

УДК 536.25

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОЛЕ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЕ С ПЕРЕМЕННЫМ ВНУТРЕННИМ ИСТОЧНИКОМ С ПОМОЩЬЮ БЫСТРЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ

А. Д. Чернышов, А. Н. Марченко, В. В. Горяйнов
(ВГУИТ, ГАСУ, г. Воронеж)

С помощью быстрых разложений строится приближенное решение в явном аналитическом виде. Показано, что при некотором критическом значении параметра, характеризующего тепловыделение и пропорционального температуре, решение принципиально изменяет свой вид. Получены кривые для распределения температуры и тепловых потоков.

Ключевые слова: аналитическое решение, температура, внутренний саморазогрев, прямоугольная форма, быстрые разложения.

Введение

Задача о распределении температуры в прямоугольной пластине со свойствами саморазогрева возникает в связи с проблемой прочности различных конструкций, в которых используются подобные элементы (обшивка корабля, иллюминаторы, лобовые стекла, различные механизмы, дорожные покрытия и т. д.). Разогревание пластины может происходить за счет внутреннего трения, специального изготовления с внутренним подогревом, вследствие внешнего воздействия, а отвод тепла — за счет охлаждающего теплового потока через границу пластины.

Взаимодействие двух противоположных процессов — саморазогрева и оттока тепла через границу — сильно зависит не только от интенсивности тепловыделения, но и от формы пластины, от температурных условий на ее границах. Так, например, в работе [1] показано, что неограниченное тело угловой формы с внутренним источником будет неограниченно разогреваться независимо от граничных условий, если угол раствора больше или равен 90° . Если же угол раствора острый, то температура при саморазогреве будет ограниченной. В [2] проведено численное исследование задачи теплопроводности в вертикальном канале с дискретными источниками тепла на стенках, в [3] изучается теплообмен в криогенном топливном баке прямоугольной формы с захлаживающим теплообменником. Задачи для пластины с сингулярными точками на ее границах рассматриваются в работах [4, 5].

Постановка задачи

Запишем уравнение теплопроводности с внутренним источником:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + E_0 + E_1(T - T_0) = 0, \quad (x, y) \in \Omega = \{[0, a] \times [0, b]\}, \quad (1)$$

где T — температура; T_0 — начальная температура; выражение $E_0 + E_1(T - T_0)$ определяет внутренний источник саморазогревания. Для простейшего случая без учета внутренних источников подобная задача рассмотрена в [6].

Граничные условия для уравнения (1) на вертикальных границах прямоугольной области Ω представим в виде

$$T|_{x=0} = T|_{x=a} = T_0. \quad (2)$$

Если граничные условия при $y = 0$, $y = b$ записать в виде константы $T|_{y=0} = T|_{y=b} = T_0$, то придем к противоречию с дифференциальным уравнением (1) в угловых точках прямоугольника, которое называют рассогласовкой. Это означает, что для нахождения гладкого решения из класса $T(x, y) \in L_2^{(2)}$ необходимо изменить либо граничные условия (2), либо условия $T|_{y=0} = T|_{y=b} = T_0$, либо условия на вертикальных и горизонтальных границах прямоугольной области Ω одновременно. Наиболее простой вариант — изменить только условия $T|_{y=0} = T|_{y=b} = T_0$.

Для этого стороны прямоугольной области Ω при $y = 0$, $y = b$ разобьем на три участка с помощью искусственно введенной малой величины ε : $0 \leq x \leq \varepsilon \cup \varepsilon \leq x \leq a - \varepsilon \cup a - \varepsilon \leq x \leq a$. Впоследствии при получении решения задачи будем переходить к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$. Опуская промежуточные преобразования, приведем один из простейших вариантов согласованных граничных условий:

$$T|_{y=0} = T|_{y=b} = T_{0x} = \begin{cases} T_0 + \frac{E_0}{6} \left[\varepsilon^2 + \frac{1}{\varepsilon} (x - \varepsilon)^3 \right] & \text{при } 0 \leq x \leq \varepsilon; \\ T_0 & \text{при } \varepsilon \leq x \leq a - \varepsilon; \\ T_0 + \frac{E_0}{6} \left[\varepsilon^2 - \frac{1}{\varepsilon} (x - a + \varepsilon)^3 \right] & \text{при } a - \varepsilon \leq x \leq a. \end{cases} \quad (3)$$

