

УДК 519.6:536.71

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ КВАЗИДИФФУЗИОННОГО ПОДХОДА И МЕТОДА УСРЕДНЕННЫХ КОСИНУСОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ

А. С. Исакова, Н. Г. Карлыханов
(РФЯЦ-ВНИИТФ, г. Снежинск)

На примере расчета задач, имеющих аналитическое решение, проведено исследование свойств решений кинетического уравнения, полученных методом квазидиффузии и методом усредненных косинусов. Показано, что метод усредненных косинусов может давать менее точный результат по сравнению с квазидиффузионным подходом. На основе проведенного анализа предлагается способ комбинирования методов усредненных косинусов и квазидиффузии, когда в каждой точке пространства автоматически выбирается тот подход, который дает наибольшую точность.

Ключевые слова: перенос излучения, квазидиффузия, TVD-подход, одномоментные уравнения переноса с усредненными косинусами.

Введение

В работе рассматриваются два подхода для расчета переноса излучения, основанные на усреднении кинетического уравнения по угловой переменной, а именно квазидиффузионный подход [1, 2] и метод усредненных косинусов [3]. Как правило, всегда найдется такой класс задач, на котором тот или иной метод проявит свои отрицательные свойства.

Например, согласно теореме Годунова для квазидиффузионного метода невозможно построить линейную монотонную схему второго порядка аппроксимации по какой-либо переменной. Построение TVD-схем затруднено необходимостью записи уравнений квазидиффузии в инвариантах, что представляет определенные трудности даже в одномерном случае [4].

Для метода усредненных косинусов может возникнуть случай, при котором коэффициенты усредненных косинусов терпят разрыв как в пространстве, так и во времени, в то время как коэффициенты квазидиффузии имеют непрерывный характер. Разрывность коэффициентов усредненных косинусов оказывает влияние на точность получаемого решения.

Для повышения точности предлагается комбинировать методы усредненных косинусов и квазидиффузии.

1. Постановка задачи

Коротко рассмотрим суть исследуемых подходов. Для простоты возьмем кинетическое уравнение переноса излучения в сферически-симметричном одномерном случае без учета движения (плотность среды положим равной единице):

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial (\mu r^2 I)}{r^2 \partial r} + \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{1 - \mu^2}{r} I \right) + (\kappa_a + \kappa_s) I = Q + \kappa_s \int_{-1}^1 I d\mu. \quad (1)$$

Здесь введены стандартные обозначения: I — интенсивность излучения; κ_a , κ_s — коэффициенты поглощения и рассеяния излучения соответственно; μ — косинус угла полета фотона относительно

нормали к поверхности сферы; c — скорость света; Q — изотропный источник излучения; r — пространственная координата.

Уравнение (1) дополняется начальными условиями, вид которых несущественен для дальнейшего изложения, и граничными условиями двух видов:

- 1) $I(r_{left}, \mu > 0) = f_{left}(\mu, t)$ на левой границе, $I(r_{right}, \mu < 0) = f_{right}(\mu, t)$ на правой границе, где $f_{left}(\mu, t)$, $f_{right}(\mu, t)$ — заданные функции;
- 2) условиями симметрии $I(r_{left}, \mu) = I(r_{left}, -\mu)$ на левой границе, $I(r_{right}, \mu) = I(r_{right}, -\mu)$ на правой границе.

Рассмотрим квазидиффузионный подход. Если проинтегрировать уравнение (1) дважды, сначала с весом 1, затем с весом μ , то получится следующая система уравнений:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial r^2 S}{r^2 \partial r} + c\kappa_a U = c2Q; \quad (2)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial(DU)}{\partial r} + \frac{3D-1}{r} U + c^{-1}(\kappa_a + \kappa_s) S = 0. \quad (3)$$

Здесь введены обозначения:

$$U = \frac{1}{c} \int_{-1}^1 I d\mu; \quad S = \int_{-1}^1 \mu I d\mu; \quad D = \frac{\int_{-1}^1 \mu^2 I d\mu}{\int_{-1}^1 I d\mu}.$$

Система уравнений (2), (3) является системой уравнений квазидиффузии, которая дополняется граничными условиями вида

$$S = \alpha_s U + \beta_s, \quad (4)$$

где

$$\alpha_s = \frac{\int_{-1}^0 \mu I d\mu}{\int_{-1}^1 I d\mu}; \quad \beta_s = \int_0^1 \mu f(\mu, t) d\mu.$$

Условие (4) задается как на левой, так и на правой границе.

Введя обозначение

$$\langle \mu \rangle = \frac{S}{cU},$$

уравнение (2) можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial r^2 \langle \mu \rangle cU}{r^2 \partial r} + c\kappa_a U = 2Q, \quad (5)$$

где $\langle \mu \rangle$ — коэффициент усредненных косинусов направления полета фотонов.

Уравнение (5) дополняется граничными условиями следующего вида: $U_{left} = \frac{1}{c} \int_0^1 f_{left}(\mu, t) d\mu$ на левой границе, если $\langle \mu \rangle > 0$, в противном случае граничное условие не задается; $U_{right} = \frac{1}{c} \int_{-1}^0 f_{right}(\mu, t) d\mu$ на правой границе, если $\langle \mu \rangle < 0$, в противном случае граничное условие не задается. При задании на границах условия симметрии полагаем в граничных точках $\langle \mu \rangle = 0$.

Разностная аппроксимация и методы решения системы уравнений (2), (3) приведены в работе [2], а уравнения (5) — в работе [3]. В настоящей работе для аппроксимации производной по времени применялась трехслойная разностная схема [5]:

$$\frac{\partial I}{\partial t} \approx \frac{I^{n+1} - I^b}{\alpha(\tau)},$$

где

$$I^b = \beta(\tau)(I^n - I^{n-1}) + I^n; \quad \alpha(\tau) = \frac{(\tau^{n+1} + \tau^n)\tau^{n+1}}{2\tau^{n+1} + \tau^n}p + (1-p)\tau^{n+1}; \quad \beta(\tau) = \frac{(\tau^{n+1})^2}{\tau^n(2\tau^{n+1} + \tau^n)}p.$$

Здесь τ^{n+1} , τ^n — шаги по времени на $(n+1)$ -м и n -м временных слоях; p — признак слоистости схемы ($p = 1$ — схема трехслойная второго порядка аппроксимации; $p = 0$ — схема двухслойная первого порядка аппроксимации). Трехслойная схема достаточно редко используется в практических расчетах из-за своих немонотонных свойств, но в сочетании с TVD-подходом вполне себя оправдывает.

2. Постановка расчетов

Были рассмотрены три методические задачи, имеющие аналитическое решение*.

Задача 1. Распространение изотропного излучения от границ системы в вакууме.

Рассмотрим задачу о распространении излучения в плоской геометрии в непоглощающей и нерассеивающей среде ($\kappa_a = \kappa_s = 0$), положив скорость света равной единице ($c = 1$). В начальный момент времени интенсивность излучения во всей системе равна нулю.

