УДК 517.958:536.2

TVD-СХЕМА ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ В P_1-ПРИБЛИЖЕНИИ

А. Д. Гаджиев, Д. А. Кошутин, А. А. Шестаков
(РФЯЦ-ВНИИТФ)

Рассматривается TVD-схема для численного решения переноса излучения в P_1-приближении. За основу взята трехточечная схема, эквивалентная монотонной схеме первого порядка в инвариантах Римана. Путем TVD-модификации основных функций строится трехточечная схема с улучшенными монотонными свойствами.

Ключевые слова: перенос теплового излучения, P_1-приближение.

Введение

Система уравнений переноса излучения и уравнения энергии представляют собой сложную нелинейную систему, зависящую в общем случае от семи независимых переменных [1]. Поэтому ее часто решают в более простом приближении. К таковым относится P_1-приближение. Для нестационарной задачи оно приводит к гиперболической системе уравнений относительно первых моментов в разложении интенсивности излучения по сферическим функциям.

По сравнению с параболическим уравнением при разработке численного алгоритма для гиперболического уравнения возникают значительные трудности. В работе [2] показана невозможность сочетания монотонности и второго порядка аппроксимации в рамках линейной разностной схемы для гиперболической системы уравнений, а именно такое сочетание предпочтительно для практического применения. Нередко численные алгоритмы строятся на переключении на немонотонных участках со схем второго порядка на монотонные схемы первого порядка. В работе [3], помимо переключения, используется также способ введения искусственной диссипации, который улучшает монотонность, не снижая порядка аппроксимации. В схемах с переключателями есть свои дополнительные недостатки. В частности, может ухудшиться сходимость итераций.

Одним из наиболее перспективных подходов к решению гиперболической системы является использование TVD-схем [4, 5], которые позволяют в классе нелинейных схем сочетать монотонность и второй порядок аппроксимации.

В работе [6] рассмотрен TVD-метод применительно к схеме РОМБ [7] для решения уравнений переноса в P_1-приближении. За базовую схему первого порядка взята схема РОМБ, которая эквивалентна монотонной схеме бегущего счета в инвариантах. Далее путем реконструкции решения с применением соответствующего ограничителя строится монотонного типа схема второго порядка. Используемая в этой схеме TVD-методология вносит в схему ограничитель, который вычисляется явно по известным значениям величин с предыдущего временного шага для инвариантов. При этом значения величин с верхнего временного слоя берутся в рамках данной ячейки, что не нарушает идеологии двухточечной схемы РОМБ. Для ускорения скорости сходимости итераций используется ВДМ-метод [8]. Хотя данная нелинейная TVD-схема обладает многими полезными свойствами, она сложна при обобщении на многомерный случай.

В настоящей работе рассмотрен более простой вариант TVD-схемы. В качестве базовой взята трехточечная схема, которая эквивалентна монотонной схеме первого порядка в инвариантах Римана в плоской геометрии. В сферически-симметричной геометрии монотонную схему в инвариантах

Римана построить не удается, поэтому за основу берутся соотношения связи схемы первого порядка в инвариантах Римана для плоской геометрии. Путем TVD-модификации основных функций U, S строится трехточечная схема с улучшенными монотонными свойствами. Улучшение монотонных свойств схемы в сферически-симметричной геометрии достигается за счет применения TVD-ограничителей производных искомых функций. В отличие от работы [6] для ускорения скорости сходимости итераций используется не ВДМ-метод, а решатель для линеаризованных по температуре уравнений переноса в P_1-приближении.

Постановка задачи

Рассмотрим одномерную систему переноса лучистой энергии в многогрупповом P_1-приближении [1]:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{c}\frac{\partial U_g}{\partial t} + \frac{\partial\left(r^\sigma S_g\right)}{r^\sigma \partial r} + \alpha_{cg} U_g = \alpha_{cg} B_g;\\
&\frac{1}{c}\frac{\partial S_g}{\partial t} + \frac{1}{3}\frac{\partial U_g}{\partial r} + \alpha_g S_g = 0;\\
&\frac{\partial E}{\partial t} = \sum_{g=1}^{G} \alpha_{cg}\left(U_g - B_g\right).
\end{aligned}$$

Здесь t — время; r — координата; c — скорость света; g — индекс энергетической группы, $g = 1, \ldots, G$; J_g — интенсивность излучения группы g; $U_g = \int\limits_{-1}^{1} J_g d\mu$ — плотность излучения, умноженная на скорость света; $S_g = \int\limits_{-1}^{1} \mu J_g d\mu$ — поток излучения; ε_g — энергия; $B_g = \dfrac{8\pi}{c^2 \widetilde{h}^3} \int\limits_{\Delta\varepsilon_g} \dfrac{\varepsilon^3}{\exp\dfrac{\varepsilon}{T} - 1}\, d\varepsilon$ — равновесная плотность излучения, умноженная на скорость света; $\widetilde{h}$ — постоянная Планка; α_{cg} — коэффициент поглощения фотонов; α_{sg} — коэффициент рассеяния фотонов; α_g — коэффициент ослабления, $\alpha_g = \alpha_{cg} + \alpha_{sg}$; E — внутренняя энергия вещества; $\sigma = 0, 1, 2$ соответствуют случаям плоской, цилиндрически-симметричной и сферически-симметричной геометрий.

