УДК 517.958:536.2

УПРОЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ФЛЕКА

В. В. Завьялов, А. А. Шестаков
(РФЯЦ-ВНИИТФ)

Построены аналитические решения для стационарной системы уравнений спектрального переноса излучения с условиями, взятыми из задач Флека. Приведено сравнение с численным расчетом. Показано, что температура вещества, полученная из численных расчетов, хорошо согласуется с вычисленной по построенным аналитическим формулам.

Ключевые слова: перенос излучения, задачи Флека.

Введение

В 1971 году Д. Флеком [1], специалистом по переносу излучения из Ливерморской национальной лаборатории США, были предложены четыре задачи, которые со временем стали классическими тестовыми задачами по переносу излучения.

Их достоинствами являются:

- простота постановки граничных и начальных условий, что позволяет выполнять расчеты в различных приближениях;
- простые аналитические формулы для спектральных пробегов;
- широкий диапазон изменения спектрального коэффициента поглощения;
- моделирование разрывов спектрального коэффициента поглощения по пространству и энергетическому спектру;
- простейшее уравнение состояния идеального газа.

Многие методики, создаваемые для решения задач переноса излучения, используют задачи Флека для тестирования, и, по мнению авторов, по рейтингу цитируемости в статьях по переносу излучения работа [1] занимает первое место.

Во всех задачах Флека плоский слой прогревается потоком излучения, соответствующим температуре 1 кэВ. Начальная температура равна нулю, плотность вещества единичная, задача рассматривается без учета газодинамического движения и рассеяния, используется уравнение состояния идеального газа. Коэффициент поглощения света задается в виде формулы

$$\kappa_\varepsilon = \frac{\kappa_0}{\varepsilon^3}\left(1 - e^{-\varepsilon/T}\right),$$

где T — температура; ε — энергия фотонов; κ_0 — некоторая константа.

Частое использование в численных методиках тестов Флека приводит к потребности иметь аналитические формулы для решения этих задач. В данной работе сделана попытка построить аналитические решения стационарной системы уравнений переноса спектрального излучения и энергии для первой и второй задач Флека.

Аналитическое решение системы уравнений переноса спектрального излучения и энергии в стационарном случае

Рассмотрим спектральную систему уравнений переноса излучения и энергии в общем случае:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial I_\nu}{\partial t}+\vec{\Omega}\nabla I_\nu+(\kappa_\nu+\chi_\nu)\,I_\nu=\frac{1}{4\pi}\left(\kappa_\nu B_\nu+\chi_\nu\int\limits_\Omega I_\nu\left(t,\vec{r},\vec{\Omega}\right)d\vec{\Omega}\right);$$

$$\frac{\partial E}{\partial t}=\int\limits_0^\infty\kappa_\nu\int\limits_\Omega\left(I_\nu-\frac{1}{4\pi}B_\nu\right)d\vec{\Omega}d\nu.$$

Здесь t — время; c — скорость света; $\vec{\Omega}$ — единичный вектор в направлении движения фотонов; ν — частота; $I_\nu\left(t,\vec{r},\vec{\Omega}\right)$ — интенсивность излучения фотонов; κ_ν — коэффициент поглощения фотонов; χ_ν — коэффициент рассеяния фотонов; $B_\nu=4\pi\dfrac{2h}{c^2}\dfrac{\nu^3}{e^{h\nu/T}-1}=\dfrac{p_0\varepsilon^3}{e^{\varepsilon/T}-1}$ — функция Планка с множителем $p_0=ph$, где h — постоянная Планка, $p=\dfrac{8\pi}{c^2h^3}$; $\varepsilon=h\nu$ — энергия фотона; $\int\limits_0^\infty B_\nu d\nu=c\sigma T^4$, σ — постоянная Стефана—Больцмана.

