УДК 51-7

АППРОКСИМАЦИЯ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРОИЗВОДНЫХ

С. В. Алюков
(ЮУрГУ, г. Челябинск)

Рассматриваются новые методы аппроксимации обобщенных функций и их производных, в частности дельта-функции. Разработанные методы не имеют недостатков рядов Фурье и позволяют аппроксимировать обобщенные функции и их производные со сколь угодно высокой точностью. Предлагаемые методы позволяют понять структуру и характер поведения обобщенных функций и их производных.

Ключевые слова: аппроксимация, обобщенные функции, дельта-функция, функция Хевисайда, рекурсивная последовательность.

Обобщенные функции были введены в связи с задачами физики и математики, появившимися в двадцатом столетии и потребовавшими нового осознания понятия функции. К таковым относятся задачи по определению плотности точечной массы, точечного заряда и точечного диполя, интенсивности мгновенного источника, задачи квантовой теории поля, математического моделирования физических процессов в атомной науке и технике и многие другие. В настоящее время обобщенные функции широко применяются в самых разнообразных областях исследований [1].

В статье предлагаются новые методы аппроксимации обобщенных функций и их производных, в частности дельта-функции, аналитическими функциями. Предложенные методы способствуют пониманию внутренней структуры обобщенных функций и их производных, получению осознанного представления о природе обобщенных функций и особенностей их поведения, что позволяет решать теоретические и прикладные задачи на более качественном уровне. При решении этих задач могут быть применены разработанные методы аппроксимации.

Известно, что дельта-функция не является функцией в обычном смысле этого слова, она часто определяется функционалом, а в некоторых случаях выражением

$$\delta(x) = \begin{cases} +\infty, & x = 0; \\ 0, & \forall x \neq 0, \end{cases}$$

причем $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\, dx = 1$.

Схематичный график дельта-функции изображен на рис. 1, *а*.

Для удобства применения аналитических методов исследований дельта-функцию раскладывают в ряд Фурье.

Введем последовательность ступенчатых функций вида

$$\delta_n(x) = \begin{cases} \dfrac{n}{2}, & \forall x \in \left[-\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right]; \\ 0, & \forall x \notin \left[-\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right]. \end{cases}$$

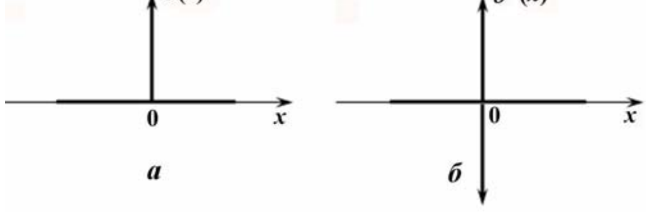

Рис. 1. Схематичные графики дельта-функции (*а*) и ее аппроксимации рядами Фурье (*б*)

Нетрудно видеть, что для любого n площадь фигуры под графиком такой ступенчатой функции равна единице.

Найдем значения коэффициентов ряда Фурье на отрезке $[-\pi,\ \pi]$:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} \delta_n(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1/n}^{1/n} \frac{n}{2}dx = \frac{1}{\pi};$$

$a_k = 0$ в силу четности функции;

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \delta_n(x)\cos kx\,dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1/n}^{1/n} \frac{n}{2}\cos kx\,dx = \frac{1}{\pi}\frac{n}{2}\frac{2}{n}\cos(kx^*) = \frac{\cos(kx^*)}{\pi},$$

$$x^* \in \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$$

в силу теоремы о среднем значении определенного интеграла.

Исходя из того, что дельта-функция $\delta(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \delta_n(x)$, и замечая, что $x^* \underset{n\to\infty}{\to} 0$, найдем $b_k = 1/\pi$. Следовательно, разложение дельта-функции в ряд Фурье на отрезке $[-\pi,\ \pi]$ имеет вид

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \cos(kx).$$

Для конечного ряда имеем приближенное соотношение

$$\delta(x) \approx \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \cos(kx).$$

График приближения дельта-функции рядом Фурье при $n = 1\,000$ изображен на рис. 2.

