

УДК 517.9+519.6+533.7+536.7

ВЛИЯНИЕ ВЯЗКОСТИ И ДИСПЕРСИИ НА ПАРАМЕТРЫ УДАРНЫХ ВОЛН РАЗРЕЖЕНИЯ ДЛЯ НЕВЫПУКЛОГО УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ ОБЩЕГО ВИДА

Ю. А. Бондаренко, В. Н. Софронов, Ю. Е. Дудник
(РФЯЦ-ВНИИЭФ)

Получены условия допустимости ударных волн разрежения в случае уравнения состояния общего вида с невыпуклой изэнтропией, когда главным процессом, размазывающим скачок, является нормальная дисперсия, а вязкость отсутствует. Они отличаются от условия допустимости ударных волн разрежения при определяющей роли вязкости. Различаются и соответствующие решения автомодельных задач распада разрыва с ударными волнами разрежения. При преобладании вязкости на разрежении численные решения сходятся к *вязкому* точному решению, а при отсутствии вязкости на разрежении — к *дисперсионному* точному решению.

Ключевые слова: ударные волны разрежения, условия допустимости, вязкость, дисперсия, автомодельное решение, численная сходимость.

Введение

В многочисленных работах А. Г. Куликовского и его сотрудников (см. обзорную статью [1] и книгу [2]) показано, что для неклассических разрывов физические процессы, происходящие внутри размазанных ударных волн (УВ), пренебрежимо малы в гладкой части решения и потому отбрасываемые при формулировке уравнений динамики сплошной среды, могут менять условия допустимости таких УВ и тем самым менять параметры УВ и влиять на характер решения задачи в целом.

Похожие примеры неединственности решений задач газовой динамики с невыпуклыми баротропными уравнениями состояния (УРСами) $p = P(V)$ приведены в работах [3–5]. Было показано, что параметры УВ разрежения, возникающих при опрокидывании волн разрежения, зависят от того, какие физические процессы используются для описания структуры этих УВ. В [3] были получены условия допустимости УВ разрежения при использовании дисперсии для *размазывания* скачков. Выяснилось, что они всегда отличаются от условий допустимости УВ разрежения при их размазывании вязкостью, полученных ранее в работе Г. Я. Галина [6]. В [4] показано, что размазывание УВ разрежения с помощью искусственной межфазной кинетики (вместо вязкости и дисперсии) приводит к новому типу условий допустимости и соответственно к новым решениям задач с УВ разрежения. В каком-то смысле результаты работ [3–5] можно рассматривать как обобщение на случай уравнений газовой динамики результатов работы [7], в которой на примере модельного нелинейного уравнения переноса с вязкостью и дисперсией и с *невыпуклым* УРСом показано, что предельные разрывные решения зависят от соотношения между вязкостью и дисперсией. Близкие вопросы взаимного влияния диссипации и дисперсии на параметры УВ в задачах упругости рассмотрены в [8].

Принятое в работах [3–5] упрощающее предположение о баротропности УРСа не всегда пригодно на практике. Представляет интерес обобщение полученных ранее результатов на случай более реалистичных УРСов общего вида $E = E(V, S)$, $P(V, S) = -\frac{\partial E(V, S)}{\partial V}$, для которых нарушено одно из

условий Бете—Вейля (требование выпуклости давления $P(V, S)$ на каждой изэнтропе $S = \text{const}$). В настоящей работе получены условия допустимости УВ разрежения с невыпуклыми УРСами общего вида, когда структура размазанных скачков определяется дисперсией. Работа инициирована статьей [9], в которой описан невыпуклый УРС Бизарриума и соответствующая тестовая задача (задача Бизарриума) распада разрыва с двумя расщепленными УВ сжатия и скачком разрежения.

Условия допустимости УВ со структурой, определяемой вязкостью

Всегда на разрывах параметры среды должны удовлетворять уравнениям Ренкина—Гюгонио, вытекающим из законов сохранения. Если для УРСа выполнены соотношения Бете—Вейля

$$\frac{\partial P(V, S)}{\partial V} < 0; \quad \frac{\partial^2 P(V, S)}{\partial V^2} > 0; \quad P(V, S)|_{V \rightarrow 0} \rightarrow \infty; \quad \frac{\partial P(V, S)}{\partial S} > 0; \quad C_V = \frac{\partial E(V, T)}{\partial T} > 0,$$

то условие неубывания энтропии на разрыве $S_2 \geq S_1$ по теореме Цемплена [13] приводит к ограничениям на параметры разрыва $(P_1, V_1) \Rightarrow (P_2, V_2)$:

$$-\left. \frac{\partial P(V_1, S_1)}{\partial V} \right|_S < \sigma^2 = \frac{P(V_2, S_2) - P(V_1, S_1)}{V_1 - V_2} < -\left. \frac{\partial P(V_2, S_2)}{\partial V} \right|_S. \quad (1)$$

Условия (1) обычно называют *условиями эволюционности* разрывов. Они эквивалентны требованию однозначной разрешимости задачи о взаимодействии малых возмущений с УВ. В этом случае число приходящих на разрыв характеристик должно быть на единицу больше числа уравнений Ренкина—Гюгонио. Но сказанное верно только при выполнении условий Бете—Вейля, т. е. только для нормальных газов.

Для сред с аномальными термодинамическими свойствами соотношения Ренкина—Гюгонио и условие неубывания энтропии не позволяют однозначно выделить физически допустимые разрывы, и, следовательно, проблема допустимости разрыва не может быть решена в рамках уравнений идеальной газовой динамики. В таких случаях для отбора единственного разрывного решения требуется привлечение дополнительных условий физического происхождения, которые в литературе называются *условиями допустимости* разрывов и связаны с требованием существования структуры [1, 2]. Физические процессы, происходящие внутри размазанных УВ, могут менять условия их допустимости (обычно как условия существования структуры) и тем самым влиять на характер решения задачи в целом.

С практической точки зрения наибольший интерес представляют УРСы, для которых в некоторой области параметров нарушено второе условие Бете—Вейля. В таких средах непрерывные волны разрежения опрокидываются с образованием УВ разрежения. УРСы с нарушением условия выпуклости не противоречат законам термодинамики и нередко встречаются в практике [10–12].

Обычно при изучении УВ разрежения используется предположение, что любые разрывные решения уравнений газовой динамики должны получаться из гладких решений уравнений газовой динамики с вязкостью предельным переходом к бесконечно малому коэффициенту вязкости, т. е. методом исчезающей вязкости. Для метода исчезающей вязкости из результатов Г. Я. Галина [6] следует [13], что для автомодельной задачи распада разрыва ударная адиабата $p = H(v, v_1, p_1)$ лежит в плоскости (P, V) не правее (для волны сжатия) и не левее (для волны разрежения) волнового луча (прямой Рэлея, соединяющей точки (V_1, P_1) и (V_2, P_2)). Волновой луч касается ударной адиабаты в обеих своих концевых точках.

Для УВ сжатия физически оправдано описание структуры разрывов вязкостью. В то же время авторам не известны убедительные обоснования физического характера того, что в окрестности фазовых переходов на скачках разрежения главным сглаживающим процессом является вязкость. Наоборот, для гетерогенной смеси двух фаз можно привести аргументы в пользу более важной роли дисперсии.