Граничные условия имеют вид

$$\alpha_{0,g} U_g + \beta_{0,g} S_g = \varphi_{0,g}; \qquad \alpha_{1,g} U_g + \beta_{1,g} S_g = \varphi_{1,g},$$

где $\alpha_{0,g}$, $\beta_{0,g}$, $\varphi_{0,g}$, $\alpha_{1,g}$, $\beta_{1,g}$, $\varphi_{1,g}$ — параметры для задания граничных условий.

Разностная аппроксимация

Система разностных P_1-уравнений, выражающая интегральный закон сохранения для ячеек сетки, имеет вид (для упрощения записи здесь опущены индексы g и $i + 1/2$)

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{c\tau} U^{n+1} + \frac{1}{V}\Delta_i\left(r^\sigma S^{n+1}\right) + (\alpha U)^{n+1} = \frac{1}{c\tau} U^n + (\alpha_c B)^{n+1} + (\alpha_s U)^{n+1};\\
&\frac{1}{c\tau} S^{n+1} + \frac{1}{3h}\Delta_i U^{n+1} + (\alpha S)^{n+1} = \frac{1}{c\tau} S^n,
\end{aligned} \tag{1}$$

где $\alpha = \alpha_c + \alpha_s$; $\tau^n = t^{n+1} - t^n$; $h = h_{i+1/2} = r_{i+1} - r_i$; $V = V_{i+1/2} = \dfrac{r_{i+1}^{\sigma+1} - r_i^{\sigma+1}}{\sigma + 1}$; $\Delta_i\left(r^\sigma S\right) = \left(r^\sigma S\right)_{i+1} - \left(r^\sigma S\right)_{i+1}$; $\Delta_i U = U_{i+1} - U_i$. Здесь и в дальнейшем опускаются индексы у величины τ^n.

Заметим, что в первом уравнении системы (1) в правой части оставлен член $(\alpha_s U)^{n+1}$, который позволяет в левой части сохранить коэффициент α, необходимый для перехода в инварианты Римана.

Запишем систему (1) для плоской геометрии в инвариантах $\psi_{1,2} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\,U \mp S$:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{c\tau}\psi_1^{n+1} - \frac{1}{h\sqrt{3}}\Delta_i\psi_1^{n+1} + \alpha\psi_1^{n+1} = \frac{1}{c\tau}\psi_1^{n} + \frac{1}{\sqrt{3}}Q^{n+1}, \quad Q = \alpha_c B + \alpha_s U; \\ &\frac{1}{c\tau}\psi_2^{n+1} + \frac{1}{h\sqrt{3}}\Delta_i\psi_2^{n+1} + \alpha\psi_2^{n+1} = \frac{1}{c\tau}\psi_2^{n} + \frac{1}{\sqrt{3}}Q^{n+1}. \end{aligned} \tag{2}$$

Рассматривая римановы инварианты, приходящие в узел (рис. 1), для системы уравнений (2) можно построить монотонную схему первого порядка точности:

$$\psi_{2,i} = \psi_{2,i-1/2}; \qquad \psi_{1,i} = \psi_{1,i+1/2}. \tag{3}$$

По формулам обратного перехода $U = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,(\psi_1 + \psi_2)$, $S = \dfrac{1}{2}\,(\psi_2 - \psi_1)$ получаем соотношения связи для U и S в узлах:

$$U_i = \frac{U_{i+1/2} + U_{i-1/2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(S_{i-1/2} - S_{i+1/2}\right); \quad S_i = \frac{S_{i+1/2} + S_{i-1/2}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(U_{i-1/2} - U_{i+1/2}\right). \tag{4}$$

Подставляя соотношения связи (4) в систему (1), получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} &a_i^0 U_{i-1/2} + b_i^0 U_{i+1/2} + c_i^0 U_{i+3/2} + d_i^0 S_{i-1/2} + e_i^0 S_{i+1/2} + g_i^0 S_{i+3/2} = f_i^0; \\ &a_i^1 U_{i-1/2} + b_i^1 U_{i+1/2} + c_i^1 U_{i+3/2} + d_i^1 S_{i-1/2} + e_i^1 S_{i+1/2} + g_i^1 S_{i+3/2} = f_i^1, \end{aligned} \tag{5}$$