Понятно, что выбранный отрезок $[-\pi,\ \pi]$ не снижает общности рассуждений. С помощью замены переменной всегда можно обобщить результаты на произвольный отрезок.

Сравнение графиков, изображенных на рис. 1, *а* и 2, показывает, что даже при значительном числе гармоник (в рассматриваемом случае $n = 1\,000$) погрешность аппроксимации очень велика. В этом проявляется эффект Гиббса [2]. Например, заметим, что дельта-функция является неотрицательной. Минимальное же значение построенной аппроксимации (см. рис. 2) является отрицательным и составляет

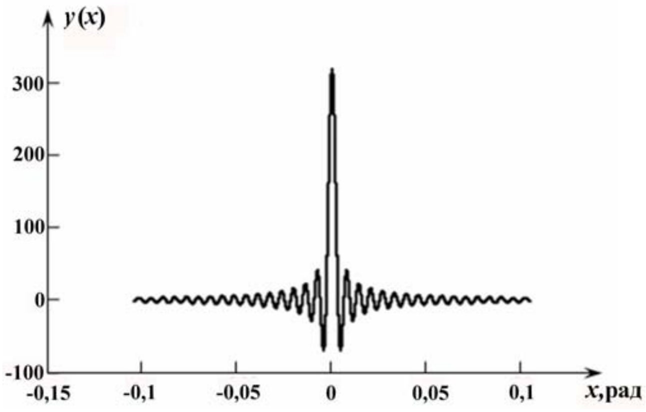

Рис. 2. График частичной суммы ряда Фурье ($n = 1\,000$)

$-69{,}182$. Более того, при бесконечном увеличении числа слагаемых в аппроксимирующем ряде Фурье минимальное значение его суммы стремится к $-\infty$ (рис. 1, *б*), что соответствует доказанному в статьях [3, 4] утверждению о возможной бесконечно большой погрешности при аппроксимации с помощью ряда Фурье. Другими словами, аппроксимация рядами Фурье даже при бесконечном числе слагаемых (см. рис. 1, *б*) совершенно не отвечает исходной дельта-функции (см. рис. 1, *а*).

Эффект Гиббса приводит к крайне негативным последствиям использования частичной суммы тригонометрического ряда в качестве аппроксимирующей функции для решения задач математического моделирования, например, при исследовании периодических движений технических систем, импульсных систем, искажений при передаче сигналов, решении задач квантовой теории поля и т. д.

Существование эффекта Гиббса при аппроксимации функций тригонометрическими выражениями также заставляет критически относиться к доказательству некоторых важных теорем. В частности, в теории передачи сигналов широко применяется теорема Котельникова, известная в англоязычной литературе как теорема Найквиста. При доказательстве теоремы [5] В. А. Котельников для аппроксимации функций применяет так называемый интегральный синус, определяемый выражением $\mathrm{Si}(x) = \int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}dt$. На его основе для доказательства теоремы строится функция $\mathrm{Si}\Big(T(\omega+\omega_1)\Big) - \mathrm{Si}\Big(T(\omega-\omega_1)\Big)$, где ω — аргумент; T, ω_1 — некоторые параметры.

При этом утверждается, что с увеличением T эта функция стремится к пределам, изображенным на рис. 3, *а*, т. е. "равна нулю при $\omega > \omega_1$ и равна π при $\omega < \omega_1$".

На самом деле это не совсем так. График предельной функции будет иметь вид, изображенный на рис. 3, *б*. То есть при любых, даже сколь угодно больших, но конечных значениях параметра T всегда найдутся такие $\omega < \omega_1$, для которых значения построенной Котельниковым функции будут отличны от π, и всегда найдутся такие $\omega > \omega_1$, для которых ее значения будут отличны от нуля. При этом важно заметить, что указанная разница с увеличением T не стремится к нулю, а стремится к некоторому числу, отличному от нуля, приближенно равному 0,281, т. е. имеющему достаточно большое значение. Поэтому теорема Котельникова требует внимательного пересмотра.

В практике создания изображений отмеченные погрешности приводят к спекл-эффекту, который проявляется в пятнистости изображений, их повышенной зернистости. Зрителю кажется, что изображение покрыто частыми мелкими пятнами, что, конечно, ухудшает его качество. Подобные недостатки при передаче сигналов приводят к их искажениям, которые могут быть значительными.