В стационарном случае при $\chi_\nu=0$ (условия задач Флека) получаем

$$\vec{\Omega}\nabla I_\nu+\kappa_\nu I_\nu=\kappa_\nu I_{p\nu}; \tag{1}$$

$$\int\limits_0^\infty\kappa_\nu\int\limits_\Omega\left(I_\nu-I_{p\nu}\right)d\vec{\Omega}d\nu=0. \tag{2}$$

Запишем уравнение (1) в операторном виде

$$LI_\nu=I_{p\nu},$$

где $L=E+\left(\vec{\Omega},\kappa_\nu^{-1}\nabla\right)$; $EI_\nu=I_\nu$; $I_{p\nu}=\dfrac{1}{4\pi}B_\nu$ в общем случае, $I_{p\nu}=0{,}5B_\nu$ в плоской и сферически-симметричной геометриях. Тогда точное значение интенсивности можно записать в виде

$$I_\nu=L^{-1}I_{p\nu}.$$

Следуя работе [2], разложим в ряд Неймана резольвенту оператора $\left(\vec{\Omega},\kappa_\nu^{-1}\nabla\right)$:

$$\left[E+\left(\vec{\Omega},\kappa_\nu^{-1}\nabla\right)\right]^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\vec{\Omega},\kappa_\nu^{-1}\nabla\right)^n=E-\left(\vec{\Omega},\kappa_\nu^{-1}\nabla\right)+\left(\vec{\Omega},\kappa_\nu^{-1}\nabla\right)^2-\ldots. \tag{3}$$

Тогда точное значение интенсивности можно записать в виде бесконечного ряда

$$I_\nu=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\vec{\Omega},\kappa_\nu^{-1}\nabla\right)^nI_{p\nu}=I_{p\nu}-\left(\vec{\Omega},\kappa_\nu^{-1}\nabla\right)I_{p\nu}+\left(\vec{\Omega},\kappa_\nu^{-1}\nabla\right)^2I_{p\nu}-\ldots. \tag{4}$$

В плоской геометрии это выражение имеет вид

$$I_\nu=I_{p\nu}-\frac{\mu}{\kappa_\nu}\frac{\partial I_{p\nu}}{\partial r}+\frac{\mu^2}{\kappa_\nu}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\kappa_\nu}\frac{\partial I_{p\nu}}{\partial r}\right)-\frac{\mu^3}{\kappa_\nu}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{\kappa_\nu}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\kappa_\nu}\frac{\partial I_{p\nu}}{\partial r}\right)\right]+\ldots. \tag{5}$$

Разложение (3) имеет место для непрерывных операторов с нормой меньше единицы. Обоснование применения ряда Неймана для численных методов решения уравнения переноса приведено в работах Ларсена [3, 4].

Если известна равновесная интенсивность $I_{p\nu}$, которая определяется распределением температуры $T(r)$, то по заданному коэффициенту рассеяния можно сразу найти аналитическое выражение интенсивности I_ν. Из (5) видно, что в оптически плотных средах при $\kappa_\nu \to \infty$ и в направлениях, близких к $\mu = 0$, получаем $I_\nu \to I_{p\nu}$.

Для нахождения температуры подставим выражение (4) в (2):

$$\int_0^\infty \kappa_\nu \int_\Omega \left[\sum_{n=1}^\infty (-1)^n \left(\vec{\Omega}, \kappa_\nu^{-1}\nabla\right)^n I_{p\nu}\right] d\vec{\Omega} d\nu = 0.$$

Используя известные соотношения [2]

$$\int_\Omega \left(\vec{\Omega}, \kappa_\nu^{-1}\nabla\right)^n d\vec{\Omega} = \begin{cases} 0 & \text{для } n = 1, 3, 5, \ldots; \\ \dfrac{4\pi}{n+1}\left(\kappa_\nu^{-1}\nabla\right)^n = M_n & \text{для } n = 0, 2, 4, \ldots, \end{cases}$$

получаем

$$\int_0^\infty \kappa_\nu \left(\sum_{n=1}^\infty M_{2n} I_{p\nu}\right) d\nu = 0. \qquad (6)$$

Например, для первого оператора M_2

$$M_2 I_{p\nu} = \int_\Omega \left(\vec{\Omega}, \kappa_\nu^{-1}\nabla\right)^2 I_{p\nu} d\vec{\Omega} = \frac{4\pi}{3\kappa_\nu}\left(\nabla, \kappa_\nu^{-1}\nabla I_{p\nu}\right).$$

В плоской геометрии оператор M_n, $n = 0, 2, 4, \ldots$, имеет вид

$$M_n = \int_{-1}^1 \left(\mu, \kappa_\nu^{-1}\nabla\right)^n d\mu = \frac{2}{n+1}\left(\kappa_\nu^{-1}\nabla\right)^n,$$

и вместо уравнения (6) получаем

$$\int_0^\infty \left\{\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\kappa_\nu}\frac{\partial I_{p\nu}}{\partial r}\right) + \frac{1}{5}\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{\kappa_\nu}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{\kappa_\nu}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\kappa_\nu}\frac{\partial I_{p\nu}}{\partial r}\right)\right]\right\} + \ldots\right\} d\nu = 0. \qquad (7)$$

Сначала рассмотрим решение в самом простом случае — плоской геометрии при постоянном κ_ν.

