

УДК 519.6

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ И ЧИСЛЕННАЯ МОДЕЛИ СКЛОНОВОГО СТОКА ДОЖДЕВЫХ ОСАДКОВ НА ПОВЕРХНОСТИ ВОДОСБОРА РЕЧНОЙ СЕТИ

В. М. Конюхов, А. А. Савельев, М. Г. Храмченков, А. Н. Чекалин, Н. Е. Галиуллина  
(КФУ, г. Казань)

В рамках модели двумерной кинематической волны дается математическое описание склонового стока дождевых осадков на поверхности водосбора речной сети с учетом впитывания воды в зону неполного насыщения почвы. Для определения содержания влаги в этой зоне предложен приближенный подход, основанный на модели капиллярной пропитки. Показано, что в начальный момент появления жидких осадков склоновый сток не образуется. *Запаздывающий* аргумент и момент появления склонового стока вычисляются из системы алгебраических уравнений.

Разработаны численная и алгоритмическая модели, реализованные в программном комплексе, позволяющем проводить расчеты поверхностного стока. Проведено исследование склонового стока на данных по бассейну реки Меша Республики Татарстан.

*Ключевые слова:* численное моделирование, кинематическая волна, склоновый сток, поверхность водосбора, зона неполного насыщения, капиллярная пропитка.

### Введение

Моделирование процессов, формирующих сток осадков на поверхности водосбора регионального масштаба, традиционно представляет значительный интерес для гидрологии, гидрогеологии, метеорологии и других смежных наук, включая геоэкологию. Сложность и многофакторность процессов, формирующих сток осадков в течение года, предполагает интенсивное применение математического моделирования [1–3].

Под склоновым стоком понимают движение воды по поверхности, имеющей уклон к речной сети, а также в толще почвогрунтов склона. Склоновый сток — это важнейший элемент процесса формирования речного стока, который определяется впитыванием и испарением воды, поступившей на водосбор, по всей его площади [4–6]. Он может быть представлен в виде трех составляющих: поверхностный сток (сплошной или ручейковый), подповерхностный и подземный, или грунтовый (для больших склонов). Термин *подповерхностный сток* близок по смыслу к часто используемому понятию *внутрипочвенный сток*, которое применяется при моделировании сравнительно быстрого движения воды в верхних слоях почвы вдоль склона (фильтрация воды и сквозной сток по макропорам и трещинам). При этом скорость движения воды вдоль склона под поверхностью водосбора, с одной стороны, заметно меньше, чем на его поверхности, а с другой стороны, превышает скорость движения грунтовых вод в водоносном горизонте. Грунтовый сток, т. е. движение воды к речной сети в насыщенных водоносных слоях, формирует слабо изменяющуюся составляющую гидрографа, хотя часть воды из насыщенных водоносных горизонтов может поступать в речное русло сразу после выпадения осадков. В различных физико-географических районах [7–9], даже в пределах сравнительно небольших водосборов, формирование склонового стока может определяться разнообразными механизмами. Часто различные виды склонового стока переходят друг в друга, изменяясь в зависимости от состояния поверхности, предшествующего увлажнения, интенсивности и общего количества осадков разного типа, выпавших на склоновую поверхность [10–17].

### Математическая модель

Для математического описания поверхностной и подповерхностной составляющих склонового стока воспользуемся концепцией двумерной кинематической волны [1, 8]. Содержание влаги в зоне неполного насыщения (ЗНН (почве)) предлагается определять на основе приближенного подхода в рамках модели капиллярной пропитки. В этом случае математическая модель склонового стока воды на поверхности водосбора может быть описана следующей системой уравнений, учитывающих пространственно-временные изменения толщины водного слоя на поверхности водосбора в зависимости от осадков и впитывания воды:

$$\frac{\partial(U + \Theta)}{\partial t} + V_x + V_y = \varepsilon_1; \quad (1)$$

$$V_x = -\frac{\partial}{\partial x} \left( U^{5/3} V_{1,x} \right); \quad V_y = -\frac{\partial}{\partial y} \left( U^{5/3} V_{1,y} \right); \quad (2)$$