Смысл сингулярных обобщенных функций можно понять, основываясь на их приближениях, воспринимая обобщенную функцию как предел некоторой аппроксимирующей последовательности обычных функций. Секвенциальный подход в теории обобщенных функций изложен в ряде монографий. Примером может служить монография Я. Микусинского и Р. Сикорского [6].

Как уже отмечалось, дельта-функцию можно рассматривать как предел последовательности ступенчатых функций. Однако использование последовательности ступенчатых функций

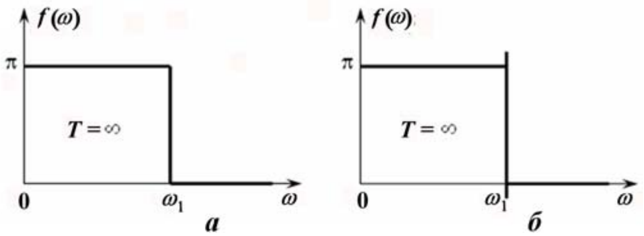

Рис. 3. Графики предельной функции в теореме Котельникова: *а* — согласно автору теоремы; *б* — в действительности

не позволяет в должной мере осуществить представление производных дельта-функции, которые, в свою очередь, также являются обобщенными функциями. Проблема заключается в том, что ступенчатые функции имеют точки разрывов, в которых они не являются дифференцируемыми в математическом смысле. Поэтому для представления производных дельта-функции нужно воспользоваться аппроксимирующей последовательностью аналитических функций, имеющих производные любого порядка.

Для построения такой последовательности воспользуемся тем фактом, что дельта-функция является производной функции Хевисайда, или функции единичного скачка, которая определяется как $H(x) = \begin{cases} 1, \ \forall x > 0; \\ 0, \ \forall x < 0. \end{cases}$

Предлагается аппроксимировать функцию Хевисайда последовательностью функций вида $H_n(x) = 0{,}5\,(1 + f_n(x))$, где последовательность рекурсивных функций $f_n(x)$ определяется соотношением [3]

$$\Big\{ f_n(x) : f_n(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} f_{n-1}(x)\right), \\ f_1(x) = \sin x; \quad n-1 \in \mathbf{N} \Big\} \subset \mathrm{C}^{\infty}\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Рассмотрим функцию $f_0(x) = \operatorname{sign}(\sin x)$ и приведем две теоремы, касающиеся вопросов сходимости предложенной последовательности. Доказательства теорем даются в работе [3].

Теорема 1. *Последовательность функций $f_n(x)$ сходится к исходной функции $f_0(x)$, причем сходимость является поточечной, но не является равномерной.*

Теорема 2. *В банаховом пространстве $L_1[0, \pi/2]$ и гильбертовом пространстве $L_2[0, \pi/2]$ измеримых функций последовательность аппроксимирующих функций $f_n(x)$ сходится по норме к исходной функции $f_0(x)$.*

Например, на рис. 4 показаны графики трех последовательных приближений

$$H_9(x) = 0{,}5\Big(1 + \\ + \sin\Big(A\Big(A\Big(A\Big(A\Big(A\Big(A\Big(A\Big(A(x)\Big)\Big)\Big)\Big)\Big)\Big)\Big)\Big)\Big);$$

$$H_{10}(x) = 0{,}5\Big(1 + \\ + \sin\Big(A\Big(A\Big(A\Big(A\Big(A\Big(A\Big(A\Big(A\Big(A(x)\Big)\Big)\Big)\Big)\Big)\Big)\Big)\Big)\Big)\Big);$$

$$H_{11}(x) = 0{,}5\Big(1 + \\ + \sin\Big(A\Big(A\Big(A\Big(A\Big(A\Big(A\Big(A\Big(A\Big(A\big(A(x)\big)\Big)\Big)\Big)\Big)\Big)\Big)\Big)\Big)\Big)\Big),$$

где $A(x) = \dfrac{\pi}{2}\sin x$.
На рис. 4 увеличивающемуся номеру аппроксимирующей зависимости соответствуют линии с большей толщиной.