В условиях (3) в окрестности концов отрезка $x \in [0, a]$ добавлены малые второго порядка по ε : $\frac{E_0}{6} \left[\varepsilon^2 + \frac{1}{\varepsilon} (x - \varepsilon)^3 \right]$ при $0 \leq x \leq \varepsilon$ и $\frac{E_0}{6} \left[\varepsilon^2 - \frac{1}{\varepsilon} (x - a + \varepsilon)^3 \right]$ при $a - \varepsilon \leq x \leq a$, что позволило согласовать граничные условия (2), (3) с дифференциальным уравнением теплопроводности из (1) в угловых точках области Ω и, кроме того, обеспечить непрерывность $T(x, y)$ на границе до производных второго порядка включительно. Это дает возможность построить решение для температуры в виде быстросходящегося ряда Фурье.

Решение задачи

Для решения задачи используем быстрые разложения, разработанные в [7–9]. В соответствии с быстрыми разложениями представим $T(x, y)$ в виде суммы граничной функции $M_2^{(T)}(x, y)$ и ряда Фурье по синусам [7, 8]:

$$T(x, y) = M_2^{(T)}(x, y) + \sum_{m=1}^{\infty} T_m(y) \sin\left(m\pi \frac{x}{a}\right). \quad (4)$$

По определению [7, 8] $M_2^{(T)}(x, y)$ имеет вид

$$M_2^{(T)}(x, y) = T(0, y) \left(1 - \frac{x}{a}\right) + T(a, y) \frac{x}{a} + T_{xx}(0, y) \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6a} - \frac{ax}{3}\right) + T_{xx}(a, y) \left(\frac{x^3}{6a} - \frac{ax}{6}\right).$$

Введем обозначения:

$$T(0, y) = A_1(y); \quad T(a, y) = A_2(y); \quad T_{xx}(0, y) = A_3(y); \quad T_{xx}(a, y) = A_4(y).$$

Тогда разложение (4) принимает более удобную форму

$$T(x, y) = A_1(y) \left(1 - \frac{x}{a}\right) + A_2(y) \frac{x}{a} + A_3(y) \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6a} - \frac{ax}{3}\right) + A_4(y) \left(\frac{x^3}{6a} - \frac{ax}{6}\right) + \sum_{m=1}^{\infty} T_m(y) \sin\left(m\pi \frac{x}{a}\right). \quad (5)$$

Подставим $T(x, y)$ из (5) в граничные условия (2), (3):

$$T|_{x=0} = T|_{x=a} = A_1(y) = A_2(y) = T_0; \quad (6)$$

$$\begin{aligned} T|_{y=0} &= T_{0x} = A_1(0) \left(1 - \frac{x}{a}\right) + A_2(0) \frac{x}{a} + A_3(0) \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6a} - \frac{ax}{3}\right) + A_4(0) \left(\frac{x^3}{6a} - \frac{ax}{6}\right) + \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} T_m(0) \sin\left(m\pi \frac{x}{a}\right); \\ T|_{y=b} &= T_{0x} = A_1(b) \left(1 - \frac{x}{a}\right) + A_2(b) \frac{x}{a} + A_3(b) \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6a} - \frac{ax}{3}\right) + A_4(b) \left(\frac{x^3}{6a} - \frac{ax}{6}\right) + \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} T_m(b) \sin\left(m\pi \frac{x}{a}\right). \end{aligned} \quad (7)$$