где $a_i^0 = -\dfrac{r_i^\sigma}{\sqrt{3}}$; $b_i^0 = 2V_{i+1/2}\,(q_1)_{i+1/2}^\nu + \dfrac{r_i^\sigma + r_{i+1}^\sigma}{\sqrt{3}}$; $c_i^0 = -\dfrac{r_{i+1}^\sigma}{\sqrt{3}}$; $d_i^0 = -r_i^\sigma$; $e_i^0 = r_{i+1}^\sigma - r_i^\sigma$; $g_i^0 = r_{i+1}^\sigma$; $a_i^1 = -1$; $b_i^1 = 0$; $c_i^1 = 1$; $d_i^1 = -\sqrt{3}$; $e_i^1 = 6hq_{i+1/2}^\nu + 2\sqrt{3}$; $g_i^1 = -\sqrt{3}$; $f_i^0 = 2V_{i+1/2}\left(\dfrac{1}{c\tau}U_{i+1/2}^n + \alpha_c B^{n+1}\right)$; $f_i^1 = \dfrac{6h}{c\tau}S_{i+1/2}^n$; $q = \dfrac{1}{c\tau} + \alpha$; $q_1 = \dfrac{1}{c\tau} + \alpha_c$; $i = 0, \ldots, I-1$.

Полученная разностная система обладает монотонными свойствами, но имеет первый порядок аппроксимации. Для повышения порядка аппроксимации перейдем к нелинейным схемам типа TVD. Представим U, S на интервале $r_i \le r \le r_{i+1}$ в кусочно-линейной форме:

$$U\,(r) = U_{i+1/2} + \frac{\partial U_{i+1/2}}{\partial r}\left(r - r_{i+1/2}\right); \quad S\,(r) = S_{i+1/2} + \frac{\partial S_{i+1/2}}{\partial r}\left(r - r_{i+1/2}\right), \tag{6}$$

где $r_{i+1/2} = 0{,}5\,(r_i + r_{i+1})$.

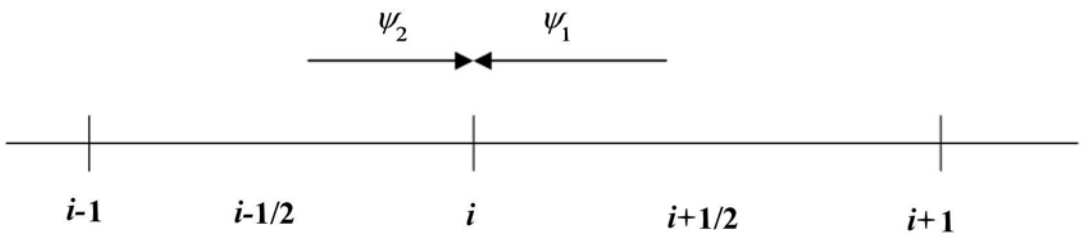

Рис. 1. Римановы инварианты, приходящие в узел

В системе (4) предполагалось кусочно-постоянное распределение U, S на сеточном интервале (рис. 2), а теперь распределение кусочно-линейное (рис. 3).

В соответствии с TVD-методологией на $\dfrac{\partial U_{i+1/2}}{\partial r}$, $\dfrac{\partial S_{i+1/2}}{\partial r}$ накладываются некоторые ограничения, так чтобы формулы (6) в гладкой зоне обеспечивали второй порядок аппроксимации, а в целом сохраняли монотонные свойства системы (5). Тогда формула (6) дает:

– справа от узла i

$$U_{i+0} = U_{i+1/2} - 0{,}5L\left(\Delta_{i+1/2}U\right); \quad S_{i+0} = S_{i+1/2} - 0{,}5L\left(\Delta_{i+1/2}S\right);$$

– слева от узла i

$$U_{i-0} = U_{i-1/2} + 0{,}5L\left(\Delta_{i-1/2}U\right); \quad S_{i-0} = S_{i-1/2} + 0{,}5L\left(\Delta_{i-1/2}S\right),$$

где $\Delta_{i-1/2}(.) = (.)_{i+1/2} - (.)_{i-1/2}$; $L\left(\Delta_{i+1/2}\right) = L\left(\Delta_{i-1/2}, \Delta_{i+1/2}\right)$ — ограничитель TVD-схемы; $U_{i+0} \neq U_{i-0}$; $S_{i+0} \neq S_{i-0}$. В граничных точках $L\left(\Delta_{1/2}\right) = \Delta_{1/2} = (.)_{3/2} - (.)_{1/2}$; $L\left(\Delta_{I-1/2}\right) = \Delta_{I-1/2} = (.)_{I-1/2} - (.)_{I-3/2}$.

Например, для ограничителя Чакравати—Ошера имеем

$$L(a,b) = 0{,}5(1-\delta)\min\mathrm{mod}(a,\beta b) + 0{,}5(1+\delta)\min\mathrm{mod}(\beta a, b),$$

где β — параметр сжатия, который удовлетворяет условию $1 \leq \beta \leq \dfrac{3-\delta}{1-\delta}$. Параметр δ определяет тип схемы и порядок аппроксимации. При $\delta = 1$ получаем схему второго порядка аппроксимации.