Условие допустимости скачков разрежения в случае невыпуклых УРСов общего вида для разностной дисперсии (без вязкости)

Рассмотрим невыпуклые УРСы общего вида, в которых давление зависит не только от плотности, но и от энергии (или энтропии). Будем исследовать структуру УВ разрежения для уравнений газовой динамики, для регуляризации которых используем метод исчезающей нормальной дисперсии. В качестве модели нормальной дисперсии берем дифференциальное приближение полностью консервативной конечно-разностной схемы типа *крест* [14]. Эта разностная схема имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{V_{i+0,5}^n - V_{i+0,5}^{n-1}}{\Delta t} &= \frac{u_{i+1}^{n-0,5} - u_i^{n-0,5}}{\Delta m}; \\ \frac{E_{i+0,5}^n - E_{i+0,5}^{n-0,5}}{0,5\Delta t} &= - (P+q)_{i+0,5}^n \frac{u_{i+1}^{n-0,5} - u_i^{n-0,5}}{\Delta m}; \\ \frac{u_i^{n+0,5} - u_i^{n-0,5}}{\Delta t} &= - \frac{(P+q)_{i+0,5}^n - (P+q)_{i-0,5}^n}{\Delta m}; \\ \frac{E_{i+0,5}^{n+0,5} - E_{i+0,5}^n}{0,5\Delta t} &= - (P+q)_{i+0,5}^n \frac{u_{i+1}^{n+0,5} - u_i^{n+0,5}}{\Delta m}; \\ q_{i+0,5}^n &= -\rho_{i+0,5}^n \Delta u_{i+0,5}^{n-0,5} \left[C_L C_{S_{i+0,5}}^n + 0,5 C_K \left(\left| \Delta u_{i+0,5}^{n-0,5} \right| - \Delta u_{i+0,5}^{n-0,5} \right) \right]; \\ \Delta u_{i+0,5}^{n-0,5} &= u_{i+1}^{n-0,5} - u_i^{n-0,5}. \end{aligned} \quad (2)$$

Для этой схемы структура УВ (сжатия и разрежения) определяется искусственной вязкостью. Но при отсутствии искусственной вязкости аппроксимационная дисперсия преобладает над аппроксимационной вязкостью. Дифференциальное приближение схемы (2) при отсутствии искусственной вязкости ($q = 0$) имеет вид [15]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(V + \frac{\Delta t^2}{24} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \right) &= \frac{\partial}{\partial m} \left(u + \frac{\Delta m^2}{24} \frac{\partial^2 u}{\partial m^2} \right) + O(\Delta t^4 + \Delta m^4); \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(u + \frac{\Delta t^2}{24} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) &= - \frac{\partial}{\partial m} \left(P + \frac{\Delta m^2}{24} \frac{\partial^2 P}{\partial m^2} \right) + O(\Delta t^4 + \Delta m^4); \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(E + \frac{\Delta t^2}{24} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \right) + \left(P + \frac{\Delta t^2}{8} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \right) \frac{\partial}{\partial t} \left(V + \frac{\Delta t^2}{24} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \right) &= O(\Delta t^4). \end{aligned}$$

Структура УВ, т. е. решение в виде бегущей волны $f(t, m) = f(z)$, $z = m - \sigma t$, $\sigma = \text{const} \neq 0$, определяется системой

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \left(u + \frac{\Delta m^2}{24} \frac{d^2 u}{dz^2} + \sigma V + \sigma \frac{\Delta t^2 \sigma^2}{24} \frac{d^2 V}{dz^2} \right) &= O(\Delta t^4 + \Delta m^4); \\ \frac{d}{dz} \left(\sigma u + \sigma \frac{\Delta t^2 \sigma^2}{24} \frac{d^2 u}{dz^2} - P - \frac{\Delta m^2}{24} \frac{d^2 P}{dz^2} \right) &= O(\Delta t^4 + \Delta m^4); \\ \frac{d}{dz} \left(E + \frac{\Delta t^2 \sigma^2}{24} \frac{d^2 E}{dz^2} \right) + \left(P + \frac{\Delta t^2 \sigma^2}{8} \frac{d^2 P}{dz^2} \right) \frac{d}{dz} \left(V + \frac{\Delta t^2 \sigma^2}{24} \frac{d^2 V}{dz^2} \right) &= O(\Delta t^4). \end{aligned} \quad (3)$$

Будем для определенности предполагать, что

$$\rho_1 > \rho_2; \quad V_1 < V_2; \quad P_1 > P_2; \quad \sigma > 0. \quad (4)$$

Структура УВ разрежения $(P_1, V_1) \Rightarrow (P_2, V_2)$ есть решение системы (3) с предельными значениями

$$\begin{aligned} u(z)|_{z \rightarrow -\infty} &= u_2; & u(z)|_{z \rightarrow +\infty} &= u_1; & V(z)|_{z \rightarrow -\infty} &= V_2; & V(z)|_{z \rightarrow +\infty} &= V_1; \\ P(z)|_{z \rightarrow -\infty} &= P_2; & P(z)|_{z \rightarrow +\infty} &= P_1; & S(z)|_{z \rightarrow -\infty} &= S_2; & S(z)|_{z \rightarrow +\infty} &= S_1, \end{aligned} \quad (5)$$

которые удовлетворяют условиям Ренкина—Гюгонио

$$\begin{aligned} \sigma V_1 + u_1 &= \sigma V_2 + u_2; & \sigma u_1 - P_1 &= \sigma u_2 - P_2; \\ \sigma \left[E_1 + \frac{(u_1)^2}{2} \right] - P_1 u_1 &= \sigma \left[E_2 + \frac{(u_2)^2}{2} \right] - P_2 u_2. \end{aligned} \quad (6)$$

Из (6) исключением скоростей получаются известные уравнения Гюгонио

$$\sigma^2 (V_2 - V_1) = P_1 - P_2; \quad (E_2 - E_1) + \frac{P_2 + P_1}{2} (V_2 - V_1) = 0. \quad (7)$$

Обычно при определении структуры УВ дополнительно используется требование затухания осцилляций бегущего решения на бесконечности [1, 2]:

$$\left. \frac{du}{dz} \right|_{z \rightarrow \pm\infty} = \left. \frac{dV}{dz} \right|_{z \rightarrow \pm\infty} = \left. \frac{dP}{dz} \right|_{z \rightarrow \pm\infty} = \left. \frac{dS}{dz} \right|_{z \rightarrow \pm\infty} = 0. \quad (8)$$

С точки зрения формальной интегрируемости совокупность краевых условий (5) и (8) вместе с УРСом дает единственность решения системы уравнений (3).

Дифференцируя дважды уравнения системы (3), получаем соотношения

$$\begin{aligned} \frac{d^3 u}{dz^3} &= -\sigma \frac{d^3 V}{dz^3} + O(\Delta t^2 + \Delta m^2); & \frac{d^3 P}{dz^3} &= -\sigma^2 \frac{d^3 V}{dz^3} + O(\Delta t^2 + \Delta m^2); \\ \frac{d^3 E}{dz^3} &= -\frac{d^2}{dz^2} \left(P \frac{dV}{dz} \right) + O(\Delta t^2 + \Delta m^2), \end{aligned}$$

с помощью которых исключаем в (3) третьи производные от скорости, давления и внутренней энергии и приходим к системе

$$\begin{aligned} \frac{du}{dz} + \sigma \frac{dV}{dz} &= \frac{\Delta m^2 - \sigma^2 \Delta t^2}{24} \sigma \frac{d^3 V}{dz^3} + O(\Delta t^4 + \Delta m^4); \\ \frac{dP}{dz} + \sigma^2 \frac{dV}{dz} &= \frac{\Delta m^2 - \sigma^2 \Delta t^2}{12} \sigma^2 \frac{d^3 V}{dz^3} + O(\Delta t^4 + \Delta m^4); \\ \frac{dE}{dz} + P \frac{dV}{dz} + \frac{\Delta t^2 \sigma^2}{12} \left(\frac{d^2 P}{dz^2} \frac{dV}{dz} - \frac{dP}{dz} \frac{d^2 V}{dz^2} \right) &= O(\Delta t^4). \end{aligned}$$

С помощью второго уравнения исключаем в третьем уравнении вторую и первую производные от давления и, отбрасывая слагаемые четвертого порядка малости, получаем итоговые уравнения (уравнение для скорости уже не требуется)

$$\frac{dP}{dz} + \sigma^2 \frac{dV}{dz} = \mu \sigma^2 \frac{d^3 V}{dz^3}; \quad (9)$$

$$\frac{dE}{dz} + P \frac{dV}{dz} = T \frac{dS}{dz} = 0, \quad (10)$$

которые вместе с краевыми условиями (5) и (8) описывают структуру скачка, размазанного разностной (аппроксимационной) дисперсией.