Для нахождения температуры из (7) получаем уравнение

$$\frac{1}{3\kappa}\frac{d^2\left(T^4\right)}{dr^2} + \frac{1}{5\kappa^3}\frac{d^4\left(T^4\right)}{dr^4} + \frac{1}{7\kappa^5}\frac{d^6\left(T^4\right)}{dr^6} + \ldots = 0.$$

Его решениями являются решения уравнения Лапласа $\dfrac{d^2\left(T^4\right)}{dr^2} = 0$.

Решением уравнения Лапласа является линейная функции от r для T^4:

$$T^4 = T_0 r + T_1,$$

где T_0, T_1 — некоторые константы.

Для однозначности этого решения надо поставить граничные условия. На одной границе зададим равновесную интенсивность $I_\nu = I_{gr} = I_{p\nu}(T_{gr})$, зависящую от граничной температуры T_{gr}, а на другой — условие свободной поверхности $I_\nu = 0$ при $\left(\vec{\Omega}, \vec{n}\right) < 0$. С учетом уравнения (5), если на границе задавать входящий поток μI_ν, то при $\mu > 0$ получаем

$$\int\limits_0^1 \mu I_\nu d\mu = I_{p\nu} \int\limits_0^1 \mu d\mu - \frac{1}{\kappa}\frac{\partial I_{p\nu}}{\partial r} \int\limits_0^1 \mu^2 d\mu + \frac{1}{\kappa^2}\frac{\partial^2 I_{p\nu}}{\partial r^2} \int\limits_0^1 \mu^3 d\mu - \ldots = \frac{1}{2} I_{p\nu} - \frac{1}{3\kappa}\frac{\partial I_{p\nu}}{\partial r} + \frac{1}{4\kappa^2}\frac{\partial^2 I_{p\nu}}{\partial r^2} - \ldots .$$

При $\mu < 0$

$$\int\limits_{-1}^0 \mu I_\nu d\mu = I_{p\nu} \int\limits_{-1}^0 \mu d\mu - \frac{1}{\kappa}\frac{\partial I_{p\nu}}{\partial r} \int\limits_{-1}^0 \mu^2 d\mu + \frac{1}{\kappa^2}\frac{\partial^2 I_{p\nu}}{\partial r^2} \int\limits_{-1}^0 \mu^3 d\mu - \ldots = -\frac{1}{2} I_{p\nu} - \frac{1}{3\kappa}\frac{\partial I_{p\nu}}{\partial r} - \frac{1}{4\kappa^2}\frac{\partial^2 I_{p\nu}}{\partial r^2} + \ldots .$$

После интегрирования по спектру на левой границе ($r = 0$) при $T_{gr} = 1$ получаем $\dfrac{T_1}{2} - \dfrac{T_0}{3\kappa} = \dfrac{1}{2}$, на правой границе ($r = R$) получаем $\dfrac{T_0 R + T_1}{2} + \dfrac{T_0}{3\kappa} = 0$. Тогда выражения для температуры и потока принимают вид

$$T = \sqrt[4]{\frac{R - r + \dfrac{2}{3\kappa}}{R + \dfrac{4}{3\kappa}}}; \qquad S = \frac{c\sigma}{3\kappa R + 4} = \mathrm{const}.$$

Сравним температуры, полученные из аналитических и численных расчетов. На рис. 1 приведены профили температуры вещества, посчитанной по TVD-схеме второго порядка при $\kappa = 10$, $R = 4$ и по аналитической формуле. В расчетах рассматривалась область $1 = r_0 \leq r \leq r_1 = 5$, поэтому