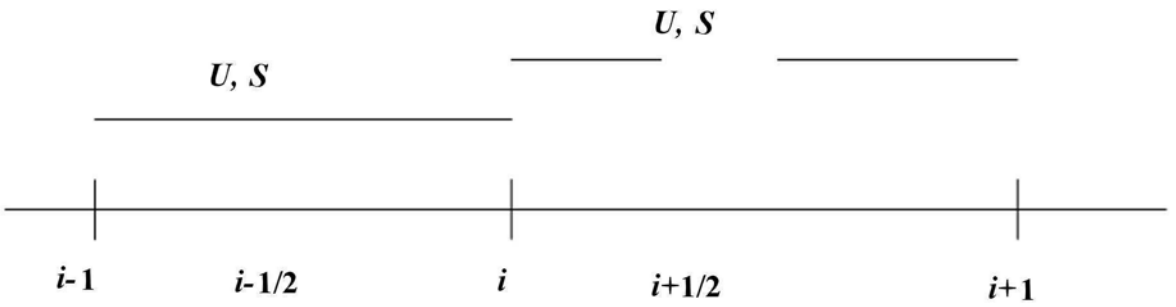

Рис. 2. Распределение U, S в схеме (4)

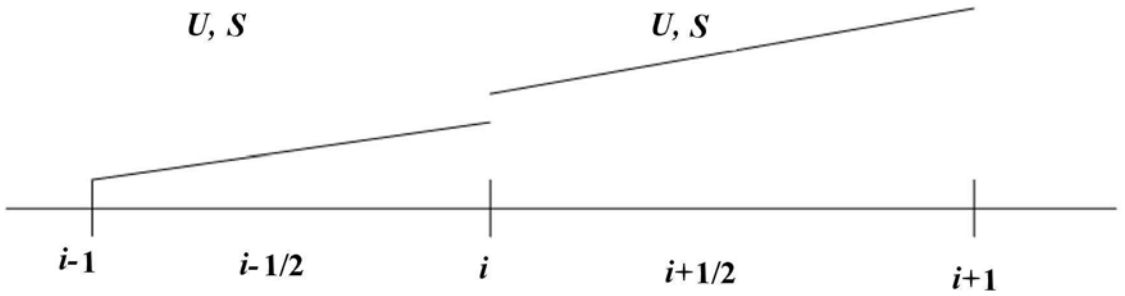

Рис. 3. Распределение U, S в схеме (6)

При $\delta = 1/3$; $\beta = 3$ для явной схемы можно получить третий порядок аппроксимации. Для неявной схемы точность также улучшается при этих параметрах.

Для ограничителя $\min\mathrm{mod}$ имеем $\delta = 0$; $\beta = 1$.

Рассмотрим в узле i соотношения связи, подобные соотношениям связи (3):

$$\psi_{2,i} = \psi_{2,i-1/2}; \qquad \psi_{1,i} = \psi_{1,i+1/2}.$$

По формулам обратного перехода $U = \dfrac{\sqrt{3}}{2}(\psi_1 + \psi_2)$, $S = \dfrac{1}{2}(\psi_2 - \psi_1)$ получаем соотношения связи для U и S в узлах:

$$\begin{aligned} U_i &= \frac{U_{i+1/2} + U_{i-1/2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(S_{i+1/2} - S_{i-1/2}\right) + \Delta_1\left(US_i\right); \\ S_i &= \frac{S_{i+1/2} + S_{i-1/2}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(U_{i+1/2} - U_{i-1/2}\right) + \Delta_2\left(US_i\right), \end{aligned} \tag{7}$$

где $\Delta_1\left(US_i\right) = -\dfrac{1}{4}\Big(L\left(\Delta_{i+1/2}U\right) - L\left(\Delta_{i-1/2}U\right)\Big) + \dfrac{\sqrt{3}}{4}\Big(L\left(\Delta_{i+1/2}S\right) + L\left(\Delta_{i-1/2}S\right)\Big)$;

$$\Delta_2\left(US_i\right) = \frac{1}{4\sqrt{3}}\left(L\left(\Delta_{i+1/2}U\right) + L\left(\Delta_{i-1/2}U\right)\right) + \frac{1}{4}\left(L\left(\Delta_{i-1/2}S\right) - L\left(\Delta_{i+1/2}S\right)\right).$$

Подставляя соотношения связи (7) в систему (1), получаем уравнения (5) с другими правыми частями

$$\begin{aligned} f_i^0 &= 2\left[V_{i+1/2}\left(\frac{1}{c\tau}U^n + \alpha_c B^{n+1}\right)_{i+1/2} - r_{i+1}^{\sigma}\Delta_2\left(US_{i+1}\right) + r_i^{\sigma}\Delta_2\left(US_i\right)\right]; \\ f_i^1 &= 2\left[\frac{3h}{c\tau}S_{i+1/2}^n - \Delta_1\left(US_{i+1}\right) + \Delta_1\left(US_i\right)\right]. \end{aligned} \tag{8}$$