Обращаем внимание, что полученное свойство (10) изэнтропичности размазанного скачка $S(z) = S_1 = \text{const}$ справедливо только для *стационарного* скачка, бегущего с постоянной скоростью. Для нестационарных размазанных скачков это свойство может нарушиться.

В (9) использовано обозначение

$$\mu = \frac{\Delta m^2 - \sigma^2 \Delta t^2}{12} = \text{const} > 0. \quad (11)$$

Эта постоянная (коэффициент дисперсии) строго положительна, если выполнены (с некоторым запасом) необходимые условия устойчивости разностной схемы (2).

Из (5), (8), (9) и (11) следует, что $\left. \frac{d^3 V}{dz^3} \right|_{z \rightarrow \pm\infty} = 0$. Для достаточно гладкого уравнения состояния $p = P(V, S)$ обыкновенное дифференциальное уравнение (9) также имеет достаточно гладкое решение $V(z)$. Будем считать функцию $f(z) = \frac{dV(z)}{dz}$ дважды непрерывно дифференцируемой. Она удовлетворяет условиям $f(z) \rightarrow 0$ и $f''(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \pm\infty$. Фиксируем некоторый размер Δ (в массовых переменных Лагранжа) и запишем для функции $f(z)$ формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$f(z + \Delta) = f(z) + \Delta f'(z) + \frac{\Delta^2}{2} f''(z + \theta \Delta),$$

где $\theta = \theta(z)$, $0 \leq \theta \leq 1$. Из этой формулы получаем

$$f'(z) = \frac{f(z + \Delta) - f(z)}{\Delta} - \frac{\Delta}{2} f''(z + \theta(z) \Delta).$$

В силу сделанных предположений при фиксированном $\Delta = \text{const} > 0$ каждое из слагаемых справа стремится к нулю при $z \rightarrow \pm\infty$, поэтому $f'(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \pm\infty$. Тем самым доказано, что

$$\left. \frac{d^k V}{dz^k} \right|_{z \rightarrow \pm\infty} = 0, \quad k = 2, 3. \quad (12)$$

Проинтегрируем один раз уравнение (9) и с учетом (7) и (12) получим уравнение

$$\mu \sigma^2 \frac{d^2 V}{dz^2} = F(V) \equiv P(V, S_1) - \frac{P_1(V_2 - V) + P_2(V - V_1)}{V_2 - V_1}.$$

Стандартной заменой $\frac{dV}{dz} = \psi(V)$ оно приводится к уравнению $\mu \sigma^2 \frac{d\psi^2}{dV} = 2F(V)$ с краевыми условиями $\psi(V_1) = \psi(V_2) = 0$, которое имеет решение

$$\frac{\mu \sigma^2}{2} \psi^2 = \Phi(V) \equiv \int_{V_1}^V F(V) dV. \quad (13)$$

Краевое условие $\psi(V_2) = 0$ дает уравнение

$$\int_{V_1}^{V_2} F(V) dV = \int_{V_1}^{V_2} \left[P(V, S_1) - \frac{P_1(V_2 - V) + P_2(V - V_1)}{V_2 - V_1} \right] dV = 0, \quad (14)$$

которое при учете изэнтропичности (10) эквивалентно второму уравнению Гюгонио (7), так как $P(V, S_1) = -\frac{\partial E(V, S_1)}{\partial V}$. Из (13) получаем уравнение $\frac{dV}{dz} = \sqrt{\frac{2}{\mu \sigma^2} \int_{V_1}^V F(V) dV}$, которое в случае (4) в силу (14) имеет решение, удовлетворяющее краевым условиям (5) и (8), если дополнительно выполнено условие

$$\Phi(V) = \int_{V_1}^V F(V) dV = \int_{V_1}^V \left[P(V, S_1) - \frac{(V_2 - V) P_1 + (V - V_1) P_2}{V_2 - V_1} \right] dV > 0, \quad \forall V : V_1 < V < V_2. \quad (15)$$

Существование непрерывного решения при выполнении условий (15) и (14) очевидно. Необходимость этих двух условий для существования непрерывного решения доказана в Приложении 1 работы [3].

Тем самым получены условия, обеспечивающие существование непрерывной структуры.

Полученный результат дополним известными свойствами автомодельных решений задач типа распада разрыва и сформулируем в виде теоремы.

Теорема. *УВ разрежения $(P_1, V_1) \Rightarrow (P_2, V_2)$ (4) с невыпуклым УРСом, удовлетворяющая условиям Ренкина—Гюгонио (6), является допустимой для метода исчезающей нормальной дисперсии тогда и только тогда, когда выполнены следующие два дополнительных условия:*

1) ударный переход $(P_1, V_1) \Rightarrow (P_2, V_2)$ является изэнтропическим:

$$S_2 = S_1; \quad (16)$$

2) функция $\Phi(V)$ (15) строго положительна для всех V внутри интервала $V_1 < V < V_2$.

В автомодельной задаче распада разрыва УВ разрежения единственная, она однозначно определяется уравнениями Ренкина—Гюгонио (6), условием допустимости (16) и требованием, чтобы прямая Рэлея $p = \frac{(V_2 - V)P_1 + (V - V_1)P_2}{V_1 - V_2}$ касалась изэнтропы $p = P(V, S_1)$ в точке (V_1, P_1) .

Второе дополнительное условие (15) означает, что прямая Рэлея обязательно пересекает изэнтропу $p = P(V, S_1)$ строго внутри интервала $V_1 < V < V_2$ и только один раз. Когда изэнтропа $p = P(V, S_1)$ имеет только единственный интервал обратной выпуклости, это условие при наличии касания в точке (V_1, P_1) выполняется автоматически (в этом случае оно является следствием второго уравнения Гюгонио (7)) и поэтому в автомодельной задаче не является дополнительным ограничением (это имеет место, например, для рассматриваемой ниже задачи Бизарриума). Но если изэнтропа $p = P(V, S_1)$ имеет несколько интервалов обратной выпуклости, второе дополнительное условие (15) является существенным дополнительным ограничением. Для неавтомодельных задач это ограничение существенно и при одном интервале обратной выпуклости.

Об эволюционности допустимых УВ разрежения

Рассмотрим вопрос об эволюционности допустимых УВ разрежения, получаемых методом исчезающей вязкости и методом исчезающей нормальной дисперсии. Общеизвестен следующий критерий эволюционности обычных УВ в газовой динамике с нормальными УРСами: *количество характеристик, уходящих вправо и влево от разрыва, в эволюционном случае должно быть в сумме равно двум*. Но в сложных случаях, как уже говорилось в разд. 4 работы [15], вместо указанного выше критерия эволюционности, справедливого для очень частного случая, надо обращаться к определению эволюционности: *скачок называется эволюционным, если задача Коши о взаимодействии скачка с малыми возмущениями однозначно разрешима, т. е. всегда имеет решение, которое является единственным и непрерывно зависит от параметров входящих на скачок малых возмущений*. Точные формулировки и подробные объяснения этого определения можно найти в [16, 1, 2].

В задаче о взаимодействии скачка с малыми возмущениями число неизвестных равно числу выходящих из скачка характеристик плюс малое возмущение скорости скачка. Для корректности этой задачи (для эволюционности) необходимо и (в невырожденном случае) достаточно, чтобы полное число неизвестных было равно полному числу условий на скачке.