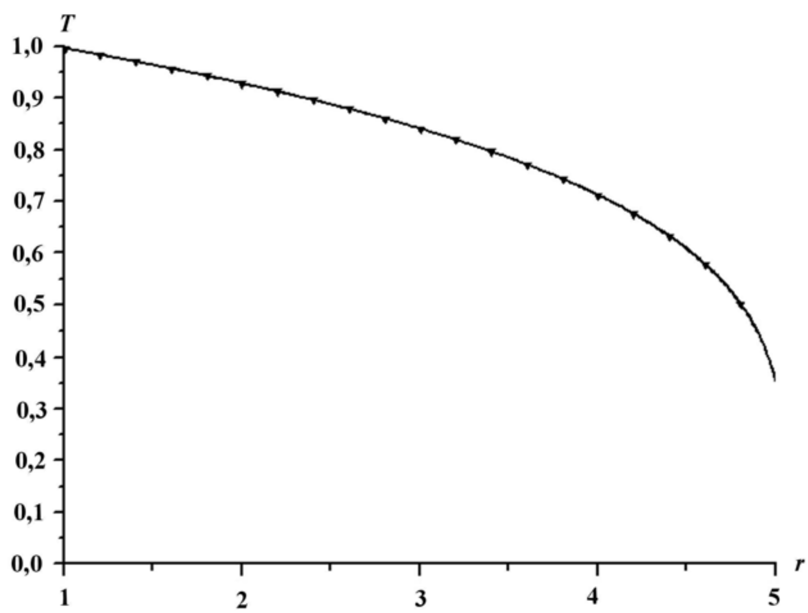

Рис. 1. Профили температуры вещества: —— — численный расчет; —▼— — аналитическое решение

в аналитической формуле r заменялась на $r - r_0$, R заменялась на $r_1 - r_0$. Из рис. 1 видно, что аналитическая формула хорошо описывает численное решение.

Можно рассмотреть более сложные формулы для коэффициента поглощения. При $\kappa = \kappa_0 T^{-m}$, $m > 0$ из уравнения энергии (7) получаем

$$\int\limits_0^\infty \left\{ \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\kappa_\nu}\frac{\partial I_{p\nu}}{\partial r}\right) + \frac{1}{5}\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{\kappa_\nu}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{\kappa_\nu}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\kappa_\nu}\frac{\partial I_{p\nu}}{\partial r}\right)\right]\right\} + \ldots \right\} d\nu =$$
$$= \frac{1}{3}\frac{d}{dr}\left(\frac{T^m}{\kappa_0}\frac{dT^4}{dr}\right) + \frac{1}{5}\frac{d}{dr}\left\{\frac{T^m}{\kappa_0}\frac{d}{dr}\left[\frac{T^m}{\kappa_0}\frac{d}{dr}\left(\frac{T^m}{\kappa_0}\frac{dT^4}{dr}\right)\right]\right\} + \ldots =$$
$$= \frac{4}{m+4}\left(\frac{1}{3\kappa_0}\frac{d^2T^{m+4}}{dr^2} + \frac{1}{5\kappa_0^3}\frac{d}{dr}\left\{T^m\frac{d}{dr}\left[T^m\frac{d^2T^{m+4}}{dr^2}\right]\right\} + \ldots\right) = 0.$$

Если занулить первый член этого ряда, рассмотрев уравнение Лапласа $\dfrac{d^2T^{m+4}}{dr^2} = 0$, все остальные члены ряда занулятся автоматически, т. е. решениями дифференциального уравнения являются все гармонические функции $T^{m+4} = T_0\,(r - r_0) + T_1$.

Решение для первой задачи Флека

Проинтегрируем уравнение (7) по частоте для коэффициента поглощения $\kappa_\varepsilon = \dfrac{\kappa_0}{\varepsilon^3}\left(1 - e^{-\varepsilon/T}\right)$, рассмотренного в работе Флека [1]. Тогда уравнение (7) принимает вид $\dfrac{d^2T^7}{dr^2} + O\left(\dfrac{1}{\kappa_0^3}\right) = 0$.

Вместо решения этого уравнения рассмотрим решение уравнения $\dfrac{d^2T^7}{dr^2} = 0$, которое является уравнением Лапласа для функции T^7. При решении уравнения Лапласа получаем

$$T^7 = T_0\,(r - r_0) + T_1,$$

где T_0, T_1 — некоторые константы.