$$V_{1,x} = \frac{Z'_x}{n\sqrt{\nabla Z}}; \quad V_{1,y} = \frac{Z'_y}{n\sqrt{\nabla Z}}; \quad \nabla Z = \sqrt{Z_x'^2 + Z_y'^2}; \quad Z = H + U; \quad (3)$$

$$Z'_x = \frac{\partial Z}{\partial x}; \quad Z'_y = \frac{\partial Z}{\partial y}; \quad \Theta = \sqrt{a^2 t^2 + bt} - at; \quad a = \frac{g\rho r^2}{4\mu}; \quad b = \frac{\sigma r}{2\mu} \cos \alpha. \quad (4)$$

Здесь  $U$  — толщина водного слоя на поверхности водосбора;  $\Theta$  — функция, отражающая содержание жидкой воды в ЗНН;  $\varepsilon_1$  — заданная функция осадков и испарения;  $n$  — коэффициент шероховатости Маннинга;  $H$  — отметка поверхности земли;  $\rho, g, r, \sigma, \alpha, \mu, t$  — плотность воды, ускорение свободного падения, средний радиус пор в ЗНН, поверхностное натяжение, краевой угол смачивания, вязкость воды и время соответственно.

Решение уравнения (1) рассматривается в области  $G$  с границей  $\Gamma = \Gamma_b + \Gamma_p$ , где  $\Gamma_b$  — линия водораздела,  $\Gamma_p$  — створ реки. Начальные и граничные условия имеют вид

$$U(x, y, 0) = 0; \quad V_n|_{\Gamma_b} = 0, \quad (5)$$

где  $V_n|_{\Gamma_b}$  — нормальная к границе составляющая потока.

### Особенности решения уравнения (1)

1. Так как на границе водораздела  $\Gamma_b$  нет притока воды, то  $U$  становится больше нуля только за счет функции  $\varepsilon_1$ . В то же время вода впитывается в ЗНН, а функция  $\frac{\partial \Theta}{\partial t}$  определяет этот расход. Очевидно, при определенных условиях (недостаточное количество осадков) вода может полностью уйти в ЗНН, и тогда склонового стока не образуется, т. е.  $U = 0$ . Из уравнения (1) и третьего равенства (4) следует, что если в области  $G$  имеет место неравенство

$$\varepsilon_1 \leq \frac{\partial \Theta}{\partial t} = \frac{a^2 t + \frac{b}{2}}{\sqrt{a^2 t^2 + bt}} - a, \quad (6)$$

то  $U = 0$  и все осадки успевают впитаться.

2. Рассмотрим уравнение (1) в начальный момент времени, т. е. при  $t \rightarrow 0$ . Поверхностный сток может возникнуть только тогда, когда появятся осадки, поэтому  $\varepsilon_1|_{t \rightarrow 0} = \varepsilon_1^0$  — известное конечное значение. С другой стороны, для ЗНН  $t = 0$  — момент появления мгновенного источника воды на границе этой зоны, расход которого определяется величиной  $\frac{\partial \Theta}{\partial t}$ . При  $t \rightarrow 0$  будем иметь

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} \Big|_{t \rightarrow 0} \approx 0,5 \sqrt{\frac{b}{t}} \rightarrow \infty.$$

Таким образом, в начальный момент времени выполняется условие (6) и поверхностный сток образуется не сразу, а только через некоторое время.

3. Функция  $\Theta$  определяет влагосодержание в ЗНН, а  $\frac{\partial \Theta}{\partial t}$  характеризует, с одной стороны, количество жидкости, поступающей через ее границу (поверхность земли), с другой стороны — скорость продвижения фронта насыщения в этой зоне. Соотношение в (4) получено в предположении, что на границе ЗНН достаточно воды, чтобы обеспечить максимально возможную скорость впитывания жидкости. Если же количество осадков меньше, то они впитываются полностью и количество воды, поступившей в ЗНН, определяется уже не соотношением в (4), а функцией  $\varepsilon_1$ :  $\Theta = \int_0^t \varepsilon_1 d\tau$ .