Данная задача имеет следующее аналитическое решение:

– при $r_l + ct < r_r - ct$

$$\begin{aligned} U(r, t) &= U_0(1 - \mu_0), \quad D(r, t) = \frac{1}{3} \frac{(1 - \mu_0^3)}{(1 - \mu_0)}, \quad \langle \mu \rangle(r, t) = \frac{1}{2} \frac{(1 - \mu_0^2)}{(1 - \mu_0)}, \quad r_l < r < r_l + ct; \\ U(r, t) &= 0, \quad D(r, t), \langle \mu \rangle(r, t) \text{ — решений нет,} \quad r_l + ct < r < r_r - ct; \\ U(r, t) &= U_0(\mu_1 + 1), \quad D(r, t) = \frac{1}{3} \frac{(\mu_1^3 + 1)}{(\mu_1 + 1)}, \quad \langle \mu \rangle(r, t) = \frac{1}{2} \frac{(\mu_1^2 - 1)}{(\mu_1 + 1)}, \quad r_r - ct < r < r_r; \end{aligned}$$

– при $r_l + ct \geq r_r - ct$

$$\begin{aligned} U(r, t) &= U_0(1 - \mu_0), \quad D(r, t) = \frac{1}{3} \frac{(1 - \mu_0^3)}{(1 - \mu_0)}, \quad \langle \mu \rangle(r, t) = \frac{1}{2} \frac{(1 - \mu_0^2)}{(1 - \mu_0)}, \quad r_l < r < r_r - ct; \\ U(r, t) &= U_0(2 + \mu_1 - \mu_0), \quad D(r, t) = \frac{1}{3} \frac{(2 + \mu_1^3 - \mu_0^3)}{(2 + \mu_1 - \mu_0)}, \quad \langle \mu \rangle(r, t) = \frac{1}{2} \frac{(\mu_1^2 - \mu_0^2)}{(2 + \mu_1 - \mu_0)}, \quad r_r - ct < r < r_l + ct; \\ U(r, t) &= U_0(\mu_1 + 1), \quad D(r, t) = \frac{1}{3} \frac{(\mu_1^3 + 1)}{(\mu_1 + 1)}, \quad \langle \mu \rangle(r, t) = \frac{1}{2} \frac{(\mu_1^2 - 1)}{(\mu_1 + 1)}, \quad r_l + ct < r < r_r, \end{aligned}$$

где $\mu_0 = \frac{r - r_l}{ct}$; $\mu_1 = -\frac{r_r - r}{ct}$; r_l, r_r — координаты левой и правой границ рассчитываемой системы; U_0 — плотность энергии излучения на границах (задается одинаково).

Расчеты проводились в области $r_l = 0, r_r = 1$ с числом точек по пространству $N = 201$ и числом точек по угловой переменной $M = 64$ в двух постановках: с числом Куранта $k = c\tau/h = 0,5$, где h — размер счетной ячейки, и $k = 2$. Задача дополнялась граничными условиями $f_{left}(\mu, t) = 1$; $f_{right}(\mu, t) = 1$.

Задача 2. Об остывании плоского слоя, заполненного изотропным излучением. Рассмотрим задачу о распространении излучения в сферической геометрии в непоглощающей и нерассеивающей среде ($\kappa_a = \kappa_s = 0$), положив скорость света равной единице ($c = 1$). В начальный момент времени интенсивность излучения в системе равна нулю, кроме выделенной области, в которой в начальный момент задано изотропное излучение.

Задача имеет следующее аналитическое решение:

* Аналитические решения для задач получены сотрудником РФЯЦ-ВНИИТФ А. В. Вронским.

– при $r_l + ct < r_r - ct$

$$\begin{aligned}
 U(r, t) &= 0, & D(r, t), \langle \mu \rangle(r, t) & \text{– решений нет,} & r < r_l - ct; \\
 U(r, t) &= U_0(\mu_1 + 1), & D(r, t) &= \frac{1}{3} \frac{(\mu_1^3 + 1)}{(\mu_1 + 1)}, & \langle \mu \rangle(r, t) &= \frac{1}{2} \frac{(\mu_1^2 - 1)}{(\mu_1 + 1)}, & r_l - ct < r < r_l + ct; \\
 U(r, t) &= U_0, & D(r, t) &= \frac{1}{3}, & \langle \mu \rangle(r, t) &= 0, & r_r - ct < r < r_r - ct; \\
 U(r, t) &= U_0(1 - \mu_0), & D(r, t) &= \frac{1}{3} \frac{(1 - \mu_0^3)}{(1 - \mu_0)}, & \langle \mu \rangle(r, t) &= \frac{1}{2} \frac{(1 - \mu_0^2)}{(1 - \mu_0)}, & r_l + ct < r < r_r + ct; \\
 U(r, t) &= 0, & D(r, t), \langle \mu \rangle(r, t) & \text{– решений нет,} & r > r_r + ct;
 \end{aligned}$$

– при $r_l + ct > r_r - ct$

$$\begin{aligned}
 U(r, t) &= 0, & D(r, t), \langle \mu \rangle(r, t) & \text{– решений нет,} & r < r_l + ct; \\
 U(r, t) &= U_0(\mu_1 + 1), & D(r, t) &= \frac{1}{3} \frac{(\mu_1^3 + 1)}{(\mu_1 + 1)}, & \langle \mu \rangle(r, t) &= \frac{1}{2} \frac{(\mu_1^2 - 1)}{(\mu_1 + 1)}, & r_l - ct < r < r_r - ct; \\
 U(r, t) &= U_0(2 + \mu_1 - \mu_0), & D(r, t) &= \frac{1}{3} \frac{(2 + \mu_1^3 - \mu_0^3)}{(2 + \mu_1 - \mu_0)}, & \langle \mu \rangle(r, t) &= \frac{1}{2} \frac{(\mu_1^2 - \mu_0^2)}{(2 + \mu_1 - \mu_0)}, & r_r - ct < r < r_l + ct; \\
 U(r, t) &= U_0(1 - \mu_0), & D(r, t) &= \frac{1}{3} \frac{(1 - \mu_0^3)}{(1 - \mu_0)}, & \langle \mu \rangle(r, t) &= \frac{1}{2} \frac{(1 - \mu_0^2)}{(1 - \mu_0)}, & r_l + ct < r < r_r + ct; \\
 U(r, t) &= 0, & D(r, t), \langle \mu \rangle(r, t) & \text{– решений нет,} & r > r_r + ct,
 \end{aligned}$$

где $\mu_0 = \frac{r - r_l}{ct}$; $\mu_1 = -\frac{r_r - r}{ct}$; r_l, r_r – координаты области, где в начальный момент времени задано изотропное излучение с плотностью энергии U_0 .

Рассчитывалась система единичной длины, в выделенной области $[0,4; 0,6]$ была задана начальная изотропная интенсивность излучения с плотностью энергии $U_0 = 1$. Задача рассчитывалась с числом точек по пространству $N = 201$ и числом точек по угловой переменной $M = 64$ в двух вариантах: с числом Куранта $k = 0,5$ и $k = 2$. Задача дополнялась граничными условиями $f_{left}(\mu, t) = 0$; $f_{right}(\mu, t) = 0$.

Задача 3. Об остывании сферы, заполненной изотропным излучением. Рассмотрим задачу о распространении излучения в сферической геометрии в непоглощающей и нерассеивающей среде ($\kappa_a = \kappa_s = 0$), положив скорость света равной единице ($c = 1$). В сферической области $0 < r < 3$ в начальный момент времени в подобласти $0 < r < r_0 = 1$ задано изотропное излучение с единичной плотностью энергии.