Найдя первые производные приближений функции Хевисайда, получим последовательные приближения $\dfrac{dH_9\,(x)}{dx}$, $\dfrac{dH_{10}\,(x)}{dx}$ и $\dfrac{dH_{11}\,(x)}{dx}$ для дельта-функции. Их графики изображены на рис. 5. При достаточно большом количестве вложенных функций будем иметь аппроксимирующую функцию $\dfrac{dH_{18}\,(x)}{dx}$, график которой получен с помощью компьютерной программы MathCAD (рис. 6).

Сравнивая графики на рис. 1, *а*, *б*, 2, 5 и 6, замечаем, что предложенные методы аппроксимации дают гораздо более точное приближение дельта-функции, чем ряды Фурье. При этом точность аппроксимации можно повысить до сколь угодно большой степени, увеличивая

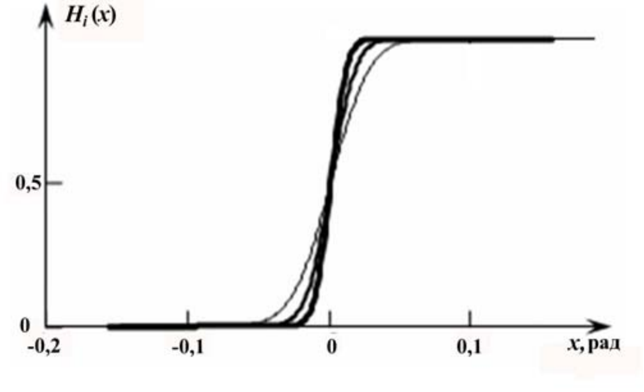

Рис. 4. Графики аппроксимаций функции Хевисайда

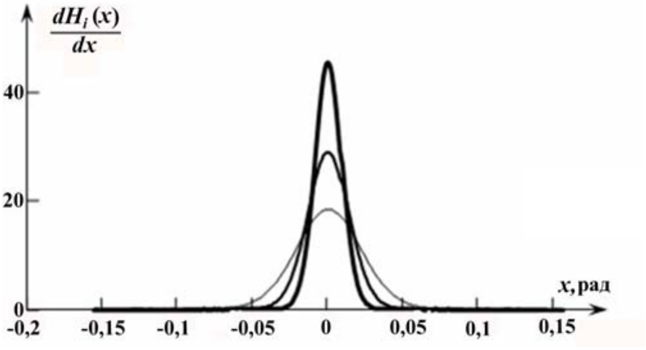

Рис. 5. Графики аппроксимаций дельта-функции

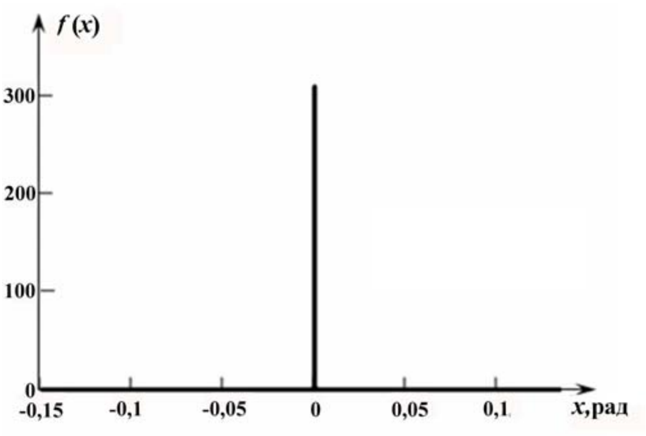

Рис. 6. График функции $f(x) = \dfrac{dH_{18}\,(x)}{dx}$, аппроксимирующей дельта-функцию

число вложенных функций. Высоту пика аппроксимации (амплитуду) можно определить по интегральному условию в определении дельта-функции.