Очевидно, в результате снизится скорость продвижения фронта насыщения. Поэтому с момента  $t_0$ , когда интенсивность осадков превысит интенсивность впитывания и на поверхности земли появится слой воды, функция  $\frac{\partial \Theta}{\partial t}$ , определяющая расход воды в ненасыщенную зону, будет иметь запаздывающий аргумент  $\tau_3$ . Таким образом, возникает задача определения  $t_0$  и  $\tau_3$ .

Обозначим  $t_1 = t_0 - \tau_3$ . При  $t = t_0$  интенсивность осадков равна интенсивности впитывания:

$$\frac{a^2 t_1 + 0,5b}{\sqrt{a^2 t_1^2 + b t_1}} - a = \varepsilon_1(t_0). \quad (7)$$

На этот же момент времени все выпавшие осадки впитались в ЗНН и определили влагосодержание этой зоны. Отсюда имеем

$$\sqrt{a^2 t_1^2 + b t_1} - a t_1 = A(t_0), \quad A(t_0) = \int_0^{t_0} \varepsilon_1 d\tau. \quad (8)$$

Уравнения (7) и (8) составляют систему нелинейных уравнений для определения значений  $t_0$  и  $t_1$ . После несложных преобразований получим

$$t_1 = \frac{b}{2a^2} \left( \frac{\varepsilon_1(t_0) + a}{\sqrt{\varepsilon_1^2(t_0) + 2a\varepsilon_1(t_0)}} - 1 \right); \quad (9)$$

$$A(t_0) = \frac{b}{2a} \left( 1 - \frac{\varepsilon_1(t_0)}{\sqrt{\varepsilon_1^2(t_0) + 2a\varepsilon_1(t_0)}} \right). \quad (10)$$

Из уравнения (10) вычисляется значение  $t_0$ , а из (9) —  $t_1$ . Если  $\varepsilon_1 = \text{const}$  при  $t < t_0$ , то  $A(t_0) = t_0 \varepsilon_1$  и поставленная задача легко решается:

$$t_0 = \frac{b}{2a\varepsilon_1} \left( 1 - \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\varepsilon_1^2 + 2a\varepsilon_1}} \right); \quad \tau_3 = t_0 - t_1 = \frac{b}{2a^2} \left( 1 + \frac{a}{\varepsilon_1} - \sqrt{1 + \frac{2a}{\varepsilon_1}} \right). \quad (11)$$

Таким образом, поверхностный сток образуется при  $t \geq t_0$ , а функция  $\Theta$  определяется из соотношения с запаздывающим аргументом:

$$\Theta = \sqrt{a^2 (t - \tau_3)^2 + b (t - \tau_3)} - a (t - \tau_3). \quad (12)$$

4. Интенсивность выпадения осадков со временем может уменьшиться до значения, при котором будут образовываться области, где вся поступающая вода впитывается. В результате в некоторый момент времени  $t_{кр}$  появится область  $D_{кр}$  с границей  $\Gamma_{кр}$ , в которой  $U = 0$  при  $t > t_{кр}$ . Тогда внутри этой области влагосодержание ЗНН будет определяться из соотношения

$$\Theta(t) = \Theta(t_{кр}) + \int_{t_{кр}}^t \varepsilon_1 d\tau. \quad (13)$$

На той части границы  $\Gamma_{кр}$ , где поток воды направлен из  $D_{кр}$ ,  $U = 0$  и не имеет скачка. На остальной части границы  $U$  может иметь скачок, а расход воды в ненасыщенную зону вычисляется из равенства

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \varepsilon_1 + V_n^+, \quad (14)$$

где  $V_n^+$  — поток воды через  $\Gamma_{кр}$ .