Данная задача имеет следующее аналитическое решение:

– при $r_0 - ct > 0$

$$\begin{aligned}
 U(r, t) &= U_0, & D(r, t) &= \frac{1}{3}, & \langle \mu \rangle(r, t) &= 0, & 0 < r < r_0 - ct; \\
 U(r, t) &= 0,5U_0(\mu_0 + 1), & D(r, t) &= \frac{1}{3}(\mu_0^2 - \mu_0 + 1), & \langle \mu \rangle(r, t) &= \frac{1}{2}(1 - \mu_0), & r_0 - ct < r < r_0 + ct; \\
 U(r, t) &= 0, & D(r, t), \langle \mu \rangle(r, t) & \text{– решений нет,} & r > r_0 + ct;
 \end{aligned}$$

– при $r_0 - ct < 0$

$$\begin{aligned}
 U(r, t) = 0, & \quad D(r, t), \langle \mu \rangle(r, t) - \text{решений нет,} & 0 < r < ct - r_0; \\
 U(r, t) = 0,5U_0(\mu_0 + 1), & \quad D(r, t) = \frac{1}{3}(\mu_0^2 - \mu_0 + 1), \quad \langle \mu \rangle(r, t) = \frac{1}{2}(1 - \mu_0), & ct - r_0 < r < r_0 + ct; \\
 U(r, t) = 0, & \quad D(r, t), \langle \mu \rangle(r, t) - \text{решений нет,} & r > r_0 + ct,
 \end{aligned}$$

где $\mu_0 = \frac{r_0^2 - r^2 - c^2 t^2}{2rct}$.

Расчеты проводились с числом точек по пространству $N = 300$ и числом точек по угловой переменной $M = 64$ в двух постановках: с числом Куранта $k = 0,5$ и $k = 2$. Задача дополнялась граничными условиями $I(r_{left}, \mu) = I(r_{left}, -\mu)$; $f_{right}(\mu, t) = 0$.

Все задачи на каждом временном шаге рассчитывались в два этапа.

На первом этапе для получения коэффициентов усредненных косинусов и коэффициентов квазидиффузии численно решалось уравнение (1) в двух вариантах:

- 1) по схеме 1-го порядка аппроксимации по времени, пространству и угловой переменной (схема 1t_1h);
- 2) по трехслойной схеме 2-го порядка аппроксимации по времени и по TVD-схеме как по пространству, так и по угловой переменной с ограничителем Чакравати—Ошера [6] (схема 2t_2h).

На втором этапе выполнялся один из следующих расчетов:

- уравнения для коэффициентов усредненных косинусов (5) по трехслойной схеме 2-го порядка аппроксимации по времени и по TVD-схеме по пространству с ограничителем Чакравати—Ошера (схема 2t_2h, SMU);
- уравнений квазидиффузии (2), (3) по трехслойной схеме 2-го порядка аппроксимации по времени и пространству (схема 2t_2h, KD);
- комбинации уравнений для коэффициентов усредненных косинусов и квазидиффузии по схеме 2-го порядка аппроксимации по времени и пространству (схема 2t_2h, SMU+KD).

С целью исследования предлагаемых методов вышеприведенные задачи 1—3 решались в следующих постановках, при которых рассчитывались:

- 1) кинетическое уравнение — по схеме 1-го порядка по пространству, угловой переменной и времени; уравнение с коэффициентами усредненных косинусов — по схеме 2-го порядка по времени и пространству;
- 2) кинетическое уравнение — по схеме 1-го порядка по пространству, угловой переменной и времени; уравнение квазидиффузии — по схеме 2-го порядка по времени и пространству;
- 3) кинетическое уравнение — по схеме 2-го порядка по пространству, угловой переменной и времени; уравнение с коэффициентами усредненных косинусов — по схеме 2-го порядка по времени и пространству;
- 4) кинетическое уравнение — по схеме 2-го порядка по пространству, угловой переменной и времени; уравнение квазидиффузии — по схеме 2-го порядка по времени и пространству;
- 5) кинетическое уравнение — по схеме 2-го порядка по пространству, угловой переменной и времени; комбинация уравнений для коэффициентов усредненных косинусов и квазидиффузии — по схеме 2-го порядка по времени и пространству.

В качестве критерия точности выбрано отклонение численного решения от точного в норме L_2 , рассчитанное по формуле

$$\|\Delta R\|_{L_2} = \frac{\sqrt{\int_{r_l}^{r_r} (R_a - R_c)^2 dr}}{\int_{r_l}^{r_r} |R_a| dr} \cdot 100\%, \quad (6)$$

где R_a — аналитическое решение; R_c — численное решение; r_l, r_r — координаты границ рассчитываемой системы.

Результаты всех расчетов приводятся в разд. 4.

3. Исследование на модельных задачах точности вычисления коэффициентов усредненных косинусов и коэффициентов квазидиффузии

На рис. 1–6 (см. также цветную вкладку) представлены профили коэффициентов квазидиффузии и усредненных косинусов для всех рассматриваемых задач (слева — для одной постановки из разд. 2, справа — для другой) на разные моменты времени и при разных значениях числа Куранта.

Как следует из табл. 1, для расчета коэффициентов предпочтительнее использовать схему второго порядка аппроксимации по времени, пространству и угловой переменной. Точность вычисления

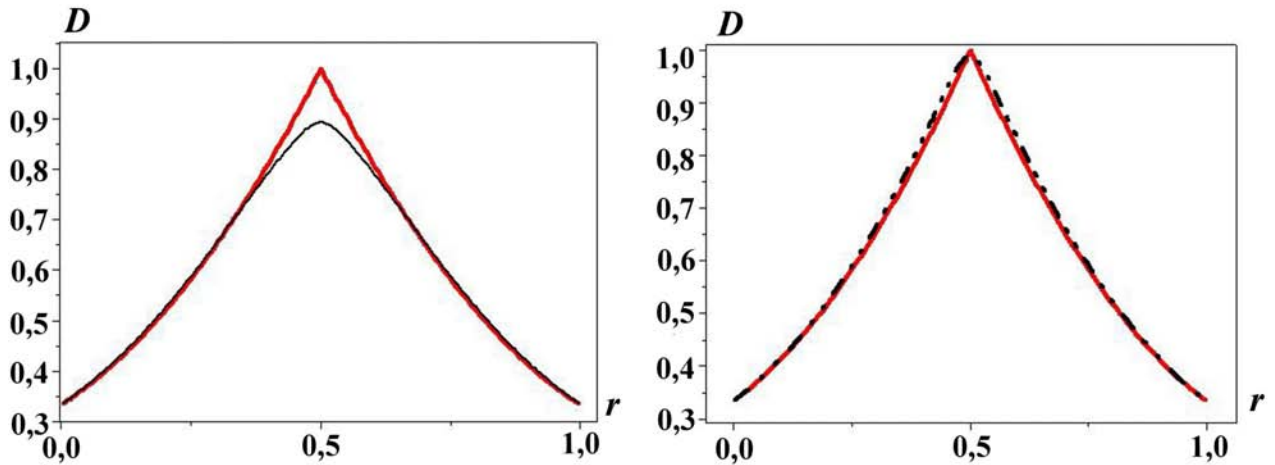


Рис. 1. Задача 1. Профили коэффициентов квазидиффузии, $ct = 0,5; k = 0,5$: — — аналитическое решение; — — постановка 2; - - - - постановка 4

Таблица 1

Отклонения (%) коэффициентов квазидиффузии и усредненных косинусов от аналитического решения