Дифференцируя аппроксимирующие функции рассмотренной последовательности $H_n\,(x) = 0{,}5\Big(1 + f_n(x)\Big)$, получаем

$$\frac{dH_n\,(x)}{dx} = \frac{\pi^{n-1}}{2^n}\prod_{k=1}^{n-1}\cos\left(\frac{\pi}{2}f_k\,(x)\right)\cos x.$$

Подставив в полученное выражение для производных $x = 0$, с учетом четности δ-функции найдем значение для высоты пика A_n аппроксимирующих функций $H_n\,(x)$:

$$A_n = \frac{\pi^{n-1}}{2^n}.$$

Так как обобщенные функции аппроксимировались аналитическими функциями, то можно продифференцировать эти аппроксимирующие функции и найти их производные любого порядка. Тем самым можно получить приближения производных обобщенных функций с любой степенью точности.

Например, аналогично тому, как это было сделано для аппроксимации дельта-функции, можно построить графики приближений ее производных. На рис. 7 изображены графики последовательных аппроксимаций первой, второй и третьей производных дельта-функции. Таким же образом можно найти и производные более высоких порядков. На рис. 8 изображены графики функций, аппроксимирующих четвертую производную дельта-функции.

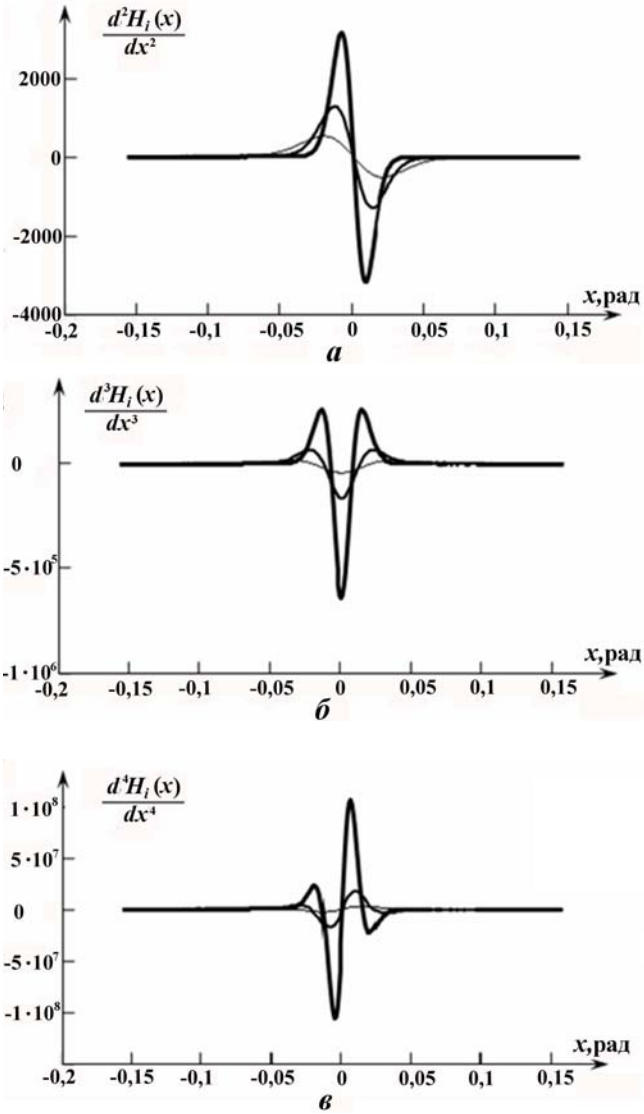

Рис. 7. Графики аппроксимаций первой (*а*), второй (*б*) и третьей (*в*) производных дельта-функции

Построенные графики дают хорошее представление о характере поведения производных дельта-функции. Мысленно увеличивая номер аппроксимирующей функции, по графикам (см. рис. 7, 8), можно продолжить прослеживаемые тенденции изменения аппроксимаций и представить предельные положения последовательностей функций, аппроксимирующих производные дельта-функции. Это позволит улучшить понимание обобщенных функций, являющихся производными дельта-функции, использовать их не просто как абстрактный математический аппарат, а осознавая их структуру, даже если они записаны в предельной форме. Данный подход также может быть применим для лучшего понимания других обобщенных функций и характера их поведения.

