однако спектральный образ $\rho_{\text{ч}}(\alpha)$ качественно не воспроизводит образ оператора исходного дифференциального уравнения, являющийся положительной и монотонно убывающей функцией. С точки зрения соответствия спектру дифференциальной задачи предпочтительней схема на основе полинома Ланцоша. Во-первых, его спектральный образ положителен, а последовательность максимумов функции убывает с ростом частоты. Во-вторых, на начальном участке спектра образ $\rho_{\text{л}}(\alpha)$ ближе к спектральному образу исходного дифференциального уравнения (см. рис. 3).

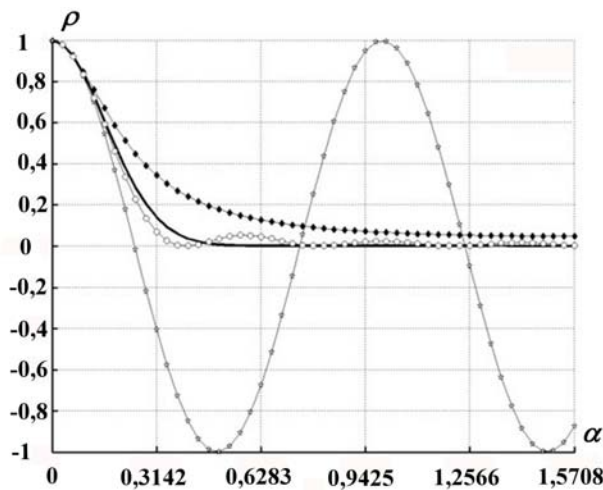


Рис. 2. Фурье-образы операторов шага: — — дифференциального уравнения; —◆— — неявной схемы; —★— — схемы на основе полинома Чебышева; —○— — схемы на основе полинома Ланцоша

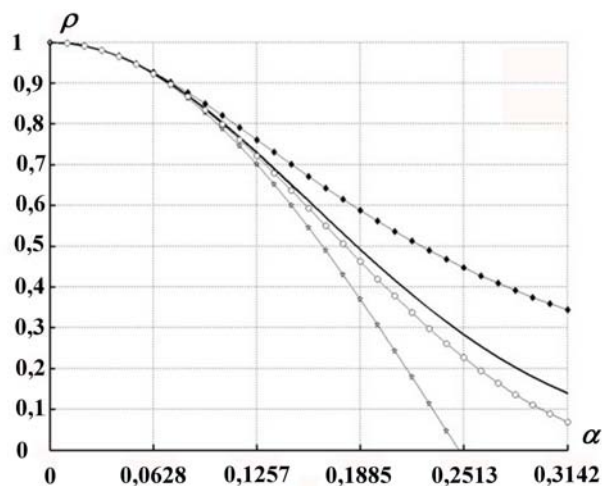


Рис. 3. Фурье-образы операторов шага в окрестности нуля: — — дифференциального уравнения; —◆— — неявной схемы; —★— — схемы на основе полинома Чебышева; —○— — схемы на основе полинома Ланцоша

Сравнение с явной разностной схемой

Чтобы наглядно показать отличие предлагаемых разностных схем от явной схемы, проведем оценку общего объема вычислительной работы.

Для полиномиальных схем переход на новый временной слой осуществляется с помощью операторного многочлена, содержащего s элементарных шагов. Каждый такой шаг эквивалентен по трудоемкости вычислений временному шагу явной разностной схемы. Тогда общее минимальное количество таких шагов при $t = 1$ составит

$$n_{\text{ч}} = \frac{\sqrt{2r}}{rh^2}; \quad n_{\text{л}} = \frac{\sqrt{12r+1}-1}{rh^2},$$

где $n_{\text{ч}}$, $n_{\text{л}}$ — общее количество шагов для схем на основе полиномов Чебышева и Ланцоша. Для явной разностной схемы согласно условию устойчивости [1] минимальное количество шагов можно вычислить как

$$n_{\text{я}} = \frac{2}{h^2}.$$

Таким образом, можно записать оценку, показывающую во сколько раз объем вычислений по явной схеме больше объема вычислений для полиномиальных схем (рис. 4):

$$\frac{n_{\text{я}}}{n_{\text{ч}}} = \frac{2r}{\sqrt{2r}}; \quad \frac{n_{\text{я}}}{n_{\text{л}}} = \frac{2r}{\sqrt{12r+1}-1}.$$

Из рис. 4 видно, что выигрыш в объеме вычислений по предложенным схемам тем больше, чем больше число Куранта.