Область  $D_{кр}$  может исчезнуть, если интенсивность осадков увеличится. В этом случае, как в п. 3, нужно будет вычислить запаздывающий аргумент  $\bar{t}_3$  и момент времени  $\bar{t}_0$ , когда интенсивность осадков превысит интенсивность впитывания и на поверхности земли появится слой воды. Для этого потребуется решить систему уравнений, аналогичную системе (7), (8), в которой видоизменяется только  $A(t_0)$ , а именно

$$A(\bar{t}_0) = \Theta_{кр} + \int_{t_{кр}}^{\bar{t}_0} (\varepsilon_1 + V_n^+) d\tau. \quad (15)$$

Таким образом, задача может быть сформулирована следующим образом: найти решение  $U \geq 0$  и  $\Theta$  системы уравнений (1)–(4), (9)–(15) с начальными и граничными условиями (5) и вычислить поток воды через створ реки  $\Gamma_p$ .

### Численный метод и алгоритм решения поставленной задачи

Нелинейное дифференциальное уравнение, описывающее склоновый сток на поверхности водосбора, решается конечно-разностным методом. Для этого область  $D$  покроем сеткой  $D_h$  с шагами  $h_x$  и  $h_y$  по переменным  $x$  и  $y$  соответственно таким образом, чтобы границы элементарных ячеек лежали на границе  $\Gamma$ . Сеточную границу области  $D_h$  обозначим через  $\Gamma_h$ .

При склоновом поверхностном стоке обычно выполняется условие  $|\text{grad } Z| \neq 0$  и, как правило,  $|\text{grad } H| \gg |\text{grad } U|$ . Казалось бы, можно пренебречь производными  $U'_x$ ,  $U'_y$  и принять  $\text{grad } Z = \text{grad } H$ . Однако в определенных условиях  $U'_x$ ,  $U'_y$  могут оказать значительное влияние на поверхностный сток. Поэтому в уравнениях (3) примем  $\text{grad } Z = \text{grad } H$ , а производные  $Z'_x$ ,  $Z'_y$  в первых двух равенствах приближенно представим в виде  $Z'_x \approx \sqrt{H'_x + U'_x} \sqrt{H'_x}$ ;  $Z'_y \approx \sqrt{H'_y + U'_y} \sqrt{H'_y}$ . Учитывая характерные особенности рассматриваемой задачи, будем использовать линеаризованную неявную разностную схему. Для этого потоки через границы элементарных ячеек представим в виде

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{i\pm 1/2,j} &= \begin{cases} U_{i\pm 1/2,j}^{t+\tau} \left( U_{i\pm 1/2,j}^t \right)^{2/3} V_{1,i\pm 1/2,j}, & (x_{i\pm 1/2}, y_j) \in D_h; \\ 0, & (x_{i\pm 1/2}, y_j) \in \Gamma_h; \end{cases} \\ \tilde{V}_{i,j\pm 1/2} &= \begin{cases} U_{i,j\pm 1/2}^{t+\tau} \left( U_{i,j\pm 1/2}^t \right)^{2/3} V_{1,i,j\pm 1/2}, & (x_i, y_{j\pm 1/2}) \in D_h; \\ 0, & (x_i, y_{j\pm 1/2}) \in \Gamma_h; \end{cases} \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} V_{1,i\pm 1/2,j} &= 2 \frac{h_y \text{sign}(Z_{i\pm 1,j} - Z_{i,j}) \sqrt{|Z_{i\pm 1,j} - Z_{i,j}|} \sqrt{|H_{i\pm 1,j} - H_{i,j}|}}{h_x K_{i\pm 1/2,j} (n_{i,j} + n_{i\pm 1,j})}, \\ V_{1,i,j\pm 1/2} &= 2 \frac{h_y \text{sign}(Z_{i,j\pm 1} - Z_{i,j}) \sqrt{|Z_{i,j\pm 1} - Z_{i,j}|} \sqrt{|H_{i,j\pm 1} - H_{i,j}|}}{(n_{i,j} + n_{i,j\pm 1}) K_{i,j\pm 1/2}}, \end{aligned} \quad (17)$$