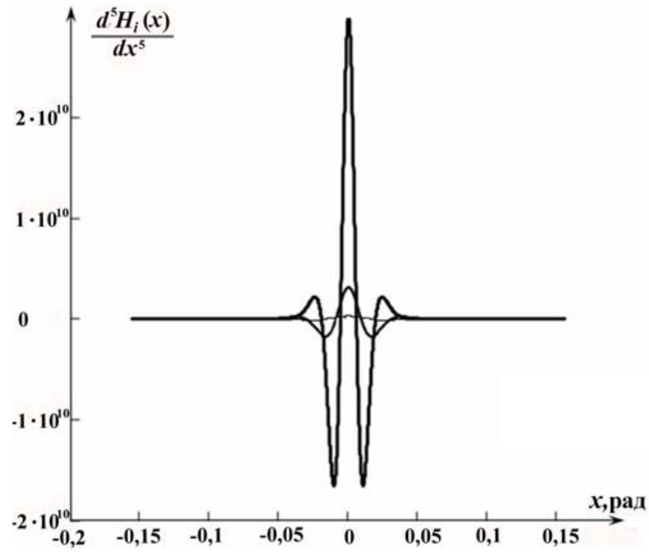

Рис. 8. Графики функций, аппроксимирующих четвертую производную дельта-функции

Известно [7], что можно аппроксимировать дельта-функцию и другими непрерывно дифференцируемыми функциями, например:

$$1)\quad \delta(x,\alpha)=\frac{\alpha}{\pi\left(\alpha^2x^2+1\right)},\quad \alpha\to\infty;$$

$$2)\quad \delta(x,\alpha)=\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-\alpha^2x^2\right),\quad \alpha\to\infty;$$

$$3)\quad \delta(x,\alpha)=\frac{\alpha}{\pi}\frac{\sin(\alpha x)}{\alpha x},\quad \alpha\to\infty,$$

для которых $\lim\limits_{\alpha\to\infty}\delta(x,\ \alpha)=0\ (x\neq0)$ и $\lim\limits_{\alpha\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\delta(x,\ \alpha)\,dx=1$.

Аппроксимация дельта-функции с помощью третьей из этих функций не выдерживает никакой критики, так как эта функция имеет не только положительные, но и отрицательные значения, причем последовательность отрицательных значений не ограничена снизу, т. е. погрешность может быть сколь угодно большой. Предельное положение такой функции соответствует графику на рис. 1, *б*.

Что касается аппроксимации с помощью первых двух функций, то они позволяют аппроксимировать периодическую дельта-функцию лишь в виде суммы $\delta(x)=\sum\limits_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-2\pi k)$, что может быть неудобным для практического использования, тогда как аппроксимирующие функции по предложенному методу являются периодическими по своей природе и позволяют аппроксимировать периодическую дельта-функцию без каких-либо дополнительных построений.

В некоторых случаях для более точной аппроксимации исходной функции с помощью предложенных методов нет смысла доводить аппроксимирующую функцию до положения, близкого к предельному. Может оказаться, что одна из функций в последовательности аппроксимирующих функций наиболее точно соответствует реальному процессу. Выбирая подходящую из построенных функций с точки зрения наиболее точного отражения реальности, выполняем требуемую аппроксимацию.

Предложенные методы являются универсальными. Они могут быть применены для аппроксимации обобщенных функций и их производных в самых разнообразных областях исследований: теории управлений, квантовой теории, теории импульсных воздействий, для передачи и преобразования сигналов, описания сосредоточенных сил, для решения задач теоретической и экспериментальной физики.

Список литературы

1. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979.
2. *Helmberg G.* The Gibbs phenomenon for Fourier interpolation // J. Approx. Theory. 1994. Vol. 78. P. 41—63.
3. *Алюков С. В.* Аппроксимация ступенчатых функций в задачах математического моделирования // Математическое моделирование. 2011. Т. 23, № 3. С. 75—88.
4. *Алюков С. В.* Моделирование динамических процессов с кусочно-линейными характеристиками // Изв. вузов. Сер. Прикладная нелинейная динамика. 2011. Т. 19, № 5. С. 27—34.
5. *Котельников В. А.* О пропускной способности "эфира" и проволоки в электросвязи // УФН. 2006. № 7. С. 762—770.
6. *Микусинский Я., Сикорский Р.* Элементарная теория обобщенных функций. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1963.
7. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. С.-Пб.: Лань, 2003.

Статья поступила в редакцию 07.10.12.