Постановка	Задача 1, $ct = 0,5$		Задача 2, $ct = 0,25$		Задача 3					
	D	$\langle \mu \rangle$	D	$\langle \mu \rangle$	$ct = 0,5$		$ct = 1$		$ct = 1,5$	
					D	$\langle \mu \rangle$	D	$\langle \mu \rangle$	D	$\langle \mu \rangle$
1t_1h, $k = 0,5$	4,2169	26,52	9,8847	6,1467	3,3823	2,1422	1,7699	10,393	3,9281	2,7025
1t_1h, $k = 2$	6,5305	31,493	14,686	8,5467	4,6506	2,9867	2,8155	12,84	5,9188	3,8795
2t_2h, $k = 0,5$	1,9526	11,533	1,1891	1,08	1,4646	0,4	1,5889	6,3533	1,3311	0,3978
2t_2h, $k = 2$	2,7238	18,947	5,8862	3,92	2,3555	1,8577	2,8485	10,233	1,8838	1,1551

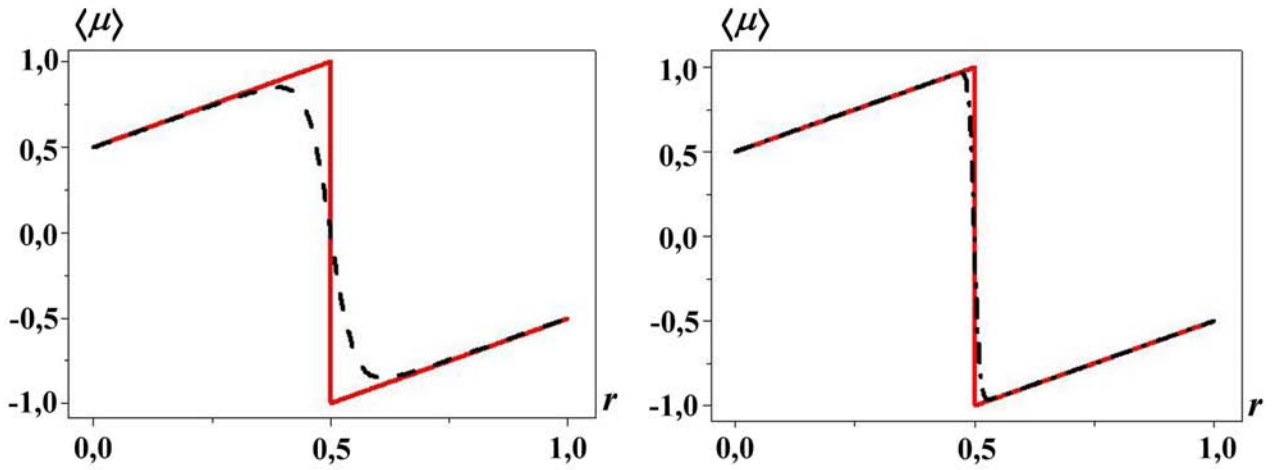


Рис. 2. Задача 1. Профили коэффициентов усредненных косинусов, $ct = 0,5$; $k = 0,5$: — — — — аналитическое решение; - - - - постановка 1; - · - · - постановка 3

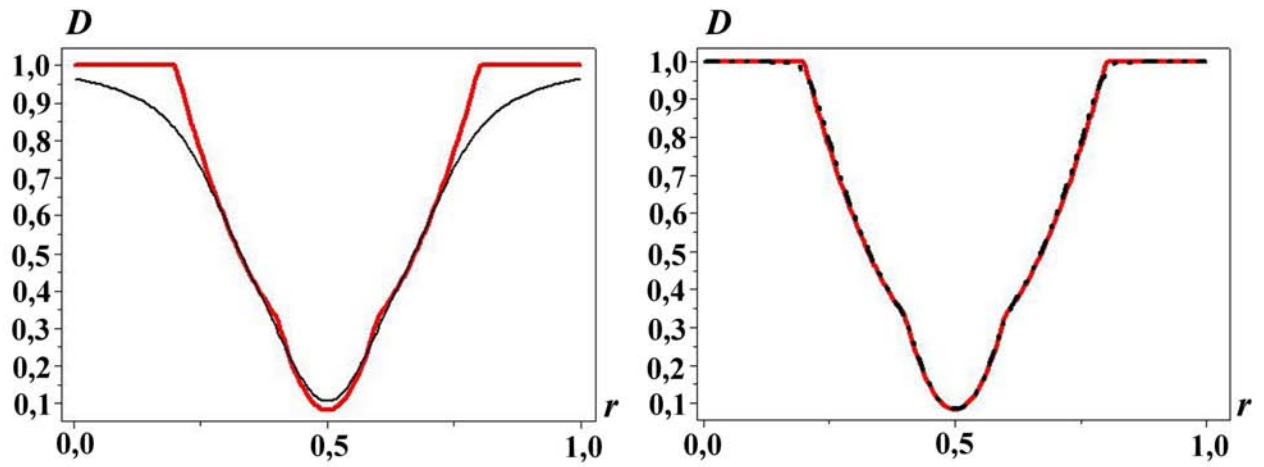


Рис. 3. Задача 2. Профили коэффициентов квазидиффузии, $ct = 0,25$; $k = 0,5$: — — — — аналитическое решение; — — — — постановка 2; - · - · - постановка 4

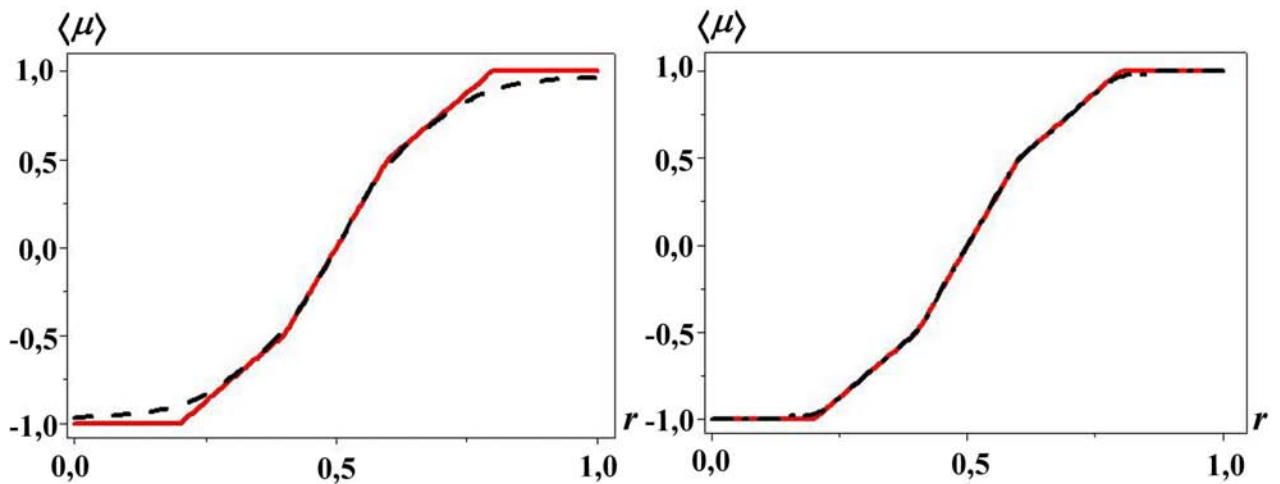


Рис. 4. Задача 2. Профили коэффициентов усредненных косинусов, $ct = 0,25$; $k = 0,5$: — — — — аналитическое решение; - - - - постановка 1; - · - · - постановка 3