Полученная система уравнений представляет собой систему с четырехточечным шаблоном на $(n+1)$-м слое. Если добавки $\Delta_1\left(US_i\right)$, $\Delta_2\left(US_i\right)$ брать с предыдущей итерации или предыдущего шага, то можно записать схему на $(n+1)$-м слое на трехточечном шаблоне. При $\Delta_1\left(US_i\right) = \Delta_2\left(US_i\right) = 0$ получим линейную схему первого порядка точности.

Совместно с уравнениями переноса излучения решается уравнение энергии. Нелинейная система уравнения энергии с уравнениями переноса излучения (1) решается итерационно. На итерационном цикле пересчитываются коэффициенты поглощения с организацией ньютоновской линеаризации внутренней энергии и функции Планка по температуре.

Нелинейная система уравнения энергии с уравнениями переноса излучения (1) на итерационном цикле имеет вид

$$\begin{aligned} &\frac{1}{c\tau}U^{\nu+1} + \frac{1}{V}\Delta_i\left(r^{\sigma}S^{\nu+1}\right) + \alpha_{\tilde{n}}^{\nu}U^{\nu+1} = \frac{1}{c\tau}U^n + \alpha_c^{\nu}B^{\nu+1}; \\ &\frac{1}{c\tau}S^{\nu+1} + \frac{1}{3h}\Delta_i U^{\nu+1} + \alpha^{\nu}S^{\nu+1} = \frac{1}{c\tau}S^n; \\ &\frac{E^{\nu+1} - E^n}{\tau} = \sum_{g=1}^{G}\alpha_{cg}^{\nu}\left(U_g^{\nu+1} - B_g^{\nu+1}\right). \end{aligned} \tag{9}$$

Линеаризуем по температуре внутреннюю энергию и функцию Планка:

$$E^{\nu+1}(T) = E^{\nu}(T) + E_T^{\nu}\left(T^{\nu+1} - T^{\nu}\right); \quad B_g^{\nu+1}(T) = B_g^{\nu}(T) + B_{gT}^{\nu}\left(T^{\nu+1} - T^{\nu}\right),$$

где $E_T^\nu = \left(\dfrac{\partial E}{\partial T}\right)^\nu$; $B_{gT}^\nu = \left(\dfrac{\partial B_g}{\partial T}\right)^\nu$. Тогда из уравнения энергии получаем выражение для нахождения температуры

$$T_{i+1/2}^{\nu+1} = T_{i+1/2}^{\nu} + \left[\frac{E^n - E^\nu + \tau \sum\limits_{g=1}^{G} \alpha_{c,g}^\nu \left(U_g^{\nu+1} - B_g^\nu\right)}{E_T^\nu + \tau \sum\limits_{g=1}^{G} \alpha_{c,g}^\nu B_{g,T}^\nu}\right]_{i+1/2}. \tag{10}$$

Линеаризуя функцию Планка в системе (9) по температуре и подставляя формулу (10), получаем в первом уравнении системы (8)

$$f_i^0 = f_{i+1/2}^{01} + f_{i+1/2}^{02},$$

где

$$f_{i+1/2}^{01} = 2V\left\{\frac{1}{c\tau}U_g^n + \alpha_{cg}\left[B_g^\nu + \lambda B_{gT}^\nu\left(E^n - E^\nu\right)\right] - \tau\lambda\alpha_{cg}B_{gT}^\nu \sum_{g'=1}^{G}\alpha_{cg'}B_{g'}^\nu\right\}_{i+1/2} +$$

$$+2\Big(r_i^\sigma \Delta_2\left(US_i\right) - r_{i+1}^\sigma \Delta_2\left(US_{i+1}\right)\Big), \quad \lambda_{i+1/2} = \left(E_T^\nu + \tau\sum_{g'=1}^{G}\alpha_{cg'}B_{g'T}^\nu\right)_{i+1/2}^{-1};$$

$$f_{i+1/2}^{02} = \left(2V\tau\lambda\alpha_{cg}B_{gT}^k \sum_{g'=1}^{G}\alpha_{cg'}U_{g'}^{\nu+1}\right)_{i+1/2}.$$

Если выражение $f_{i+1/2}^{02}$ перенести в левую часть первого уравнения системы (5), объединяя члены при $g' = g$ с коэффициентом b_i^0, то оно примет вид

$$\left(a_i^0 U_{i-1/2} + \bar{b}_i^0 U_{i+1/2} + c_i^0 U_{i+3/2} + d_i^0 S_{i-1/2} + e_i^0 S_{i+1/2} + g_i^0 S_{i+3/2}\right)_g^{\nu+1} -$$

$$- 2\tau\left[V\lambda\alpha_{cg}B_{gT}^\nu \sum_{g'=1}^{G}\left(\alpha_{cg'} - \alpha_{cg}\right)U_{g'}^{\nu+1}\right]_{i+1/2} = \left(f_i^{01}\right)_g^\nu, \tag{11}$$

где $\bar{b}_i^0 = b_i^0 - 2\tau\left(V\lambda B_{gT}^\nu \alpha_{cg}^2\right)_{i+1/2}$, $i = 0, \ldots, I-1$, $g = 1, \ldots, G$.