Из двух равенств (7) при $x = 0$ и $x = a$ соответственно найдем

$$A_1(0) = A_1(b) = A_2(0) = A_2(b) = T_0.$$

Поскольку в равенствах (7) ряды Фурье допускают вычисление второй производной почленным дифференцированием по переменной x , то из (7) получим

$$\begin{aligned} T''_{0x} &= A_3(0) \left(1 - \frac{x}{a}\right) + A_4(0) \frac{x}{a} - \sum_{m=1}^{\infty} T_m(0) \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \sin\left(m\pi \frac{x}{a}\right), \quad x \in [0, \varepsilon]; \\ T''_{0x} &= A_3(b) \left(1 - \frac{x}{a}\right) + A_4(b) \frac{x}{a} - \sum_{m=1}^{\infty} T_m(b) \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \sin\left(m\pi \frac{x}{a}\right), \quad x \in [a - \varepsilon, a]. \end{aligned} \quad (8)$$

Так как $T''_{0x}(0) = T''_{0x}(a) = -E_0$, то из (8) при $x = 0$ и $x = a$ имеем

$$A_3(0) = A_4(0) = A_3(b) = A_4(b) = -E_0.$$

В соответствии с методом быстрых разложений умножим каждое из уравнений (7) на $\sin(n\pi x/a)$, $n = 1, 2, \dots$, и затем проинтегрируем по $x \in [0, a]$. При вычислении интегралов будем использовать следующие предельные выражения:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^a T_{0x} \sin\left(n\pi \frac{x}{a}\right) dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\varepsilon} T_{0x} \sin\left(n\pi \frac{x}{a}\right) dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{a-\varepsilon} T_0 \sin\left(n\pi \frac{x}{a}\right) dx + \\ &+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a-\varepsilon}^a T_{0x} \sin\left(n\pi \frac{x}{a}\right) dx = \int_0^a T_0 \sin\left(n\pi \frac{x}{a}\right) dx = \frac{aT_0}{n\pi} [1 - (-1)^n]. \end{aligned}$$

После интегрирования окончательно получим

$$T_n(0) = T_n(b) = E_0 \frac{2a^2}{n^3 \pi^3} [(-1)^n - 1], \quad n = 1, 2, \dots \quad (9)$$

В сумме ряда Фурье (5) ограничимся N слагаемыми и выражение $T(x, y)$ из (5) подставим в уравнение теплопроводности (1):

$$\begin{aligned} &A_3(y) \left(1 - \frac{x}{a}\right) + A_4(y) \frac{x}{a} - \sum_{m=1}^N T_m(y) \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \sin\left(m\pi \frac{x}{a}\right) + A''_1(y) \left(1 - \frac{x}{a}\right) + A''_2(y) \frac{x}{a} + \\ &+ A''_3(y) \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6a} - \frac{ax}{3}\right) + A''_4(y) \left(\frac{x^3}{6a} - \frac{ax}{6}\right) + \sum_{m=1}^N T''_m(y) \sin\left(m\pi \frac{x}{a}\right) + E_0 - E_1 T_0 + \\ &+ E_1 \left[A_1(y) \left(1 - \frac{x}{a}\right) + A_2(y) \frac{x}{a} + A_3(y) \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6a} - \frac{ax}{3}\right) + A_4(y) \left(\frac{x^3}{6a} - \frac{ax}{6}\right) + \sum_{m=1}^N T_m(y) \sin\left(m\pi \frac{x}{a}\right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Отсюда при $x = 0$ и $x = a$ соответственно найдем

$$A_3(y) = A_4(y) = -E_0. \quad (11)$$

С учетом (6) и (11) уравнение (10) упрощается:

$$\begin{aligned} - \sum_{m=1}^N T_m(y) \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \sin\left(m\pi \frac{x}{a}\right) + \sum_{m=1}^N T_m''(y) \sin\left(m\pi \frac{x}{a}\right) - \frac{E_1 E_0}{2} (x^2 - ax) + \\ + E_1 \sum_{m=1}^N T_m(y) \sin\left(m\pi \frac{x}{a}\right) = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