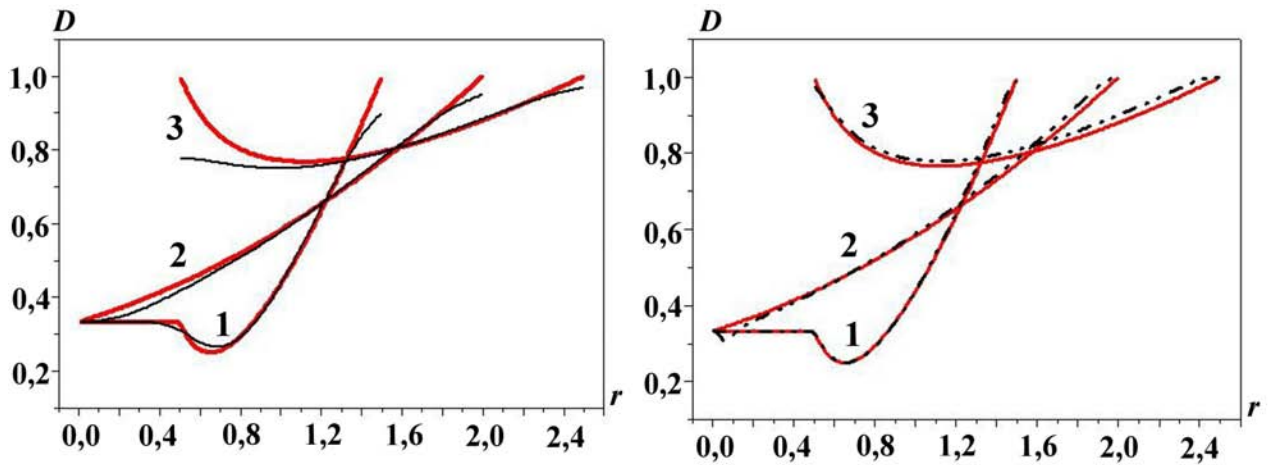


Рис. 5. Задача 3. Профили коэффициентов квазидиффузии, $k = 0,5$: 1 — $ct = 0,5$; 2 — $ct = 1$; 3 — $ct = 1,5$; — — — — аналитическое решение; — — — — постановка 2; - - - - - постановка 4

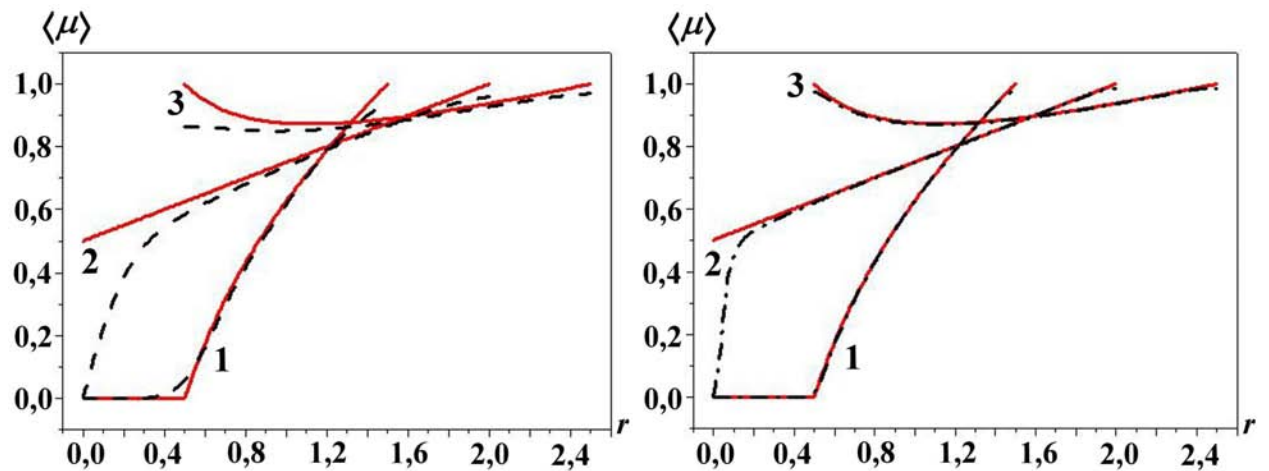


Рис. 6. Задача 3. Профили коэффициентов усредненных косинусов, $k = 0,5$: 1 — $ct = 0,5$; 2 — $ct = 1$; 3 — $ct = 1,5$; — — — — аналитическое решение; - - - - - постановка 1; - · - · - постановка 3

коэффициентов усредненных косинусов, как правило, выше, чем точность вычисления коэффициентов квазидиффузии, за исключением случаев, когда первые претерпевают разрыв (задача 1 — см. рис. 1, 2; задача 3 при $ct = 1$ — см. рис. 6).

Задача 3 при $ct = 1$ характеризуется тем, что коэффициент усредненных косинусов в окрестности центральной точки скачком меняется от 0 до $1/2$.

4. Исследование на модельных задачах точности решений, полученных методами усредненных косинусов и квазидиффузии

На рис. 7–12 (см. также цветную вкладку) представлены профили плотности энергии, полученные для всех вышеуказанных задач в постановках 1–4 из разд. 2 (для постановок 1, 2 графики слева, для постановок 3, 4 — справа) с различными значениями числа Куранта. Как видно из рисунков, квазидиффузионный подход может проявлять сильные немонотонные свойства, в то время как по методу усредненных косинусов получается более монотонное решение.

Из табл. 2 видно, что для задачи 1 метод усредненных косинусов (SMU) дает менее точный результат, чем метод квазидиффузии (KD). Это обусловлено тем, что коэффициенты усредненных

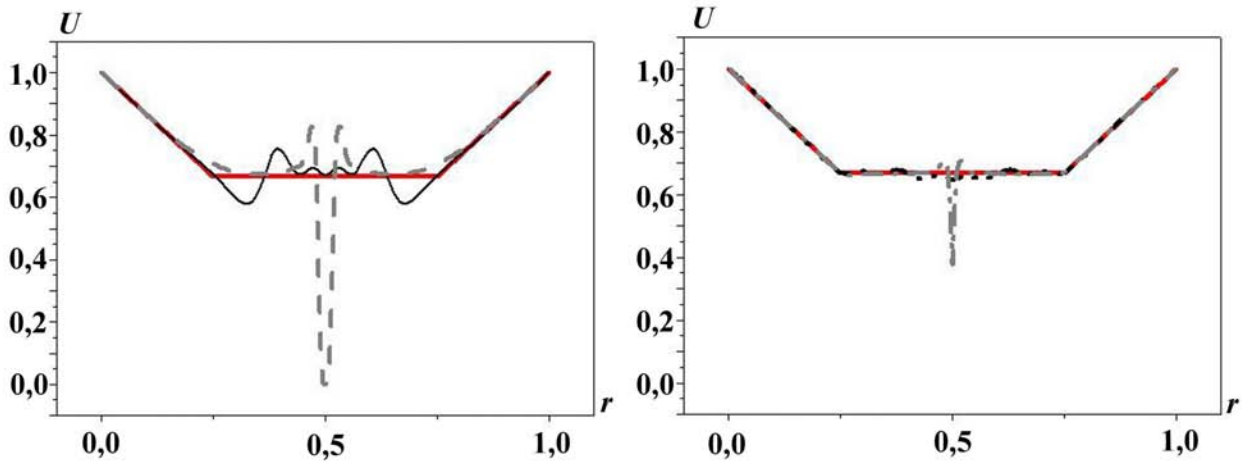


Рис. 7. Задача 1. Профили плотности энергии излучения, $ct = 0,75$; $k = 0,5$: — — — — постановка 1; — — — — постановка 2; - · - · - постановка 3; · · · · · постановка 4