Для решения системы (5) с заменой первого уравнения на (11) используется решатель из библиотеки SPARSKIT [9]. Итерации заканчиваются при выполнении условий $\left|T_{i+1/2}^{\nu+1} - T_{i+1/2}^{\nu}\right| \le \varepsilon^\nu\left(\varepsilon_1 + T_{i+1/2}^\nu\right)$. Точность вычисления температуры определяется константами сходимости ε^ν, ε_1. При сходимости итераций получаем на шаге плотности $U^{n+1} = U^{\nu+1}$, потоки $S^{n+1} = S^{\nu+1}$, температуры $T^{n+1} = T^{\nu+1}$ и переходим на следующий шаг по времени.

Численные расчеты

Отработка новой схемы проводилась на двух задачах Флека [10], обобщенных на сферически-симметричную геометрию. На внутреннюю поверхность сферического слоя толщиной 4 см падает планковский поток излучения, соответствующий температуре вещества $T = 1$. Слой состоит из трех физических областей. Радиус внутренней сферы 100 см, внешней — 104 см.

Спектральные граничные условия на внешней границе имели вид $\dfrac{1}{4}U_g - \dfrac{1}{2}S_g = 0$; на внутренней границе $\dfrac{1}{4}U_g + \dfrac{1}{2}S_g = \dfrac{1}{4}B_g\,(T = 1)$. Коэффициент поглощения вычислялся по формуле $\alpha_c = \dfrac{\chi\left(1 - e^{-\varepsilon/T}\right)}{\varepsilon^3}$; $\chi = 27$ в области 1 ($100 < r < 102$) и области 3 ($102{,}4 < r < 104$); в области 2

$(102 < r < 102{,}4)$ $\chi = 27$ для первой задачи Флека, $\chi = 10\,000$ для второй задачи Флека. Коэффициент рассеяния $\alpha_s = 0$. Начальная температура в областях $T = 0{,}00001$, уравнение состояния вещества $E = 0{,}81T$.

По энергетической переменной расчеты выполнены на сетке с разбиением 0; 0,3; 0,6; 0,8; 1,2; 1,5; 1,8; 2,4; 2,7; 3; 4; 5; 7; 9; 11; 15 (число групп 15). Пространственная сетка — равномерная в каждой области по радиусу: 28, 16, 24 интервалов в областях 1, 2, 3 соответственно. Шаг по времени $\tau = 0{,}0002$. Итерационный пересчет решения на каждом временном шаге проводился до вычисления температуры вещества с точностью 0,01 % ($\varepsilon^\nu = 10^{-4}$; $\varepsilon_1 = 1$).

На рис. 4 приведены профили температуры в первой задаче Флека на 10, 25 и 600-м шагах по времени. Нужно заметить, что в этой задаче TVD-схема с ограничителями min mod и Чакравати—Ошера дает одинаковые результаты.

Число внешних итераций в данной задаче практически не меняется на шагах. Поэтому для исследований итерационного метода достаточно рассмотреть первые 20 шагов.

В табл. 1 приведено среднее число внешних итераций за 20 первых временных шагов. Видно, что в первой задаче Флека все схемы дают одинаковую скорость сходимости итераций, т. е. итерационный