Примеры расчетов тестовых задач

Далее рассмотрим результаты решения некоторых тестовых задач с граничными условиями второго рода. Для этого оператор A аппроксимировался специальным образом:

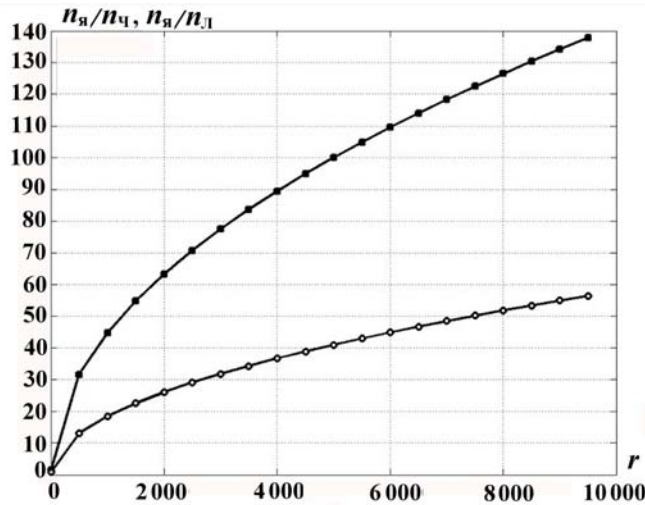


Рис. 4. Зависимости количества шагов от числа Куранта: —■— — $n_я/n_ч$; —○— — $n_я/n_л$

$$(Au)_m = \begin{cases} \frac{u_2}{h^2} - \frac{u_1}{h^2} + \frac{S_0}{h}, & m = 1; \\ \frac{u_{m+1}}{h^2} - 2\frac{u_m}{h^2} + \frac{u_{m-1}}{h^2}, & m = \overline{2, M-1}; \\ \frac{S_1}{h} - \frac{u_M}{h^2} + \frac{u_{M-1}}{h^2}, & m = M, \end{cases}$$

где S_0, S_1 — нормальные составляющие потока тепла на границе.

Задача 1. Решение линейного уравнения теплопроводности. На отрезке $0 \leq x \leq 1$ рассматривается решение уравнения (1) в виде

$$u(x, t) = 1 - \sin(\pi x) e^{-\pi^2 t}. \quad (7)$$

Начальные и краевые условия определяются из решения (7).

Целью теста является оценка точности численных решений линейного уравнения теплопроводности в сравнении с точным решением задачи.

На рис. 5 графически изображено точное решение и численные решения по схемам на основе полиномов Чебышева и Ланцоша. Приближенные решения получены на равномерной разностной сетке с шагом по пространству $h = 0,02$, при числе Куранта $r = 2,5$. Видно, что профили численных решений для рассматриваемых схем согласуются с точным решением задачи.

Задача 2. О распространении тепла от плоского мгновенного источника [12]. В начальный момент времени в плоскости $x = 0$ выделяется конечное количество энергии E . В последующее время тепло растекается от плоскости $x = 0$ в обе стороны. Так как приток энергии в систему отсутствует, распределение температуры в пространстве должно подчиняться условию сохранения энергии $\int_{-\infty}^{\infty} u dx = E$.

Решение задачи имеет вид

$$u(x, t) = \frac{E}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/4t}.$$

Целью расчета данной задачи является проверка монотонности получаемого численного решения при наличии разрыва в начальных условиях.