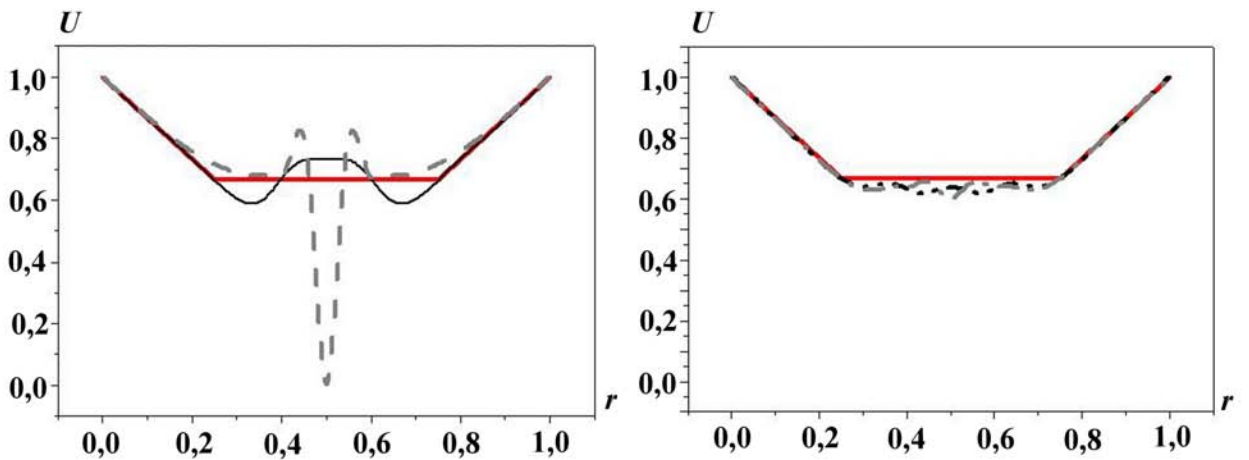


Рис. 8. Задача 1. Профили плотности энергии излучения, $ct = 0,75$; $k = 2$: — — — — постановка 1; — — — — постановка 2; - · - · - постановка 3; · · · · · постановка 4

Таблица 2

Отклонение (%) расчетной плотности энергии излучения от аналитического решения в норме L_2 (6)

Постановка	Задача 1, $ct = 0,75$		Задача 2, $ct = 0,25$		Задача 3					
					$ct = 0,5$		$ct = 1$		$ct = 1,5$	
	KD	SMU	KD	SMU	KD	SMU	KD	SMU	KD	SMU
1t_1h - 2t_2h*, $k = 0,5$	4,925	14,614	31,09	8,658	5,352	1,849	14,427	2,553	141,41	7,26
1t_1h - 2t_2h, $k = 2$	5,181	17,01	37,765	10,459	5,641	2,706	18,668	4,052	51,162	12,87
2t_2h - 2t_2h, $k = 0,5$	0,901	3,263	19,784	1,094	2,524	0,347	11,557	10,264	47,242	1,452
2t_2h - 2t_2h, $k = 2$	2,853	2,913	25,631	5,433	3,349	1,834	17,623	16,550	50,507	7,08

*Первая схема относится к первому этапу счета, вторая — ко второму.

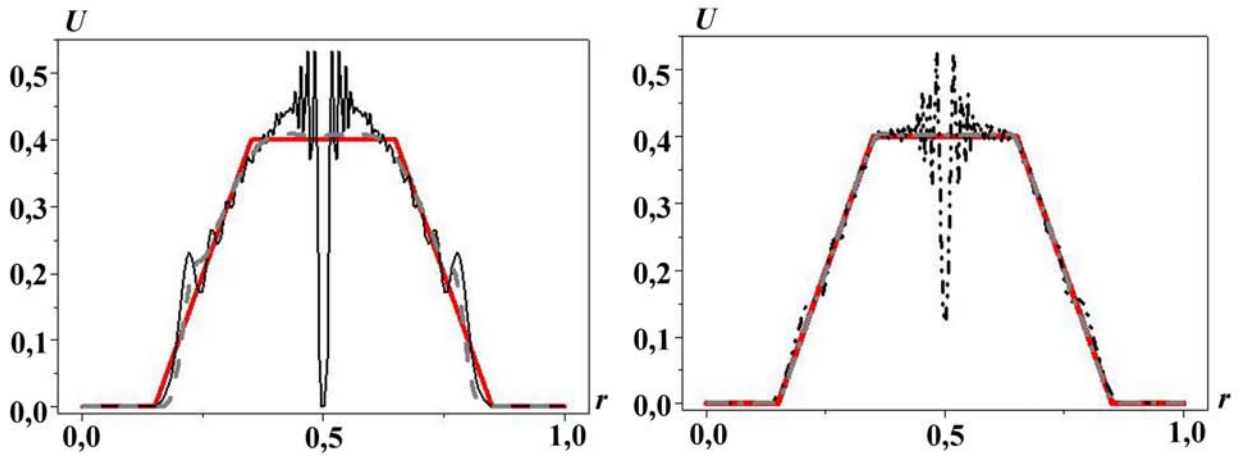


Рис. 9. Задача 2. Профили плотности энергии излучения, $ct = 0,25$; $k = 0,5$: — — — постановка 1; — — — постановка 2; - · - · - постановка 3; - · · - · - постановка 4

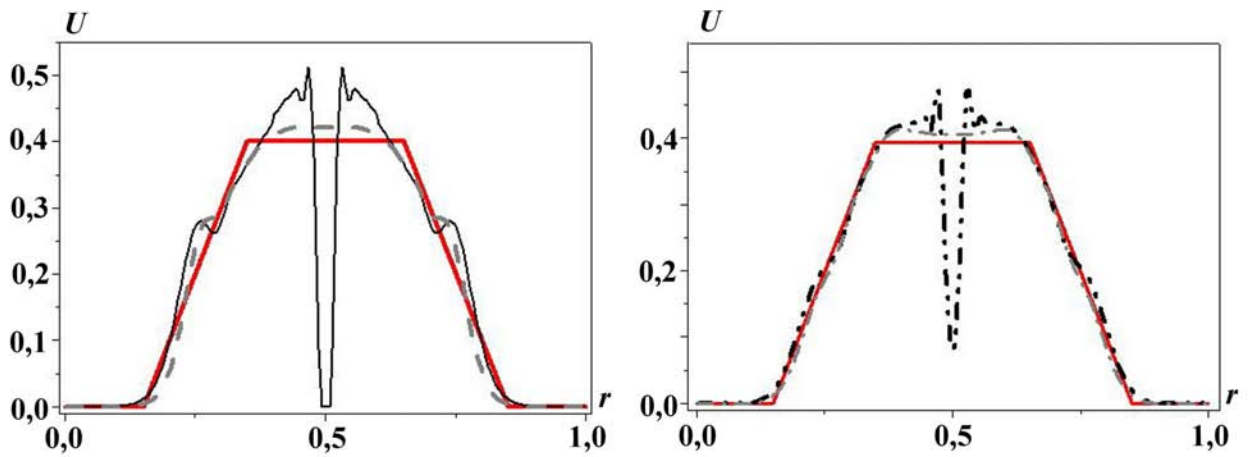


Рис. 10. Задача 2. Профили плотности энергии излучения, $ct = 0,25$; $k = 2$: — — — постановка 1; — — — постановка 2; - · - · - постановка 3; - · · - · - постановка 4