В задаче Флека на одной границе задается входящий поток от единичной температуры, а на другой — условие свободной поверхности: $I_\nu = 0$ при $\left(\vec{\Omega}, \vec{n}\right) < 0$. Таким образом, имеем:

$$\frac{c\sigma T^4}{4} - \frac{m}{3}\frac{dT^7}{dr} = \frac{c\sigma T_1^{4/7}}{4} - \frac{mT_0}{3} = \frac{c\sigma}{4}, \quad m \approx \frac{230\,737}{\kappa_0} \quad \text{при } r = r_0;$$
$$\frac{c\sigma T^4}{4} + \frac{m}{3}\frac{dT^7}{dr} = \frac{c\sigma}{4}\left(T_0R + T_1\right)^{4/7} + \frac{mT_0}{3} = 0 \quad \text{при } r = R + r_0.$$

Из этих условий получаем уравнение для нахождения T_0:

$$\left(1 + \frac{4mT_0}{3c\sigma}\right)^{7/4} - \left(-\frac{4mT_0}{3c\sigma}\right)^{7/4} + T_0R = 0.$$

Это уравнение можно решить численно итерационным методом Ньютона.

Отсюда, например, при $\kappa_0 = 1\,000$

$$T_0 \approx -0{,}24191; \qquad T_1 = \left(1 + \frac{4mT_0}{3c\sigma}\right)^{7/4} \approx 0{,}968.$$

Тогда для температуры и потока получаем

$$T = \sqrt[7]{T_0\,(r - r_0) + T_1} \approx \sqrt[7]{0{,}968 - 0{,}242\,(r - r_0)}; \qquad S = -\frac{2mT_0}{3} \approx 37{,}2.$$

При $\kappa_0 = 10\,000$

$$T = \sqrt[7]{T_0\,(r - r_0) + T_1} \approx \sqrt[7]{0{,}997 - 0{,}249\,(r - r_0)}; \quad S = -\frac{2mT_0}{3} \approx 3{,}83,$$

где $T_0 \approx -0{,}24918$; $T_1 = \left(1 + \dfrac{4mT_0}{3c\sigma}\right)^{7/4} \approx 0{,}99674$.

На рис. 2 приведены профили температуры вещества, рассчитанной по TVD-схеме при $r_0 = 1$, $R = 4$ и по аналитической формуле. Число точек по пространству выбрано из расчетов на получение сходимости численного решения. Видно, что температура вещества, рассчитанная численно, хорошо согласуется с полученной по аналитической формуле.

Решение для второй задачи Флека

Во второй задаче Флека в центре системы вводится оптически плотная область 1 ($r_0 \le r \le r_0 + R_1$) с $\kappa_2 = 10\,000$. В области 2 ($r_0 + R_1 \le r \le r_0 + R_2$) и области 3 ($r_0 + R_2 \le r \le r_0 + R$) $\kappa_1 = 27$. Используя в каждой области приближенное решение, полученное для первой задачи Флека, имеем:

– в области 1 $\quad T^7 = T_0\,(r - r_0) + T_1; \quad S = -\dfrac{2m_1T_0}{3\kappa_1}$;

– в области 2 $\quad T^7 = T_2\,(r - r_0) + T_3; \quad S = -\dfrac{2m_1T_2}{3\kappa_2}$;

– в области 3 $\quad T^7 = T_4\,(r - r_0) + T_5; \quad S = -\dfrac{2m_1T_4}{3\kappa_1}$,

где T_0, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 — константы, определяемые из граничных условий;

$$m_1 = \frac{pm_0}{14} \approx 230\,737; \quad m_0 = \int\limits_0^\infty \frac{x^7 e^{2x}}{(e^x - 1)^3}dx = 2\,520\zeta\,(7) + \frac{8}{3}\pi^6 \approx 5\,103{,}9; \quad \kappa_\nu = \kappa_i \frac{(e^x - 1)}{\varepsilon^3 e^x}, \quad i = 1, 2;$$