В соответствии с быстрыми разложениями равенство (12) умножим на $\sin(n\pi x/a)$, $n = 1, \dots, N$, и проинтегрируем по $x \in [0, a]$. В результате получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $T_n(y)$:

$$T_n''(y) + T_n(y) \left(E_1 - \frac{n^2 \pi^2}{a^2} \right) + \frac{2a^2}{n^3 \pi^3} E_1 E_0 [1 - (-1)^n] = 0, \quad n = 1, \dots, N. \quad (13)$$

Для нахождения общего решения дифференциального уравнения (13) используем частное решение

$$T_{n(\text{чр})} = \frac{2a^2 E_1 E_0}{n^3 \pi^3} \frac{(-1)^n - 1}{E_1 - \frac{n^2 \pi^2}{a^2}}, \quad n = 1, \dots, N.$$

Характеристические корни уравнения (13) имеют вид

$$\lambda_{n1,2} = \pm \sqrt{L_n}, \quad L_n = \frac{n^2 \pi^2}{a^2} - E_1. \quad (14)$$

Из (14) видно существование критического значения параметра $E_1 = E_1^*$, характеризующего тепловыделение:

$$E_1 = E_1^* = \frac{\pi^2}{a^2}.$$

В каждом из трех случаев $E_1 < E_1^*$, $E_1 = E_1^*$, $E_1 > E_1^*$ метод быстрых разложений позволяет получить аналитическое решение, но в каждом случае оно будет иметь принципиально иной вид.

Остановимся на первом варианте, когда тепловыделение в пластине слабое (E_1 мало) и выполняется неравенство $E_1 < \pi^2/a^2$. Тогда все корни $\lambda_{n1,2}$ будут действительными и общее решение уравнения (13) можно записать в виде

$$T_n(y) = \frac{2a^2 E_1 E_0}{n^3 \pi^3} \cdot \frac{1 - (-1)^n}{L_n} + C_{1n} e^{y\sqrt{L_n}} + C_{2n} e^{-y\sqrt{L_n}}, \quad n = 1, \dots, N.$$

Постоянные интегрирования C_{1n} и C_{2n} найдем с помощью граничных условий (9). После этого решение уравнения (13) представляется выражением

$$T_n(y) = \frac{2a^2 E_0}{n^3 \pi^3} [1 - (-1)^n] \left[\frac{E_1}{L_n} - \left(1 + \frac{E_1}{L_n}\right) \left(\frac{1}{1 + e^{b\sqrt{L_n}}} e^{y\sqrt{L_n}} + \frac{1}{1 + e^{-b\sqrt{L_n}}} e^{-y\sqrt{L_n}} \right) \right]. \quad (15)$$

После подстановки $A_1(y)$ и $A_2(y)$ из (6), $A_3(y)$ и $A_4(y)$ из (11) и $T_n(y)$ из (15) в выражение (5) получим искомое решение задачи теплопроводности:

$$\begin{aligned} T(x, y) = T_0 + \frac{E_0}{2} (ax - x^2) + \sum_{m=1}^N \left\{ \frac{2a^2 E_0}{m^3 \pi^3} [1 - (-1)^m] \left[\frac{E_1}{L_m} - \left(1 + \frac{E_1}{L_m}\right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(\frac{1}{1 + e^{b\sqrt{L_m}}} e^{y\sqrt{L_m}} + \frac{1}{1 + e^{-b\sqrt{L_m}}} e^{-y\sqrt{L_m}} \right) \right] \right\} \sin\left(m\pi \frac{x}{a}\right). \end{aligned} \quad (16)$$