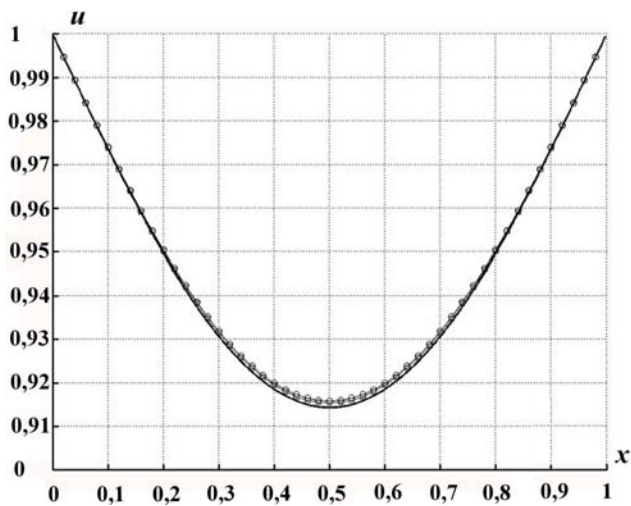


Рис. 5. Профили температур в задаче 1: — — точное решение; —○— — по схеме на основе полинома Чебышева; —□— — по схеме на основе полинома Ланцоша

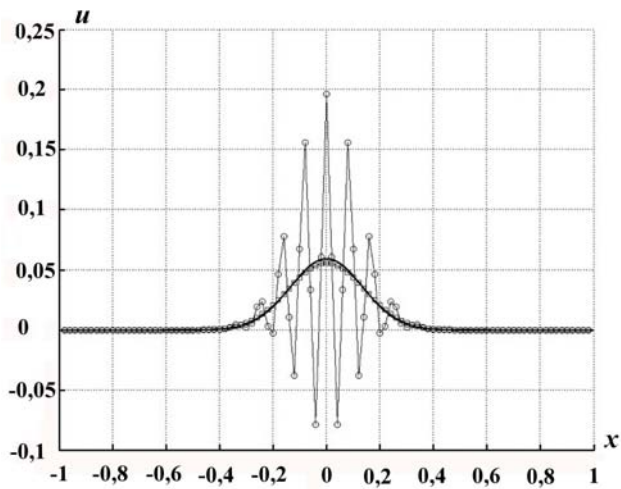


Рис. 6. Профили температур в задаче 2: — — точное решение; —○— — по схеме на основе полинома Чебышева; —□— — по схеме на основе полинома Ланцоша

На рис. 6 представлены результаты решения задачи по схемам на основе полиномов Чебышева и Ланцоша в сравнении с точным решением при числе Куранта $r = 2,5$. Видно, что точное решение имеет немонотонный профиль, а решение по схеме на основе полинома Ланцоша монотонно и в пределах точности чертежа хорошо согласуется с точным решением задачи.

Задача 3. О бегущей тепловой волне. Рассмотрим задачу о распространении тепловой волны [13] в области $0 \leq x \leq 1$ для нелинейного уравнения с коэффициентом теплопроводности $\chi(u) = u^3$. Начальные и краевые условия второго рода определяются из аналитического решения

$$u(x, t) = \begin{cases} \sqrt[3]{15(t-x)}, & x \leq 5t; \\ 0, & x > 5t. \end{cases}$$

Область решения $x \in [0, 1]$ разбивалась равномерно на 50 интервалов, максимальное число Куранта $\max_{0 \leq x \leq 1} (r) = 17,9$. Тепловая волна за один шаг по времени распространялась на $d\tau/h = 0,25$ интервала по пространству.

Как видно из рис. 7, численное решение, полученное по схеме на основе полинома Чебышева без итерирования коэффициента χ , является немонотонным. Коэффициент теплопроводности вычислялся по формуле

$$\chi_m^{n+1} = 0,5 \left((u_m^n)^3 + (u_{m+1}^n)^3 \right), \quad m = 1, 2, \dots, M-1.$$

Для решения по схеме на основе полинома Чебышева с итерированием коэффициента теплопроводности использовался следующий критерий выхода из итераций:

$$\max_{0 \leq x \leq 1} \left| \frac{u_m^{\mu+1} - u_m^\mu}{u_m^\mu} \right| \leq \varepsilon,$$

где μ — номер итерации; ε принималось равным 10^{-3} ; при этом среднее значение итераций на шаге было равно 8.