Вязкие и дисперсионные допустимые УВ разрежения схематически показаны в виде отрезков прямых Рэлея на (V, P) -диаграммах на рис. 1, а, б. На этом рисунке пунктиром показаны предельные УВ разрежения, реализующиеся в автомодельных задачах распада разрыва. Для автомодельных задач прямая Рэлея в вязком случае касается ударной адиабаты в своих двух крайних точках (V_1, P_1) и (V_2, P_2) , а в дисперсионном случае — изэнтропы в точке (V_1, P_1) .

Для случая общего положения (без касания) поведение характеристик, входящих на допустимую УВ разрежения и выходящих из нее, показано на рис. 2, а, б. Для вязких допустимых УВ

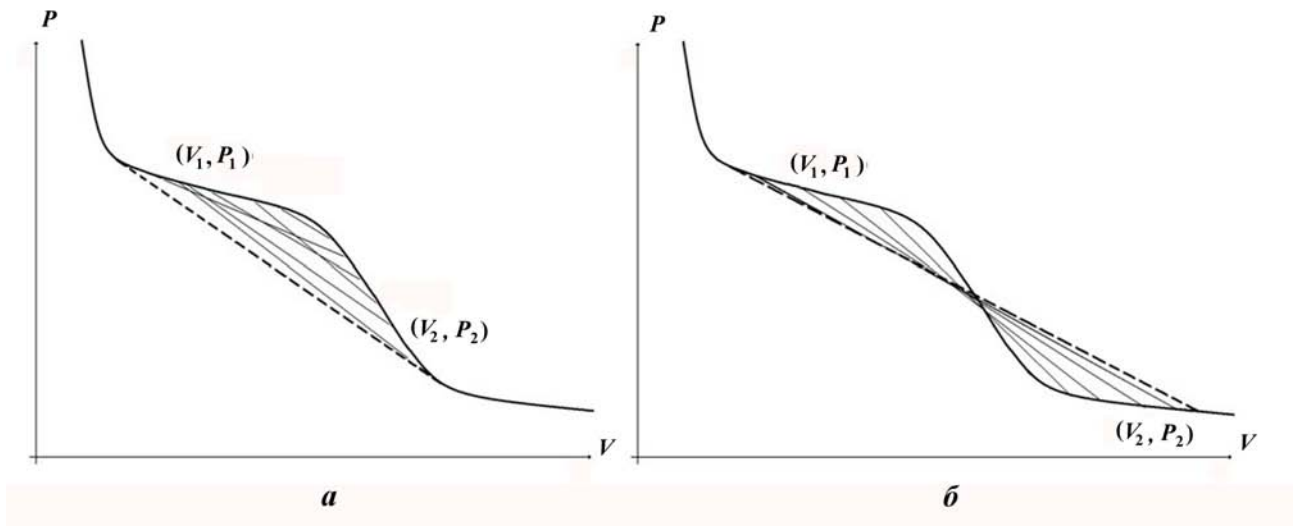


Рис. 1. Отрезки Рэля допустимых УВ разрежения: *a* — для метода исчезающей вязкости; *b* — для метода исчезающей нормальной дисперсии

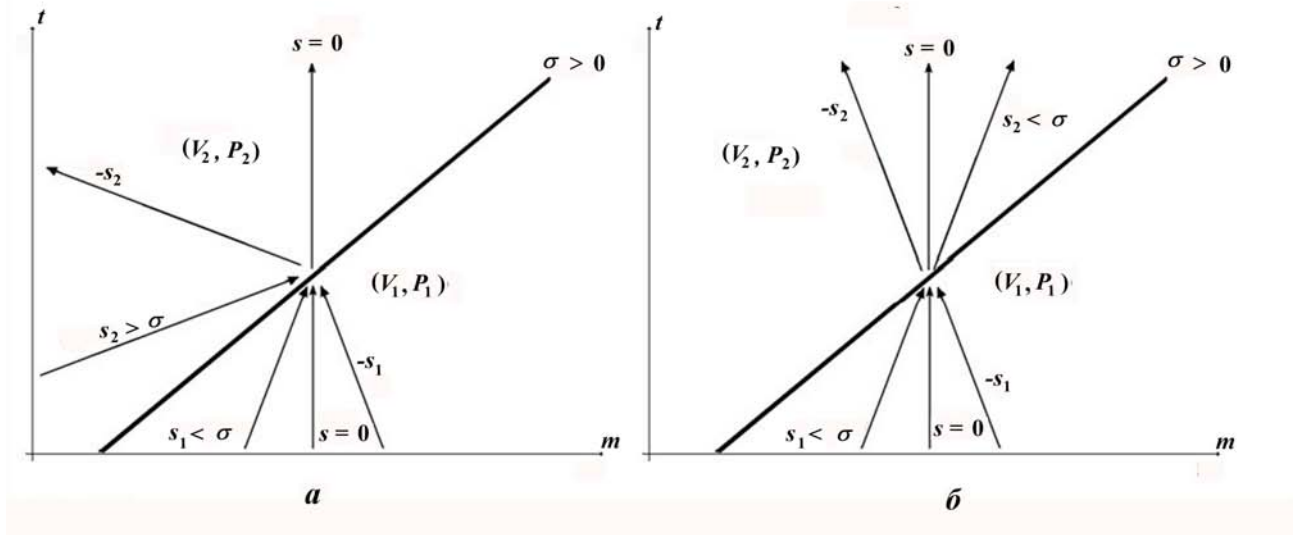


Рис. 2. Характеристики, приходящие на допустимую УВ разрежения общего положения (без касания) и выходящие из нее: *a* — для метода исчезающей вязкости; *b* — для метода исчезающей нормальной дисперсии

разрежения $s_1 = \rho_1 c_1 < \sigma$ и $s_2 = \rho_2 c_2 > \sigma$ из скачка выходят две характеристики: $s = 0$ (возмущения энтропии перемещаются с нулевой массовой скоростью) и $-s_2$. В результате трем условиям на скачке (условия Ренкина–Гюгонно (6)) соответствуют две выходящие из него характеристики и в качестве еще одной неизвестной — возмущение скорости УВ (т. е. $3 = 2 + 1$), и такие УВ разрежения — эволюционные. Для дисперсионных допустимых УВ разрежения $s_1 < \sigma$ и $s_2 < \sigma$ из скачка выходят три характеристики: $s = 0$, $+s_2$ и $-s_2$. В результате четверем условиям на скачке (три условия Ренкина–Гюгонно (6) и одно дополнительное соотношение (16)) соответствуют три выходящие из него характеристики и возмущение скорости УВ (т. е. $4 = 3 + 1$), и такие УВ разрежения также являются эволюционными.

Построение точных решений автомодельной задачи распада разрыва с невыпуклым УРСом (задачи Бизарриума) для разных условий допустимости скачков разрежения

Для иллюстрации полученных выше результатов будем использовать задачу Бизарриума о распаде разрыва для невыпуклого УРСа Бизарриума, которая описана в [9]. Начальные условия приведены в табл. 1, на левой и правой лагранжевых границах заданы скорости, равные соответствующим начальным скоростям.

Невыпуклый УРС Бизарриума определен следующими формулами ($V = 1/\rho$ — удельный объем; E — внутренняя энергия единицы массы; S — энтропия; T — температура; P — давление):

$$E(V, S) = E_X(V) + C_{V0}T_0 \exp\left(\frac{S - S_0}{C_{V0}} + g(V)\right); \quad T(V, S) = \frac{\partial E}{\partial S}; \quad P(V, S) = -\frac{\partial E}{\partial V};$$

$$E_X(V) = E_0 - C_{V0}T_0\left(1 + g(V)\right) + \frac{K_0V_0}{2}x^2F(x); \quad g(V) = \Gamma_0\left(1 - \frac{V}{V_0}\right);$$

$$F(x) = f_0(x) = \frac{1 + \left(\frac{a}{3} - 2\right)x + qx^2 + rx^3}{1 - ax}; \quad x = \frac{V_0}{V} - 1.$$

Числовые параметры приведены в табл. 2. При естественных ограничениях на удельный объем $\frac{aV_0}{1+a} < V < \alpha V_0$ изэнтропы строго монотонны и имеют один участок обратной выпуклости (рис. 3).