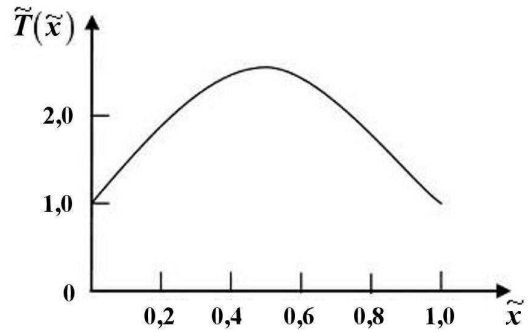
Запишем функцию $T(x, y)$ в безразмерном виде. С этой целью положим $T(x, y) = T_0 \tilde{T}(\tilde{x}, \tilde{y})$; $E_0 = T_0 \tilde{E}_0/a^2$; $E_1 = \tilde{E}_1/a^2$; $x = a\tilde{x}$; $y = b\tilde{y}$; $L_n = \tilde{L}_n/a^2$. Тогда зависимость (16) принимает вид

$$\tilde{T}(\tilde{x}, \tilde{y}) = 1 + \frac{\tilde{E}_0}{2} (\tilde{x} - \tilde{x}^2) + \sum_{m=1}^N \left\{ \frac{2\tilde{E}_0}{m^3 \pi^3} [1 - (-1)^m] \left[\frac{\tilde{E}_1}{\tilde{L}_m} - \left(1 + \frac{\tilde{E}_1}{\tilde{L}_m} \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(\frac{1}{1 + e^{\frac{b}{a} \tilde{y} \sqrt{\tilde{L}_m}}} e^{\frac{b}{a} \tilde{y} \sqrt{\tilde{L}_m}} + \frac{1}{1 + e^{-\frac{b}{a} \tilde{y} \sqrt{\tilde{L}_m}}} e^{-\frac{b}{a} \tilde{y} \sqrt{\tilde{L}_m}} \right) \right] \right\} \sin(m\pi\tilde{x}). \quad (17)$$

Результаты

Получено критическое значение внутреннего тепловыделения $E_1^* = \pi^2/a^2$ и при $E_1 < E_1^*$ построено аналитическое выражение (17) зависимости температуры от геометрических координат. Вследствие симметрии распределение температуры в каждой четверти прямоугольника одинаковое, оно показано на рисунке. Наибольшего значения $\tilde{T} = \tilde{T}_{\max}$ температура достигает в центре прямоугольника.

В таблице приведены значения погрешностей для температуры $\delta\tilde{T}(\tilde{x}, \tilde{y})$ и ее производных $\frac{\delta\partial\tilde{T}(\tilde{x}, \tilde{y})}{\partial\tilde{x}}$, $\frac{\delta\partial\tilde{T}(\tilde{x}, \tilde{y})}{\partial\tilde{y}}$, определяющих тепловые потоки, при $\tilde{E}_0 = 1$, $\tilde{E}_1 = 9$, $b/a = 10$. В этом случае максимальная температура в центре пластины превышает температуру на границе в 2,5 раза. Значения ряда для $\tilde{T}(\tilde{x}, \tilde{y})$ и $\frac{\partial\tilde{T}(\tilde{x}, \tilde{y})}{\partial\tilde{y}}$ вследствие свойств симметрии задачи при $N = 1, 5, 9, \dots$ приближаются к своему точному значению сверху, а при $N = 3, 7, 11, \dots$ — снизу. Все слагаемые в рядах с четными значениями m обращаются в нуль.



Зависимость температуры от координаты \tilde{x} в центральном сечении при $\tilde{y} = 0,5$

Погрешности вычислялись по формулам

$$\delta\tilde{T}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{\left| \tilde{T}(\tilde{x}, \tilde{y}) \Big|_{N=N^*+4} - \tilde{T}(\tilde{x}, \tilde{y}) \Big|_{N=N^*} \right|}{\left| \tilde{T}(\tilde{x}, \tilde{y}) \Big|_{N=N^*+4} \right|} \cdot 100\%, \quad N^* = 1, 2, \dots;$$