$$K_{i\pm 1/2,j} = \begin{cases} \tilde{K}_{i\pm 1/2,j}, & (H_{i\pm 1,j} - H_{i\pm 1,j+1})(H_{i\pm 1,j} - H_{i\pm 1,j-1}) < 0; \\ \sqrt{\left| \frac{H_{i\pm 1,j} - H_{i,j}}{h_x} \right|}, & (H_{i\pm 1,j} - H_{i\pm 1,j+1})(H_{i\pm 1,j} - H_{i\pm 1,j-1}) \geq 0; \end{cases}$$

$$K_{i,j\pm 1/2} = \begin{cases} \tilde{K}_{i,j\pm 1/2}, & (H_{i,j\pm 1} - H_{i-1,j\pm 1})(H_{i,j\pm 1} - H_{i+1,j\pm 1}) < 0; \\ \sqrt{\left| \frac{H_{i,j\pm 1} - H_{i,j}}{h_y} \right|}, & (H_{i,j\pm 1} - H_{i-1,j\pm 1})(H_{i,j\pm 1} - H_{i+1,j\pm 1}) \geq 0; \end{cases}$$

$$\tilde{K}_{i\pm 1/2,j} = \left\{ \frac{1}{2} \left[ \sqrt{\left( \frac{H_{i+1,j} - H_{i-1,j}}{2h_x} \right)^2 + \left( \frac{H_{i,j+1} - H_{i,j-1}}{2h_y} \right)^2} + \sqrt{\left( \frac{H_{i+1\pm 1,j} - H_{i-1\pm 1,j}}{2h_x} \right)^2 + \left( \frac{H_{i\pm 1,j+1} - H_{i\pm 1,j-1}}{2h_y} \right)^2} \right] \right\}^{-1/2};$$

$$\tilde{K}_{i,j\pm 1/2} = \left\{ \frac{1}{2} \left[ \sqrt{\left( \frac{H_{i,j+1} - H_{i,j-1}}{2h_y} \right)^2 + \left( \frac{H_{i+1,j} - H_{i-1,j}}{2h_x} \right)^2} + \sqrt{\left( \frac{H_{i,j\pm 1+1} - H_{i,j\pm 1-1}}{2h_y} \right)^2 + \left( \frac{H_{i+1,j\pm 1} - H_{i-1,j\pm 1}}{2h_x} \right)^2} \right] \right\}^{-1/2},$$

где  $\tau$  — временной шаг.

Следует учесть, что реальные данные профиля поверхности склона могут быть такими, что  $H_{i,j} < H_{i\pm 1,j}$  и  $H_{i,j} < H_{i,j\pm 1}$ , а значит, градиент изменения склона направлен по диагонали элементарной ячейки, а склоновый поток — из ячейки  $D_{i,j}$  в одну или даже две ячейки, расположенные по диагонали. В этом случае наряду с потоками  $\tilde{V}_{i\pm 1/2,j}$  и  $\tilde{V}_{i,j\pm 1/2}$  необходимо вычислить потоки  $\tilde{W}_{i\pm 1/2,j}$  из ячейки  $D_{i,j}$  в ячейки  $D_{i\pm 1,j\pm 1}$  и  $\tilde{W}_{i,j\pm 1/2}$  из ячейки  $D_{i,j}$  в ячейки  $D_{i\pm 1,j\mp 1}$ .

Для определения этих потоков вместо прямоугольных элементарных ячеек построим другие ячейки. Пусть  $H_{i,j} > H_{i+1,j+1}$ . Если одновременно  $H_{i+1,j+1} < H_{i+1,j}$  и  $H_{i+1,j+1} < H_{i,j+1}$ , то очевидно, что основной поток направлен по диагонали из ячейки  $D_{i,j}$  в ячейку  $D_{i+1,j+1}$  и необходимо вычислить  $\tilde{W}_{i+1/2,j}$ . Подчеркнем, что если хотя бы одно из этих трех условий не выполняется, то  $\tilde{W}_{i+1/2,j} = 0$ .