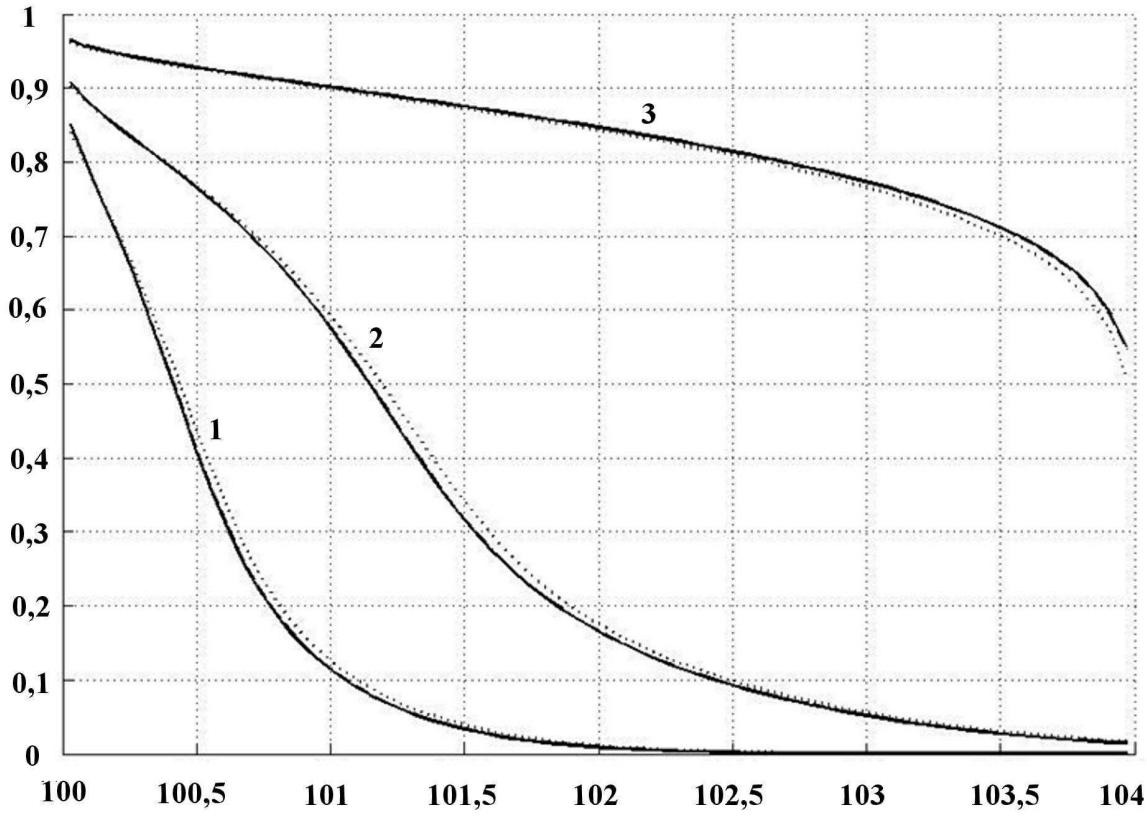

Рис. 4. Профили температуры вещества в первой задаче Флека: 1 — на 10-м шаге; 2 — на 25-м шаге; 3 — на 600-м шаге; · · · — схема без ограничителей; —— — TVD-схема с ограничителем Чакравати—Ошера

Таблица 1

Среднее число внешних итераций за 20 первых временных шагов в первой задаче Флека

Тип ограничителя	$\tau = 0{,}0001$	$\tau = 0{,}0005$
Без ограничителя	3,1	3,5
min mod	3,1	3,5
Чакравати—Ошера	3,1	3,5

метод практически не зависит от разностной схемы. При увеличении шага по времени в 5 раз число итераций возрастает в 1,13 раза. Это свидетельствует о слабой зависимости итерационного метода от шага.

На рис. 5 приведены профили температуры вещества для второй задачи Флека, полученные на 10, 25 и 600-м шагах по времени. Видно, что схема без ограничителей, в отличие от TVD-схем, сильнее размазывает фронт тепловой волны.

В табл. 2 приведено среднее число внешних итераций за 20 первых временных шагов для второй задачи Флека. Видно, что, хотя в данной задаче все схемы дают близкую скорость сходимости итераций, TVD-схема с ограничителем Чакравати—Ошера сходится быстрее остальных схем. При увеличении шага по времени в 5 раз число итераций возрастает в 1,3 раза. Это свидетельствует о слабой зависимости итерационного метода от шага, а небольшое число итераций (меньше 5 во всех вариантах) — о хорошей скорости сходимости метода.