Максимальные значения погрешностей (%) для температуры и ее производных

N	$\delta\tilde{T}(\tilde{x}, \tilde{y})$ ($\tilde{x} = 0,5; \tilde{y} = 0,5$)	$\frac{\delta\partial\tilde{T}(\tilde{x}, \tilde{y})}{\partial\tilde{x}}$ ($\tilde{x} = 0; \tilde{y} = 0,5$)	$\frac{\delta\partial\tilde{T}(\tilde{x}, \tilde{y})}{\partial\tilde{y}}$ ($\tilde{x} = 0,5; \tilde{y} = 0$)
1	$2 \cdot 10^{-2}$	$1,1 \cdot 10^{-1}$	2,3
3	$1,3 \cdot 10^{-3}$	$1,3 \cdot 10^{-2}$	$6,1 \cdot 10^{-1}$
5	$2 \cdot 10^{-4}$	$3,4 \cdot 10^{-3}$	$2,5 \cdot 10^{-1}$
7	$5 \cdot 10^{-5}$	$1,2 \cdot 10^{-4}$	$1,3 \cdot 10^{-1}$

$$\frac{\delta \partial \tilde{T}(\tilde{x}, \tilde{y})}{\partial \tilde{y}} = \frac{\left| \frac{\partial \tilde{T}(\tilde{x}, \tilde{y})}{\partial \tilde{y}} \Big|_{N=N^*+4} - \frac{\partial \tilde{T}(\tilde{x}, \tilde{y})}{\partial \tilde{y}} \Big|_{N=N^*} \right|}{\left| \frac{\partial \tilde{T}(\tilde{x}, \tilde{y})}{\partial \tilde{y}} \Big|_{N=N^*+4} \right|} \cdot 100 \%, \quad N^* = 1, 2, \dots;$$

$$\frac{\delta \partial \tilde{T}(\tilde{x}, \tilde{y})}{\partial \tilde{x}} = \frac{\left| \frac{\partial \tilde{T}(\tilde{x}, \tilde{y})}{\partial \tilde{x}} \Big|_{N=N^*+2} - \frac{\partial \tilde{T}(\tilde{x}, \tilde{y})}{\partial \tilde{x}} \Big|_{N=N^*} \right|}{\left| \frac{\partial \tilde{T}(\tilde{x}, \tilde{y})}{\partial \tilde{x}} \Big|_{N=N^*+2} \right|} \cdot 100 \%, \quad N^* = 1, 2, \dots$$

Заключение

Применение метода быстрых разложений в данном случае эффективно, так как позволило представить решение в явном аналитическом виде. Полученное поле температур может быть использовано в расчетах температурных напряжений в прямоугольной пластине.

Список литературы

1. Чернышов А. Д. Задачи теплопроводности для угловой области с внутренним источником // Инж.-физич. журнал. 2003. Т. 76, № 4. С. 150—155.
2. Ермолаев И. А., Жбанов А. И. Смешанная конвекция в вертикальном канале с дискретными источниками тепла на стенке // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2009. № 4. С. 40—46.
3. Моисеева Л. А., Черкасов С. Г. Математическое моделирование естественной конвекции и теплообмена в криогенном топливном баке с захлаживающим теплообменником // Там же. 1997. № 3. С. 39—46.
4. Хлуднев А. М. Задача о равновесии термоупругой пластины, содержащей трещину // Сиб. мат. журнал. 1996. Т. 37, № 2. С. 452—463.
5. Селютин А. А. Третья краевая задача о равновесии термоупругой пластины, содержащей трещину // Сибирский журнал индустриальной математики. 2000. Т. 3, № 2. С. 180—198.
6. Лыков А. В. Теория теплопроводности М.: Высшая школа, 1967.
7. Чернышов А. Д. Быстрые ряды Фурье // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики / Сб. тр. межд. конф. Воронеж: ВГУ, 2010. С. 388—394.
8. Чернышов А. Д. Улучшенные ряды Фурье и граничные функции // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики / Сб. тр. межд. конф. Ч. 2. Воронеж: ВГУ, 2009. С. 236—238.
9. Чернышов А. Д. Улучшение дифференцируемости решений краевых задач механики в форме обобщенных рядов Фурье с помощью граничных функций / Изв. РАН. Механика твердого тела. 2010. № 1. С. 174—192.

Статья поступила в редакцию 05.06.12.