Для выпуклых УРСов решение классической задачи распада разрыва может быть построено только в виде какой-либо комбинации из двух волн (ударных либо разрежения), распространяющихся в противоположные стороны. УРСы общего вида (с нарушением ограничений Бете—Вейля) меняют привычную картину течения. В задачах с невыпуклыми УРСами происходит опрокидывание центрированной волны разрежения с образованием УВ разрежения в области гладкого течения.

Таблица 1

Начальные данные для теста Бизарриума

Область	$V, \text{см}^3/\text{г}$	$P, \text{ГПа}$	$U, \text{км/с}$
$0 < x < x_0 = 0,5$ (Y0)	0,07	100	0
$x_0 < x < 1$ (Z0)	0,1	0	0,25

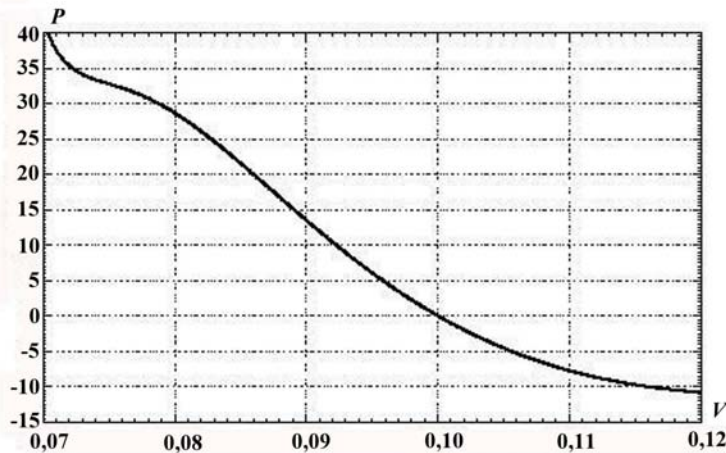


Рис. 3. Зависимость давления от удельного объема вдоль *начальной* изэнтропы $P(V, S = S_0)$ для УРСа Бизарриума

Параметры УРСа Бизарриума

$\rho_0, \text{г/см}^3$	$K_0, \text{ГПа}$	a	q	R	$C_{V0}, \text{кДж}/(\text{г} \cdot \text{К})$	$S_0, \text{кДж}/(\text{г} \cdot \text{К})$	$E_0, \text{кДж/г}$	$T_0, \text{К}$	Γ_0
10	100	1,5	$-\frac{42080895}{14941154}$	$\frac{727668333}{149411540}$	10^{-3}	0	0	300	1,5

В работе [9] приведено точное решение задачи Бизарриума, когда УВ разрежения определена условиями допустимости метода исчезающей вязкости. Еще одно точное решение может быть получено, если потребовать для параметров УВ разрежения выполнения дополнительного условия (16). Эти решения ниже называются соответственно *вязкое точное решение* и *дисперсионное точное решение*. Качественная картина течения для двух условий допустимости разрывов изображена на рис. 4.

Отметим, что параметры УВ разрежения для двух методов (исчезающей вязкости и исчезающей нормальной дисперсии) существенно отличаются друг от друга. Так, для метода исчезающей дисперсии условие сшивки решения на контактной границе становится возможным только при наличии двух УВ (разрежения и сжатия), двигающихся влево.

Положение волнового луча для *вязкой* и *дисперсионной* УВ разрежения изображено на рис. 5. В первом случае имеет место касание прямой Рэлея и ударной адиабаты в начальном и конечном состоянии. Дисперсионная УВ разрежения является изэнтропической. Параметры волны связаны соотношением

$$\int_{V_{Y1}}^{V_{Y2}} \left[P(V, S) - \frac{P(V_{Y1}, S)(V_{Y2} - V) + P(V_{Y2}, S)(V - V_{Y1})}{V_{Y2} - V_{Y1}} \right] dV = 0.$$

Волновой луч пересекает изэнтропу так, что образуются две криволинейные фигуры с равными площадями (см. рис. 5, б). Ударная волна сжатия, распространяющаяся в противоположном направлении, распадается на две УВ, соединенные центрированной волной сжатия (рис. 6).

Профили плотности для двух вариантов точного решения представлены на рис. 7. Следует отметить, что условия допустимости влияют на параметры течения не только в окрестности разрыва, но и за его пределами. Так, для дисперсионного варианта реализуется структура, состоящая из центрированной волны разрежения и двух УВ (разрежения и сжатия).

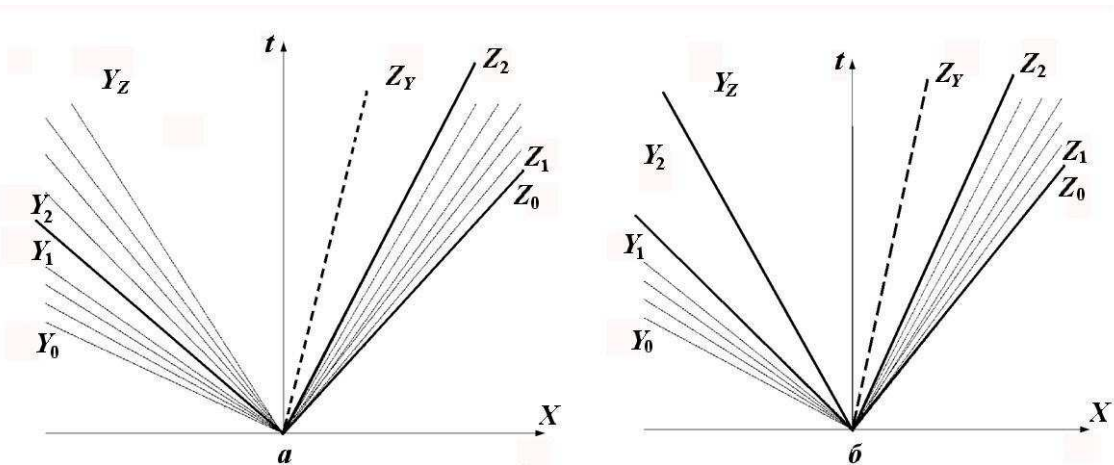


Рис. 4. (X, t) -диаграмма задачи распада разрыва для УРСа Бизарриума: a — с вязкой регуляризацией; b — с дисперсионной регуляризацией; — — положение УВ (сжатия и разрежения, самая левая — УВ разрежения); - - - — контактный разрыв

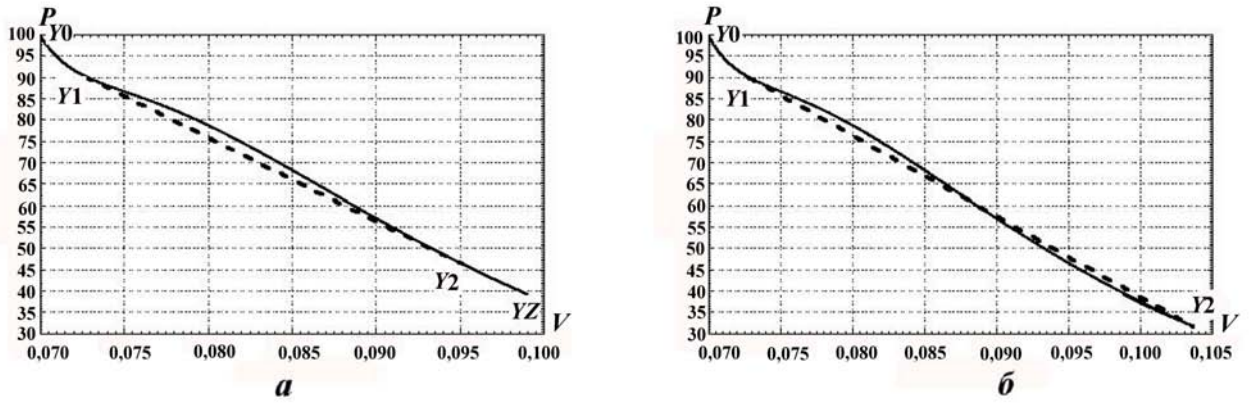


Рис. 5. Положение волнового луча для двух методов регуляризации: a — вязкая регуляризация; b — дисперсионная регуляризация; Y_0 - Y_1 и Y_2 - YZ — центрированные волны разрежения; Y_1 - Y_2 (---) — УВ разрежения