На рис. 7 также показан профиль температуры, полученный при решении задачи по схеме на основе полинома Ланцоша без итерирования коэффициента теплопроводности. Можно отметить,

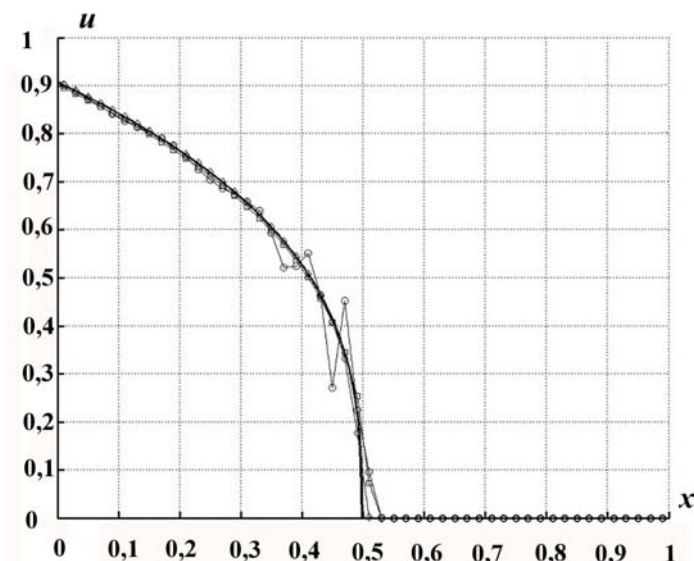


Рис. 7. Профили температур в задаче 3: — — точное решение; —○— — по схеме на основе полинома Чебышева без итерирования χ ; —□— — по схеме на основе полинома Чебышева с итерированием χ ; —◇— — по схеме на основе полинома Ланцоша без итерирования χ

что профиль решения монотонный и хорошо описывает точное решение, а вычислительные затраты сопоставимы с решением по схеме на основе полинома Чебышева с итерированием коэффициента теплопроводности.

Заключение

Отличительной особенностью метода является конструирование оператора шага в виде операторного полинома. Метод не ограничен использованием лишь представленных конструкций операторов шага (на основе полиномов Чебышева и Ланцоша), а имеет очевидные обобщения.

Результаты проведенных тестовых расчетов показывают высокую точность метода, а также его применимость для решения задач в широком диапазоне чисел Куранта.

Объем вычислений предлагаемого метода пропорционален квадратному корню из числа Куранта, что при больших значениях чисел Куранта на порядки сокращает объем вычислений по сравнению с явной схемой.

Алгоритм метода представляет собой пошаговые явные вычисления, поэтому может быть эффективен при решении многомерных задач с использованием параллельных вычислений.

Список литературы

1. Самарский А. А., Гулин А. В. Устойчивость разностных схем. М.: Наука, 1973.
2. Чжао-Дин Юань. Некоторые разностные схемы решения первой краевой задачи для линейных дифференциальных уравнений с частными производными: Автореф. дис. канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 1958.
3. Локуцкий В. О., Локуцкий О. В. Применение чебышевских параметров для численного решения некоторых эволюционных задач: Препринт № 99. М.: ИПМ АН СССР, 1984.
4. Локуцкий В. О., Локуцкий О. В. Об одном методе численного решения краевых задач для некоторых эволюционных уравнений // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики. 1986. Вып. 2. С. 90—94.

5. Жуков В. Т. Численные эксперименты по решению уравнения теплопроводности методом локальных итераций: Препринт №97. М.: ИПМ АН СССР, 1984.
6. Жуков В. Т. Разностные схемы локальных итераций для параболических уравнений: Препринт №173. М.: ИПМ АН СССР, 1986.
7. Жуков В. Т. Явно итерационные разностные схемы для параболических уравнений // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1993. Вып. 4. С. 40—46.
8. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Физматлит, 2004.
9. Жуков А. И. Метод Фурье в вычислительной математике. М.: Наука, 1992.
10. Гончаров В. Л. Теория интерполирования и приближения функций. М.: ГТТИ, 1934.
11. Фадеев Д. К., Фадеев В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М.: Изд.-во физ.-мат. лит., 1963.
12. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966.
13. Самарский А. А., Соболев И. М. Примеры численного расчета температурных волн // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1963. Т. 3, №4. С. 702—719.

Статья поступила в редакцию 06.03.12.