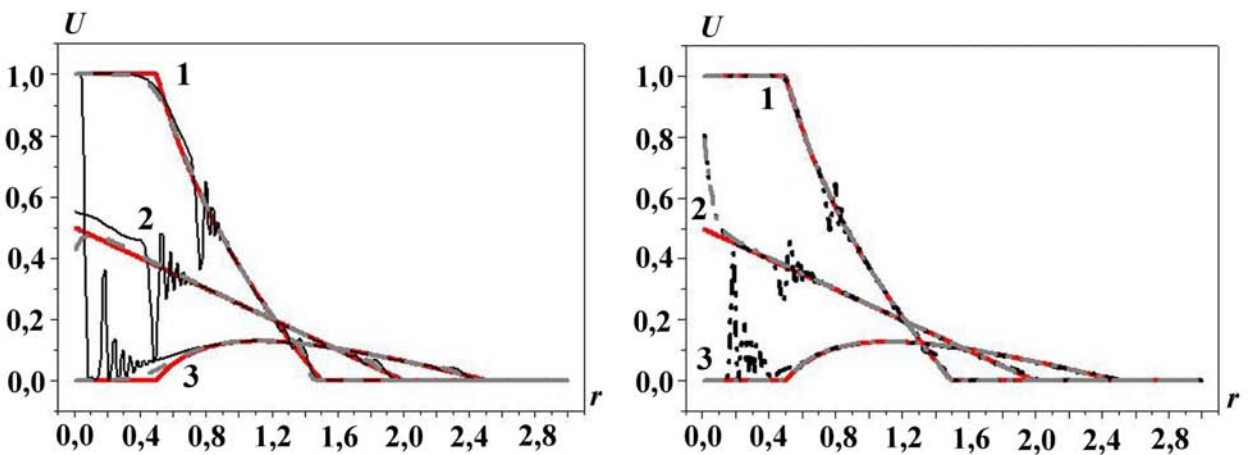


Рис. 11. Задача 3. Профили плотности энергии излучения, $k = 0,5$: 1 — $ct = 0,5$; 2 — $ct = 1$; 3 — $ct = 1,5$; — — — постановка 1; — — — постановка 2; - · - · - постановка 3; - · · - · - постановка 4

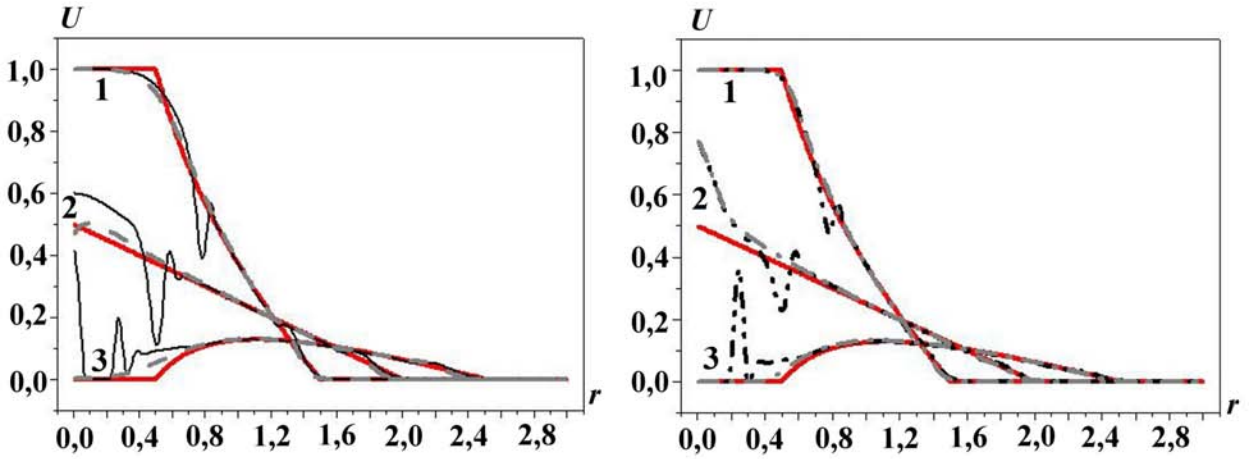


Рис. 12. Задача 3. Профили плотности энергии излучения, $k = 2$: 1 — $ct = 0,5$; 2 — $ct = 1$; 3 — $ct = 1,5$; — — — — постановка 1; — — — — постановка 2; - · - · - постановка 3; ····· — постановка 4

косинусов терпят разрыв, а коэффициенты квазидиффузии непрерывны. Поэтому точность вычисления коэффициентов квазидиффузии на порядок выше, чем усредненных косинусов (см. табл. 1). Следовательно, в точках, где коэффициенты усредненных косинусов терпят разрыв, рекомендуется рассчитывать уравнение переноса в квазидиффузионной постановке. В остальных точках в силу немонокотных свойств решения в квазидиффузионной постановке предпочтение следует отдавать методу усредненных косинусов.

В задаче 3 при $ct = 1$ коэффициенты квазидиффузии вычислялись точнее коэффициентов усредненных косинусов (см. табл. 1), однако решение по квазидиффузионному методу получено с большей ошибкой, чем решение по методу усредненных косинусов. Это обусловлено немонокотностью метода квазидиффузии.

Использование схемы второго порядка аппроксимации для решения кинетического уравнения (1) с целью получения коэффициентов квазидиффузии и (или) усредненных косинусов существенно повышает точность расчета в целом, особенно при использовании метода усредненных косинусов при значениях числа Куранта меньше единицы. При числе Куранта больше единицы данное влияние ослаблено.

Поскольку существуют те точки, в которых предпочтительней рассчитывать задачу в квазидиффузионной постановке, и те, в которых, расчет производится методом усредненных косинусов, предлагается следующий критерий перехода с одной постановки на другую.

Во всем пространстве ищутся точки, где коэффициенты усредненных косинусов меняют знак. Если в точке смены знака слева стоит положительный, а справа отрицательный коэффициент усредненных косинусов (сходящиеся волны), то в ближайшей окрестности этой точки рассчитывается уравнение переноса в квазидиффузионной постановке. Окрестность определяется следующим образом: влево и вправо от точки смены знака проверяется значение коэффициента усредненных косинусов по следующему критерию:

$$|\langle \mu \rangle| < P_1. \tag{7}$$

Если условие (7) выполнено, то в данной точке расчет ведется в квазидиффузионной постановке.

На рис. 13 представлен график отклонения расчетной плотности энергии излучения от точного решения в норме L_2 в зависимости от P_1 . Коэффициенты квазидиффузии и усредненных косинусов для приведенного расчета вычислялись по схеме второго порядка аппроксимации по времени, пространству и угловой переменной. Видно, что при определенном значении P_1 ($0,2 < P_1 < 0,3$) точность решения при комбинировании уравнения с усредненными косинусами и уравнения квази-

диффузии выше, чем точность решения, полученного из уравнения квазидиффузии или уравнения с усредненными косинусами в отдельности.

В табл. 3 приведен практический порядок аппроксимации, который рассчитывался по формуле

$$\delta = \log_2 \left(\frac{\|R_{c,n} - R_a\|}{\|R_{c,2n} - R_a\|} \right), \quad (8)$$

где $R_{c,n}$ — решение, полученное на одинарной сетке; $R_{c,2n}$ — решение, полученное на сетке, измельченной в два раза по всем переменным.