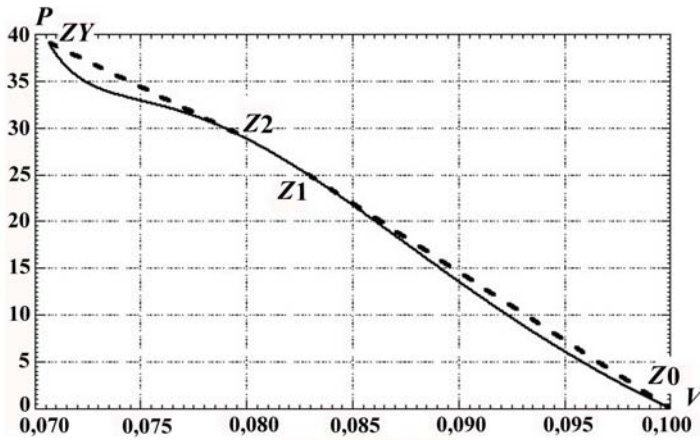


Рис. 6. Положение волновых лучей для УВ сжатия Z_0 - Z_1 и Z_2 - ZY ; Z_1 - Z_2 — центрированная волна сжатия

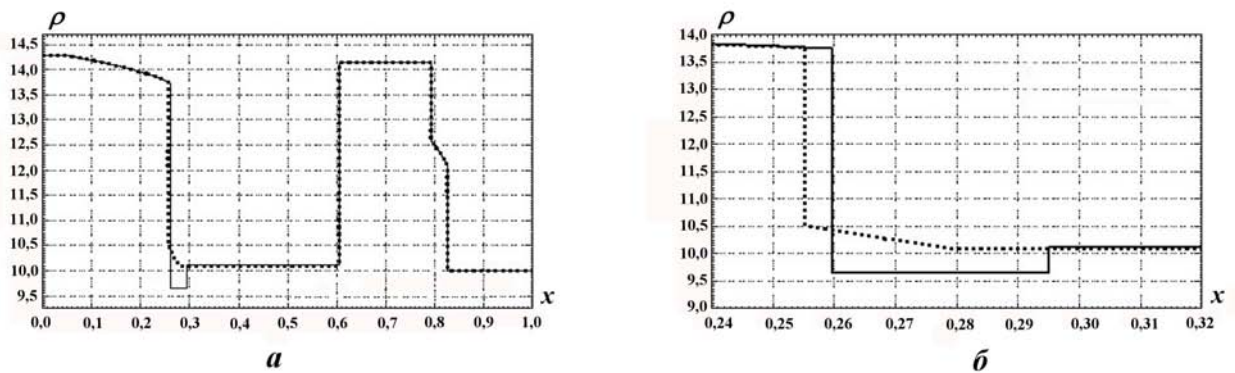


Рис. 7. Плотность на контрольный момент времени $t = 0,08$ в двух автомодельных решениях с разными условиями допустимости скачка разрежения: a — исходная геометрия; b — фрагмент в окрестности УВ разрежения; — вязкая регуляризация; — — дисперсионная регуляризация

Результаты расчетов задачи Бизарриума

Задача Бизарриума использована в [9] для сравнения схем высокого порядка аппроксимации при решении задач с невыпуклыми УРСами. Рассмотрены две схемы *конечного объема* (это vNR —

классическая схема Неймана—Рихтмайера [17] и схема ВВС из [18]), схема Годунова и несколько модификаций схемы Годунова с порядками аппроксимации от второго до пятого. В конечно-объемных схемах применялась квадратичная искусственная вязкость

$$q_{i+0,5}^n = -0,5C_K \rho_{i+0,5}^n \Delta u_{i+0,5}^{n-0,5} \left| \Delta u_{i+0,5}^{n-0,5} \right|, \quad \Delta u_{i+0,5}^{n-0,5} = u_{i+1}^{n-0,5} - u_i^{n-0,5}, \quad (17)$$

или

$$q_{i+0,5}^n = -0,5C_K \rho_{i+0,5}^n \Delta u_{i+0,5}^{n-0,5} \left(\left| \Delta u_{i+0,5}^{n-0,5} \right| - \Delta u_{i+0,5}^{n-0,5} \right), \quad (18)$$

с ограничителем Кристенсена [19]. В схемах Годунова высокого порядка аппроксимации опробованы разные ограничители потоков (Minmod, Superbee, TVD, van Leer).

В [9] для конечно-объемных схем (vNR и ВВС) вязкое решение получается только при искусственной вязкости (17), действующей как на сжатии, так и на разрежении. При искусственной вязкости (18), действующей только на сжатии, сходимость к вязкому решению отсутствует. Анализ графических результатов, представленных в [9], показывает, что численное решение сходится в этом случае к дисперсионному точному решению. Вязкое точное решение воспроизводится как в обычной схеме Годунова первого порядка аппроксимации, так и в различных реализациях схемы Годунова второго порядка точности, если в расчетах используется ограничитель Minmod. Для других ограничителей (а также при их отсутствии) аппроксимационная вязкость в схемах высокого порядка аппроксимации оказывается недостаточной (сходимость к вязкому точному решению отсутствует). Схемы такого типа признаны авторами работы [9] не пригодными для получения разрывных решений в расчетах с невыпуклыми УРСами.

Представленные в [9] результаты расчетов задачи Бизарриума демонстрируют наличие двух типов предельных решений — вязкого и дисперсионного, когда диссипативные или дисперсионные свойства преобладают в разностной схеме и определяют тем самым условия допустимости УВ разрежения.

Рассмотрим результаты расчетов по полностью консервативной разностной схеме *крест* [14] (она в случае плоской симметрии определена формулами (2)) с суммой линейной и квадратичной искусственных вязкостей

$$q_{i+0,5}^n = -\rho_{i+0,5}^n \Psi_{i+1}^{n-0,5} \Delta u_{i+1}^{n-0,5} \left[C_L (c_s)_{i+0,5}^n + 0,5C_K \Psi_{i+1}^{n-0,5} \left(\left| \Delta u_{i+1}^{n-0,5} \right| - \Delta u_{i+1}^{n-0,5} \right) \right],$$

$$\Delta u_{i+0,5}^{n-0,5} = u_{i+1}^{n-0,5} - u_i^{n-0,5}, \quad C_L = 0,5, \quad C_K = 3.$$

Ограничитель вязкости Кристенсена Ψ введен для уменьшения искусственной вязкости в ячейках *гладкости* решения. Он вычисляется по формулам [19]

$$\Psi_{i+0,5}^{n-0,5} = 1 - \max \left\{ 1, \min \{ 1, 2r_-, 2r_+, r_- + r_+ \} \right\}, \quad r_- = \frac{\Delta u_{i-0,5}^{n-0,5}}{\Delta u_{i+0,5}^{n-0,5}}, \quad r_+ = \frac{\Delta u_{i+1,5}^{n-0,5}}{\Delta u_{i+0,5}^{n-0,5}}.$$

Проведены четыре серии расчетов *на сходимость* (каждая с числом ячеек сетки $N=100, 300, 900, 2700, 8100, 24300$ и 100000):

- 1) с вязкостью на разрежении (разумеется, и на сжатии) и с ограничителем вязкости по Кристенсену (рис. 8, 9);
- 2) без вязкости на разрежении (вязкость используется только на сжатии), но также с применением ограничителя вязкости по Кристенсену (рис. 10, 11);
- 3) с вязкостью на разрежении без использования ограничителей вязкости;
- 4) без вязкости на разрежении (вязкость используется только на сжатии) и без применения ограничителей вязкости.