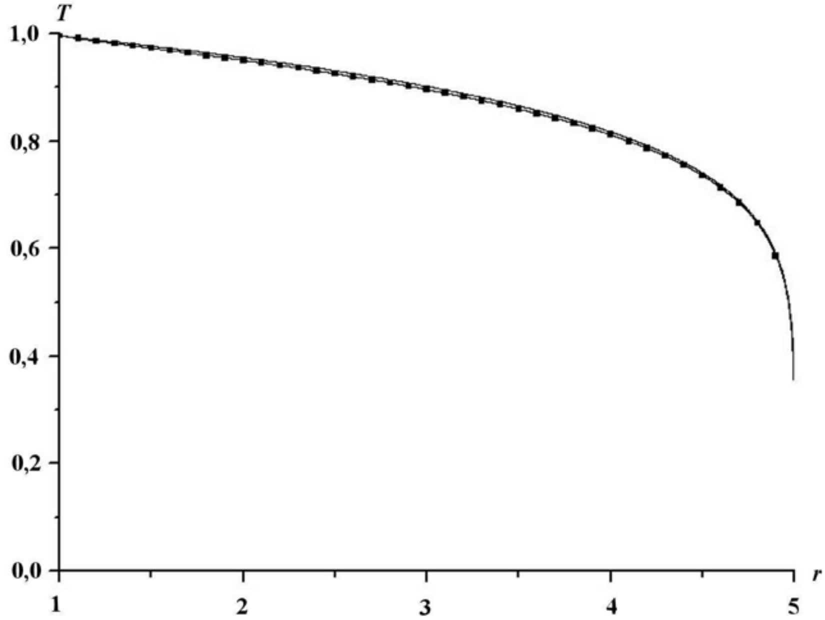

Рис. 2. Первая задача Флека. Профили температуры при $\kappa_0 = 1\,000$: —— — аналитическое решение; —■— — численное решение

$x = \varepsilon/T$; $\zeta(p) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-p}$ — функция Римана.

На границах между областями будем требовать выполнения условия непрерывности потока

$$T_2 = \frac{\kappa_2}{\kappa_1} T_0; \quad T_4 = T_0$$

и условий непрерывности температуры

$$T_0 R_1 + T_1 = T_2 R_1 + T_3; \quad T_2 R_2 + T_3 = T_4 R_2 + T_5.$$

Если на левой и правой границах задавать односторонние потоки, то получаем

$$T_1 = \left(1 + \frac{4m_1 T_0}{3c\sigma\kappa_1}\right)^{7/4}; \quad T_2 = \frac{\kappa_2}{\kappa_1} T_0; \quad T_3 = \left(1 + \frac{4m_1 T_0}{3c\sigma\kappa_1}\right)^{7/4} - \left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1} - 1\right) T_0 R_1;$$

$$T_4 = T_0; \quad T_5 = \left(-\frac{4m_1 T_0}{3c\sigma\kappa_1}\right)^{7/4} - T_0 R.$$

Константа T_0 находится из уравнения

$$F = \left(1 + \frac{4m_1 T_0}{3c\sigma\kappa_1}\right)^{7/4} - \left(-\frac{4m_1 T_0}{3c\sigma\kappa_1}\right)^{7/4} + \left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1} - 1\right) T_0 (R_2 - R_1) + T_0 R = 0.$$

При $r_0 = 0$; $R_1 = 2$; $R_2 = 2{,}4$; $R = 4$; $\kappa_1 = 27$; $\kappa_2 = 10\,000$ имеем

$$T_0 \approx -0{,}00638; \quad T_1 = (1 + 2{,}7724 T_0)^{7/4} \approx 0{,}96925; \quad T_2 = \frac{\kappa_2}{\kappa_1} T_0 \approx -2{,}3630;$$

$$T_3 = T_1 - \frac{19\,946}{27} T_0 \approx 5{,}6824; \quad T_4 = T_0; \quad T_5 \approx (-2{,}7724 T_0)^{7/4} - 4T_0 \approx 0{,}02637.$$

В итоге получаем:

- в области 1 $\quad T \approx \sqrt[7]{0{,}96925 - 0{,}00638\,(r - r_0)}$; $\quad S \approx 36{,}35$;
- в области 2 $\quad T \approx \sqrt[7]{5{,}6824 - 2{,}363\,(r - r_0)}$; $\quad S \approx 36,35$;
- в области 3 $\quad T \approx \sqrt[7]{0{,}02637 - 0{,}00638\,(r - r_0)}$; $\quad S \approx 36,35$.

Еще более простые формулы для температуры можно получить, используя слева значение температуры $T = 1$, а справа $T = 0$. Хотя в предыдущем случае температура на границе не обращается в нуль, поведение профилей температур в обоих случаях очень близко.