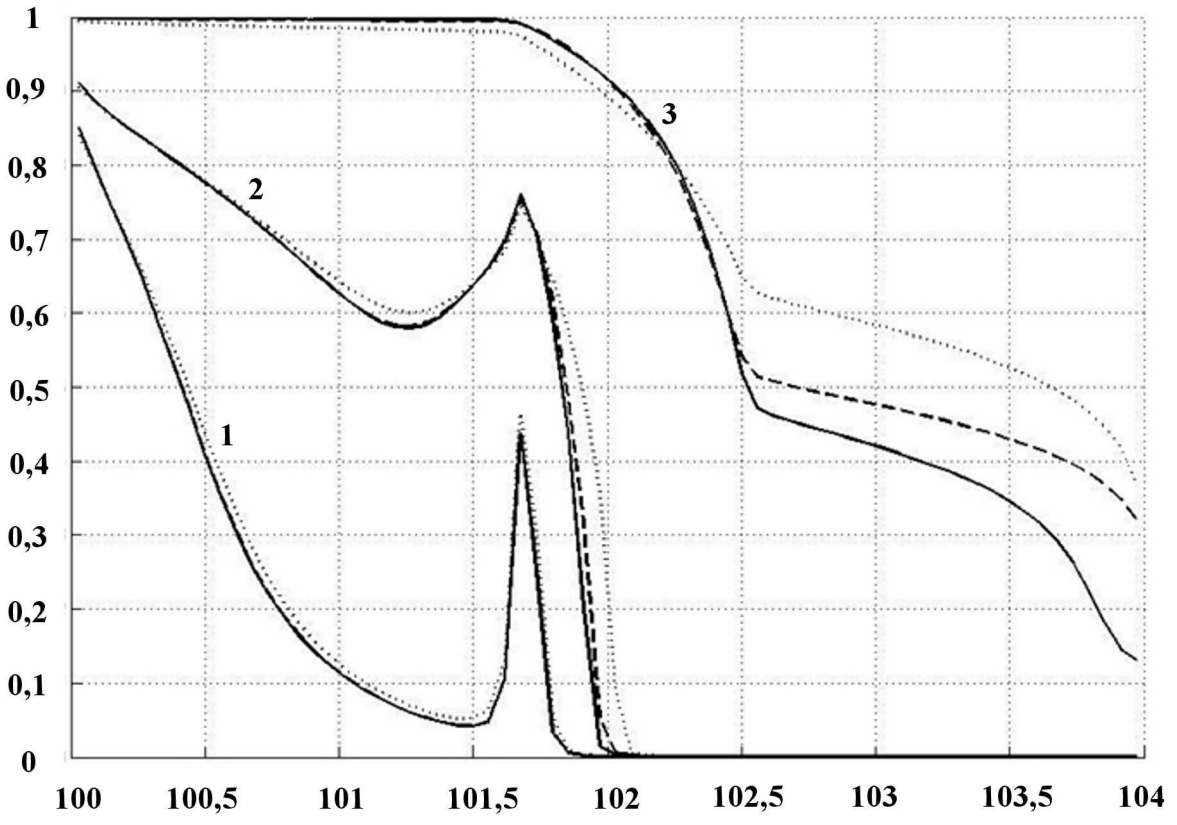

Рис. 5. Профили температуры вещества во второй задаче Флека: 1 — на 10-м шаге; 2 — на 25-м шаге; 3 — на 600-м шаге; · · · — схема без ограничителей; – – – — TVD-схема с ограничителем min mod, ——— — TVD-схема с ограничителем Чакравати—Ошера

Таблица 2

Среднее число внешних итераций за 20 первых временных шагов во второй задаче Флека

Тип ограничителя	$\tau = 0{,}0001$	$\tau = 0{,}0005$
Без ограничителя	3,6	4,7
min mod	3,4	4,2
Чакравати—Ошера	3,4	4

В заключение еще раз отметим основные достоинства предложенной методики.

В данной работе в отличие от [6] используется другая схема решения уравнений переноса в P_1-приближении: TVD-модификация применяется к основным функциям U, S и добавка от TVD-реконструкции взята с предыдущего шага. Это заметно упрощает схему.

Для совместного решения уравнений переноса излучения в P_1-приближении и уравнения энергии используется не ВДМ-метод, а решатель для линеаризованных по температуре уравнений переноса.

Список литературы

1. *Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П.* Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений М.: Наука, 1966.
2. *Годунов С. К.* Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Мат. сборник 1959. № 47. Вып. 3. С. 271—306.
3. *Гаджиев А. Д., Шестаков А. А.* Метод РОМБ для решения многогруппового уравнения переноса излучения в P_1-приближении // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1989. Вып. 3. С. 66—70.
4. *Harten A.* On a class of high resolution total variation stable finite difference schemes // SIAM J. Numer. Anal. 1984. Vol. 21(1). P. 1—23.
5. *Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов А. Ю.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001.
6. *Вершинская А. С., Гаджиев А. Д.,Грабовенская С. А., Шестаков А. А.* Применение TVD-реконструкции для построения монотонной и второго порядка схемы РОМБ решения уравнения переноса теплового излучения в P_1-приближении // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2009. Вып. 2. С. 21—36.
7. *Гаджиев А. Д., Писарев В. Н.* Неявный конечно-разностный метод РОМБ для численного решения уравнений газовой динамики с теплопроводностью // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1976. Т. 19, № 5. С. 1288—1303.
8. *Гаджиев А. Д., Шестаков А. А.* Метод выделения диагональной матрицы для численного решения уравнения переноса излучения в P_1-приближении по схеме РОМБ // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2006. Вып. 1. С. 3—13.
9. *Saad Y.* SPARSKIT: Abasic toot kit for sparse matrix computation. Technical report 90—20, Research Institute for Advenced Science, NASA Ames Research Center, Moffet Field, CA, 1990.
10. *Fleck J. A. Cummings J. D.* An implicit Monte Carlo sheme for calculating time and frequency dependent nonlinear transport // J. Comput. Phys. 1971. Vol. 8. P. 313—342.

Статья поступила в редакцию 30.07.12.