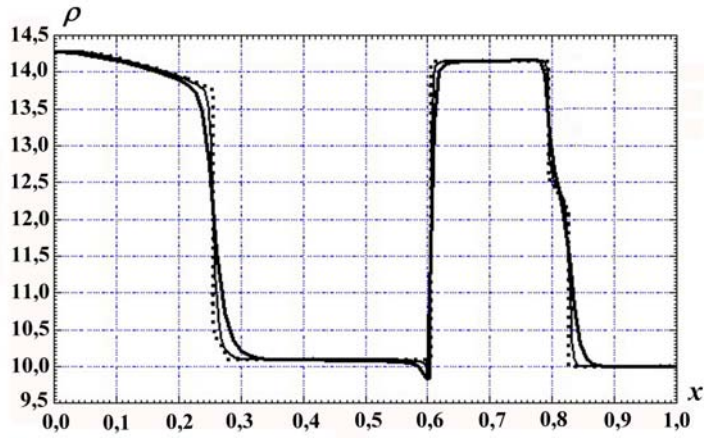


Рис. 8. Профиль плотности в расчетах по консервативной схеме *крест* с вязкостью на разрежении и с ограничителем Кристиенсена (приведены только решения, визуально отличающиеся от точного): — — $N = 100$; — — — — $N = 300$; — эталон (вязкое точное решение)

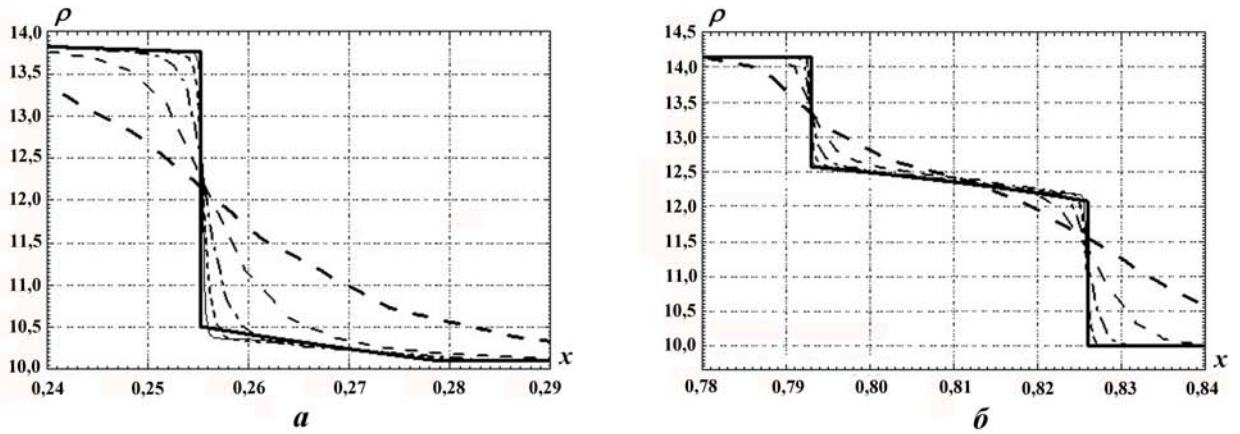


Рис. 9. Увеличенные фрагменты рис. 8: *a* — в окрестности УВ разрежения; *b* — в окрестности централизованной волны сжатия: — эталон; — — — — $N = 100$; — · — · — $N = 300$; — — — — $N = 900$; - - - - $N = 2700$; — — — — $N = 8100$

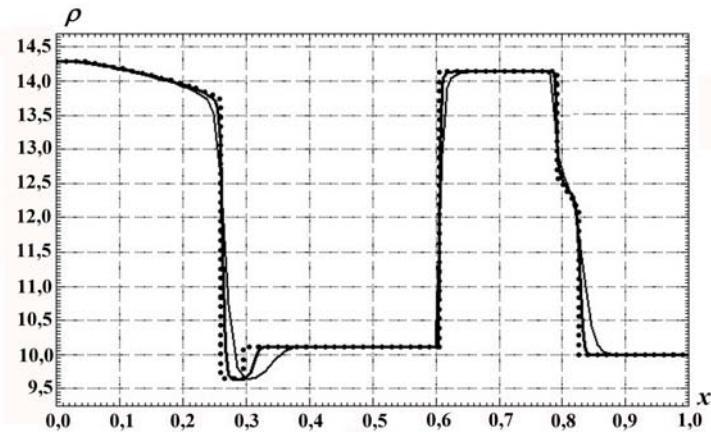


Рис. 10. Профиль плотности в расчетах по консервативной схеме *крест* без вязкости на разрежении и с ограничителем Кристиенсена: — — — — $N = 100$; — — — — $N = 300$; — эталон (дисперсионное точное решение)

Когда линейная вязкость используется и на сжатии, и на разрежении, результаты расчетов сравниваются с вязким точным решением. Когда вязкость на разрежении не используется, результаты расчетов сравниваются с дисперсионным точным решением.

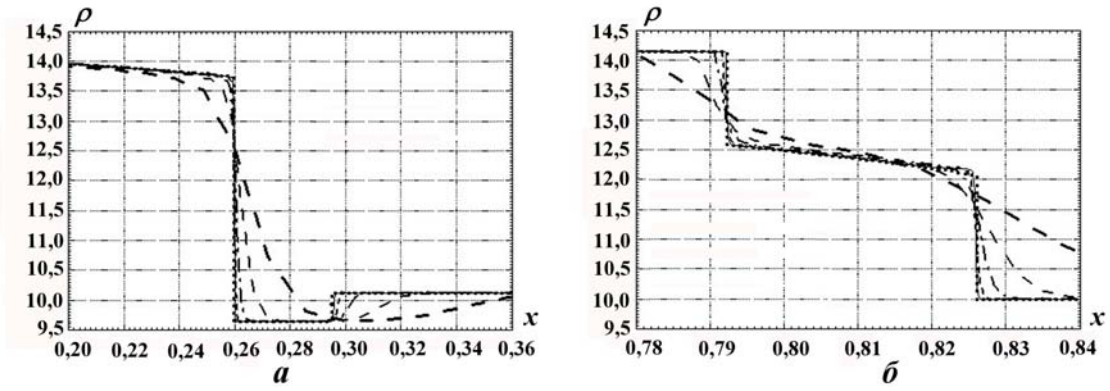


Рис. 11. Увеличенный фрагмент рис. 10: *a* — в окрестности УВ разрежения; *б* — в окрестности центрированной волны сжатия: — эталон; - - - - $N = 100$; - - - - $N = 300$; - · - · - $N = 900$; - - - - $N = 2700$; — — — — $N = 8100$