Слева из условия $T = 1$ получаем $T_1 = 1$. Справа из условия $T = 0$ получаем $T_4 R + T_5 = 0$, или $T_5 = -T_0 R$. Из условий непрерывности температуры следует

$$T_3 = 1 - \left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1} - 1\right) T_0 R_1, \quad T_0 = -\frac{1}{R + \left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1} - 1\right)(R_2 - R_1)}.$$

При $r_0 = 0$; $R_1 = 2$; $R_2 = 2{,}4$; $R = 4$; $\kappa_1 = 27$; $\kappa_2 = 10\,000$ имеем

$$T_0 \approx -0{,}00659; \quad T_1 = 1; \quad T_2 = \frac{\kappa_2}{\kappa_1} T_0 \approx -2{,}44; \quad T_3 = 1 - 2\frac{9973}{27} T_0 \approx 5{,}8683; \quad T_4 = T_0; \quad T_5 = -4T_0.$$

В итоге получаем:

- в области 1 $\quad T \approx \sqrt[7]{1 - 0{,}00659\,(r - r_0)}$; $\quad S \approx 37,54$;
- в области 2 $\quad T \approx \sqrt[7]{5{,}8683 - 2{,}44\,(r - r_0)}$; $\quad S \approx 37,54$;
- в области 3 $\quad T \approx \sqrt[7]{0{,}00659\,(4 + r_0 - r)}$; $\quad S \approx 37,54$.

В расчетах рассматривалась область $1 = r_0 \le r \le r_0 + R = 5$. Число точек по пространству выбрано из расчетов на получение сходимости численного решения.

На рис. 3 приведены профили температуры вещества, рассчитанной по TVD-схеме и аналитическим формулам. Видно, что эти профили хорошо согласуются между собой. Значения температуры, полученные из численных расчетов, в точках около границ областей примерно равны $T(1{,}001) \approx 0{,}999$; $T(3{,}000) \approx 0{,}993$; $T(3{,}401) \approx 0{,}526$; $T(4{,}999) \approx 0{,}208$.

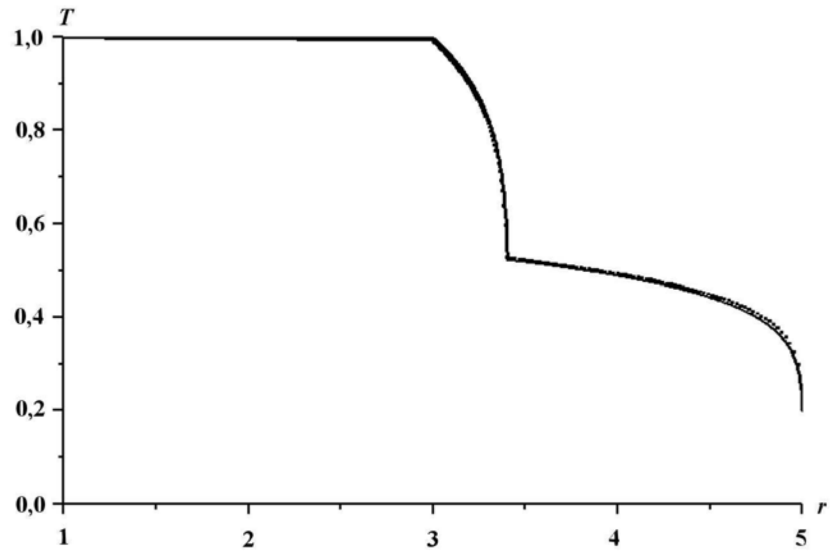

Рис. 3. Вторая задача Флека. Профили температуры вещества: —— — численное решение; ▪ — аналитическое решение

Список литературы

1. *Fleck J. A., Cummings J. D.* An implicit Monte Carlo scheme for calculating time and frequency dependent nonlinear radiation transport // J. Comp. Phys. 1971. Vol. 8. P. 313—342.
2. *Larsen E. W., Thommes G., Klar A. et al.* Simplified P_N approximations to the equations of radiative heat transfer and applications // Ibid. 2002. Vol. 183. P. 652—675.
3. *Larsen E. W., Morel J. E., McGhee J. M.* Asymptotic derivation of the multigroup P_1 and simplified P_N equations with anisotropic scattering // Nucl. Sci. and Eng. 1996. Vol. 123. P. 328—342.
4. *Brantley P. S., Larsen E. W.* The simplified P_3 approximation // Ibid. 2000. Vol. 134. P. 1—21.

Статья поступила в редакцию 20.06.12.