Рис. 14 (см. также цветную вкладку), представляющий профили плотности энергии, рассчитанные в постановках 3–5 (см. разд. 2), рис. 15, на котором отражена скорость сходимости, а также табл. 3 демонстрируют эффективность введения метода комбинирования уравнений для коэффициентов квазидиффузии и усредненных косинусов для решения задач переноса излучения.

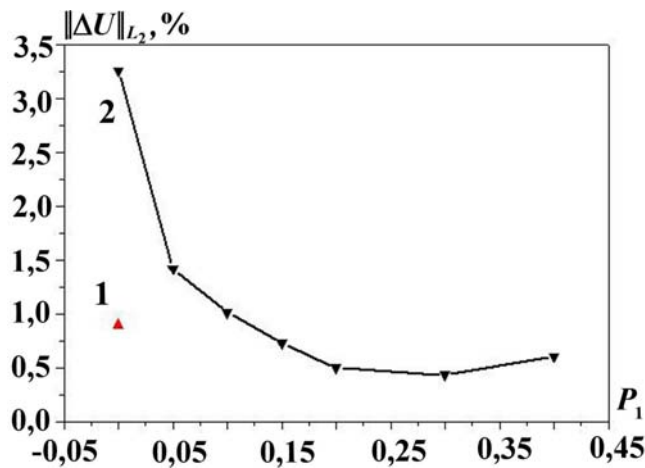


Рис. 13. Задача 1. Отклонение (%) расчетной плотности энергии излучения от точного решения в норме L_2 в зависимости от параметра P_1 ; $ct = 0,75$; $k = 0,5$: 1 — уравнение квазидиффузии; 2 — комбинация уравнений для коэффициентов усредненных косинусов и квазидиффузии

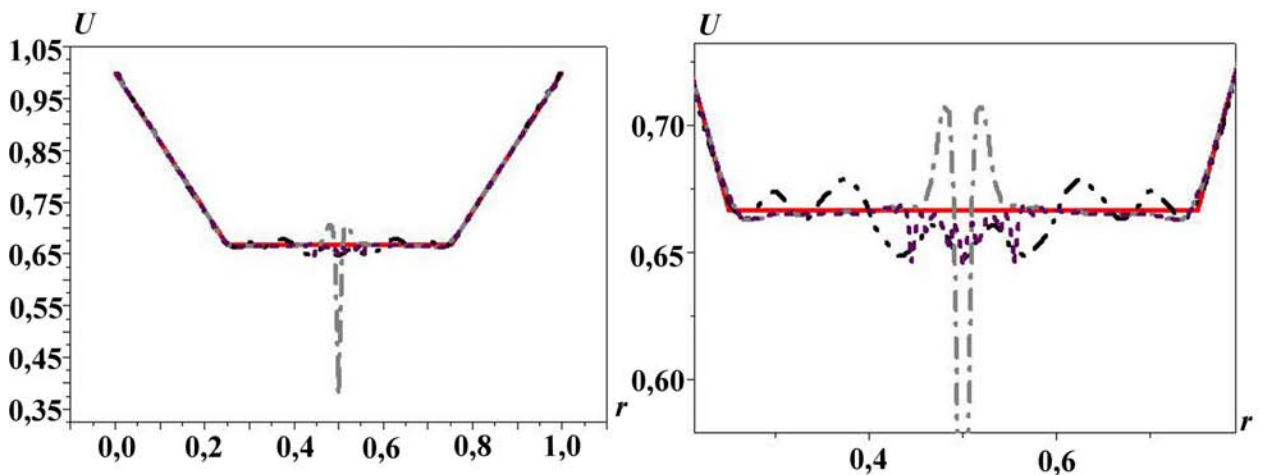


Рис. 14. Задача 1. Профили плотности энергии излучения, $ct = 0,75$; $k = 0,5$; $P_1 = 0,2$ (справа — увеличенный фрагмент): — — — аналитическое решение; - - - - постановка 3; - · - · - постановка 4; - - - - постановка 5

Задача 1. Практический порядок аппроксимации

Постановка	KD	SMU	SMU+KD
1t_1h — 2t_2h*, $k = 0,5$	0,354	0,359	1,08
2t_2h — 2t_2h, $k = 0,5$	0,636	0,5	1,33

*Первая схема относится к первому этапу счета, вторая — ко второму.

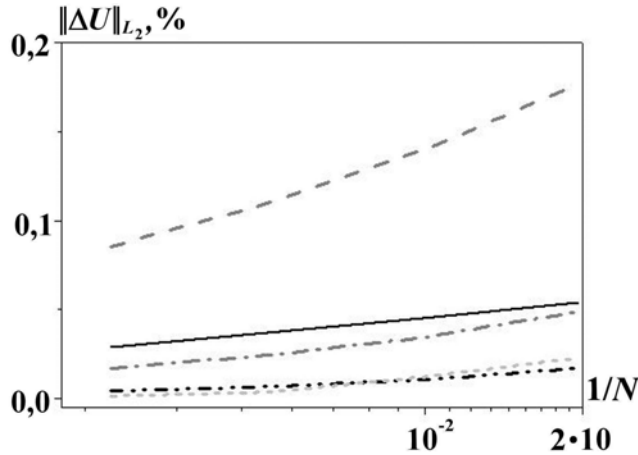


Рис. 15. Задача 1. Скорости сходимости в норме L_2 по временной, пространственной и угловой переменным при постоянном числе Куранта $k = 0,5$; $ct = 0,75$: — — — — постановка 1; — — — — постановка 2; — — — — постановка 3; — — — — постановка 4; — — — — постановка 5 (N — число точек по пространству)

Заключение

На основе проведенного исследования был выявлен класс задач, на котором точность метода усредненных косинусов ниже точности метода квазидиффузии. Предложен алгоритм комбинации вышеуказанных методов, позволяющий увеличить точность получаемого решения. Показано, что сочетание трехслойной разностной схемы по времени и TVD-схемы по пространству не вызывает развития немонотонности, свойственной трехслойной схеме. Для вычисления коэффициентов квазидиффузии и усредненных косинусов рекомендуется использовать схемы второго порядка аппроксимации по времени, пространству и угловой переменной, поскольку это существенно повышает точность решения в целом.

Список литературы

1. Гольдин В. Я. Квазидиффузионный метод решения кинетического уравнения // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1964. Т. 4, № 6. С. 1078—1087.
2. Карлыханов Н. Г. Применение метода квазидиффузии для решения задач переноса излучения // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2010. Вып. 1. С. 32—38.
3. Егорова А. С., Карлыханов Н. Г. Решение кинетического уравнения переноса излучения методом усредненных косинусов // Там же. 2011. Вып. 3. С. 29—38.

4. *Гаджиев А. Д., Шестаков А. А., Завьялов В. В., Грабовенская С. А.* Применение TVD-подхода к решению уравнения переноса теплового излучения квазидиффузионным методом // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2010. Вып. 3. С. 3—14.
5. *Зуев А. И.* О трехслойной схеме для численного интегрирования уравнений газодинамики и нелинейного уравнения теплопроводности // Численные методы решения задач математической физики. М.: Наука, 1966. С. 230—236.
6. *Osher S., Chakravarthy S.* High resolution schemes and the entropy condition // SIAM J. Numer. Anal. 1984. Vol. 21(5). P. 955—984.

Статья поступила в редакцию 27.08.12.