Из рис. 8—11 видно, что при использовании искусственной вязкости на разрежении численные решения при измельчении сетки приближаются к вязкому точному решению, а при ее отсутствии — к дисперсионному точному решению. При отсутствии ограничителя вязкости Кристенсена сходимость аналогичная. В то же время использование ограничителя вязкости Кристенсена уменьшает норму погрешности в 2-3 раза (рис. 12). Относительная норма погрешности плотности типа L_1 вычислялась по формулам

$$\|\Delta\rho\|_1 = \frac{\sum_{j=1}^N \left| \rho_{j+1/2}^{(N)} - \rho_{j+1/2}^{(\text{эт} \rightarrow N)} \right| \left(x_{j+1}^{(N)} - x_j^{(N)} \right)}{\sum_{k=1}^M \left| \rho_{k+1/2}^{(\text{эт})} - \rho_{k+1/2}^{(\text{сп})} \right| \left(x_{k+1}^{(\text{эт})} - x_k^{(\text{эт})} \right)},$$

$$\rho_{(\text{сп})}^{(\text{эт})} = \frac{\sum_{k=1}^M \rho_{k+1/2}^{(\text{эт})} \left(x_{k+1}^{(\text{эт})} - x_k^{(\text{эт})} \right)}{\sum_{k=1}^M \left(x_{k+1}^{(\text{эт})} - x_k^{(\text{эт})} \right)},$$

$$\rho_{j+1/2}^{(\text{эт} \rightarrow N)} = \frac{\sum_{k=1}^M \rho_{k+1/2}^{(\text{эт})} \text{mes} \left\{ \left[x_j^{(N)}, x_{j+1}^{(N)} \right] \cap \left[x_k^{(\text{эт})}, x_{k+1}^{(\text{эт})} \right] \right\}}{x_{j+1}^{(N)} - x_j^{(N)}}, \quad j = 1, \dots, N, \quad N \ll M.$$

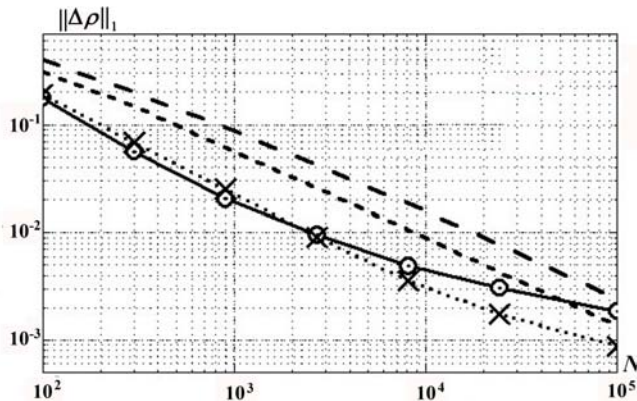


Рис. 12. Зависимости относительных норм (типа L_1 [18]) погрешностей плотности от сетки (N — число ячеек) в сериях расчетов на сходимость по консервативной схеме *крест*: —○— — серия 1; ····· — серия 2; - - - - — серия 3; - - - - — серия 4

Здесь численное решение сравнивается с точным решением, которое предварительно усреднено (с точным сохранением массы) на сетку численного решения. Точное решение задано также на сетке, но уже очень подробной, с полным числом ячеек M . Такой способ вычисления норм погрешностей описан и обоснован в [18]. Для обезразмеривания нормы погрешности она делится на норму отличия точного решения от средней плотности.

Заключение

Известные в литературе результаты о свойствах УВ разрежения в автомоделных задачах типа распада разрыва основаны обычно на предположении, что любые разрывные решения уравнений газовой динамики должны получаться из гладких решений уравнений газовой динамики с вязкостью предельным переходом к бесконечно малому коэффициенту вязкости, т. е. методом исчезающей вязкости.

В настоящей работе для невыпуклых УРСов общего вида получены свойства УВ разрежения для другого способа регуляризации уравнений газовой динамики — с помощью искусственной нормальной дисперсии.

УВ разрежения, полученные методом исчезающей нормальной дисперсии, всегда отличаются от УВ разрежения, полученных методом исчезающей вязкости. Даже скорости таких УВ разрежения в автомоделных решениях задач распада разрыва получаются разными. Для невыпуклых УРСов параметры УВ разрежения зависят от процессов, протекающих внутри фронта размазанной УВ разрежения.

Из этих результатов следует однозначный вывод, что проблема отбора единственной и "правильной" УВ разрежения при моделировании (в том числе и численном) газодинамических процессов должна решаться на уровне выбора физических моделей и зависит от главных физических процессов, которые отбрасываются при написании уравнений идеальной газовой динамики.

Этот результат общего характера проиллюстрирован решением тестовой задачи распада разрыва Бизарриума [9] с невыпуклым УРСом Бизарриума. Построено точное решение этой задачи для дисперсионного условия допустимости УВ разрежения, которое отличается от вязкого решения, описанного в [9].

Проведенные расчеты на сходимость показали, что при использовании искусственной вязкости на разрежении численные решения при измельчении сетки приближаются к вязкому точному решению, а при ее отсутствии — к дисперсионному точному решению. Результаты расчетов, описанных в [9] и проведенных по большому списку различных разностных схем, также показывают наличие двух типов предельных решений.

Список литературы

1. Куликовский А. Г. Сильные разрывы в течениях сплошных сред и их структура // Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР. 1988. Т. 182. С. 261—291.
2. Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семёнов А. Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001.
3. Бондаренко Ю. А., Софронов В. Н., Копышев В. П., Хрусталёв В. В. Неединственность ударных волн разрежения: влияние вязкости и дисперсии // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2003. Вып. 4. С. 3—12.
4. Бондаренко Ю. А., Софронов В. Н. Неединственность ударных волн разрежения: роль межфазной кинетики // Там же. 2004. Вып. 1. С. 28—46.
5. Бондаренко Ю. А., Софронов В. Н., Копышев В. П., Хрусталёв В. В. Влияние вязкости, дисперсии и кинетики фазовых переходов на параметры ударных волн разрежения // Труды РФЯЦ-ВНИИЭФ. 2005. Вып. 9. С. 6—29.

6. *Галин Г. Я.* К теории ударных волн // Докл. АН СССР. 1959. Т. 127, № 1. С. 55—58.
7. *Куликовский А. Г.* О возможном влиянии колебаний в структуре разрыва на множество допустимых разрывов // Докл. АН СССР. 1984. Т. 275, № 6. С. 1349—1352.
8. *Куликовский А. Г., Гвоздовская Н. И.* О влиянии дисперсии на множество допустимых разрывов в механике сплошной среды // Труды Математического института им. В. А. Стеклова РАН. 1998. Т. 223. С. 63—73.
9. *Heuze O., Jaouen S., Jourdren H.* Dissipative issue of high-order shock capturing schemes with non-convex equation of state // J. Comp. Phys. 2009. Vol. 228. P. 833—860.
10. *Борисов Ал. А., Борисов А. А., Кутателадзе С. С., Накоряков В. Е.* Эволюция волн разрежения вблизи критической точки // Письма в ЖЭТФ. 1980. Т. 31. Вып. 11. С. 619—622.
11. *Яненко Н. Н.* Проблемы вычислительной механики // В кн.: Яненко Н. Н. Очерки, статьи, воспоминания. Новосибирск: Наука, 1988.
12. *Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П.* Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1963.
13. *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978.
14. *Бондаренко Ю. А.* Консервативное расщепление энергии в разностных схемах типа "крест" для лагранжевой газовой динамики // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1997. Т. 37, № 8. С. 1020—1023.
15. *Бондаренко Ю. А.* Влияние вязкости и дисперсии на допустимость скачков разрежения, возникающих на фронте энерговыделения, бегущего с заданной массовой скоростью // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2009. Вып. 2. С. 3—20.
16. *Куликовский А. Г., Любимов Г. А.* Магнитная гидродинамика. М.: Логос, 2005.
17. *Von Neuman J., Richtmyer R.* A method for the numerical calculation of hydrodynamic shocks // J. Appl. Phys. 1950. Vol. 21. P. 232.
18. *Woodward P., Colella P.* The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks // J. Comp. Phys. 1984. Vol. 54, No 1. P. 115—173.
19. *Christensen R. B.* High resolution hydrodynamics using artificial viscosity // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1996. Вып. 4. С. 89—93.

Статья поступила в редакцию 27.08.12.