На рис. 1 показаны преобразованные ячейки  $D_{i,j}$ ,  $D_{i+1,j}$ ,  $D_{i,j+1}$  и  $D_{i+1,j+1}$ . По построению граница  $M_1M_2$  ортогональна к отрезкам  $C_1D_1$  и  $C_2D_2$ , соединяющим середины соответствующих сто-

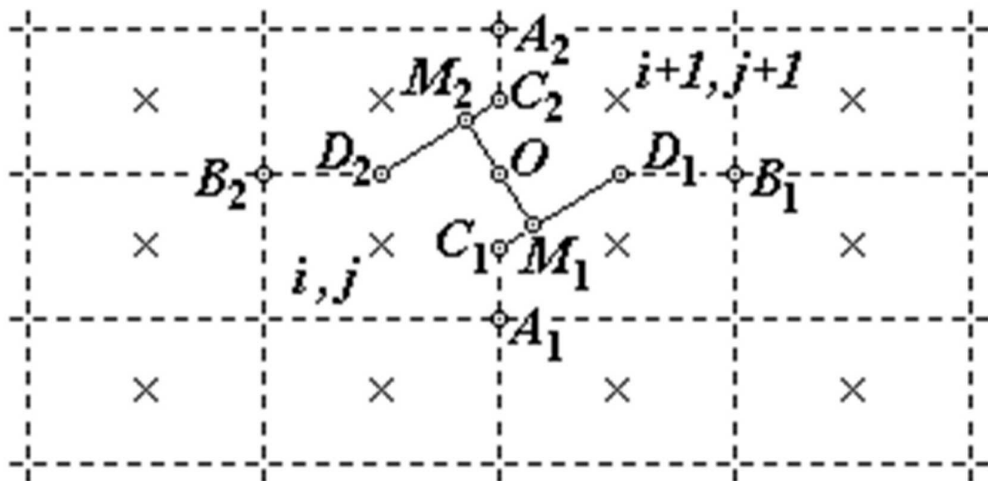


Рис. 1. Преобразование ячеек при направлении склонового потока по диагонали из ячейки  $D_{i,j}$  в ячейку  $D_{i+1,j+1}$

рон прямоугольных элементарных ячеек. Длина  $l$  отрезка  $M_1M_2$  определяется по формуле  $l = h_x h_y / \sqrt{h_x^2 + h_y^2}$ , а *диагональный* поток — из соотношений

$$\widetilde{W}_{i+1/2,j} = U_{i,j}^{t+\tau} (U_{i,j}^t)^{2/3} \omega_{i+1/2,j}, \quad \omega_{i+1/2,j} = -\frac{2l}{n_{i,j} + n_{i+1,j+1}} \frac{\sqrt{|(Z_{i+1,j+1} - Z_{i,j})|}}{(h_x^2 + h_y^2)^{1/4}}. \quad (18)$$

Определим потоки  $v_1, v_2, v_3$  и  $v_4$  через границы  $A_1C_1M_1, M_1D_1B_1, A_2C_2M_2$  и  $M_2D_2B_2$ .

На участках границ  $A_1C_1, D_1B_1, A_2C_2$  и  $D_2B_2$  составляющие этих потоков вычисляются из соотношений (16), (17), но при этом их значения должны быть уменьшены в два раза из-за уменьшения длины границ. Рассмотрим оставшиеся участки  $C_1M_1, M_1D_1, C_2M_2$  и  $M_2D_2$ .

Если  $H_{i,j} \geq H_{i+1,j}$ , то поток направлен из ячейки  $D_{i,j}$  в ячейку  $D_{i+1,j+1}$  через ячейку  $D_{i+1,j}$  и можно принять, что граница  $C_1D_1$  лежит на линии тока и нормальная составляющая потока к этой границе равна нулю. Тогда потоки через границы  $A_1C_1M_1$  и  $M_1D_1B_1$  равны  $\widetilde{V}_{i+1/2,j}/2$  и  $\widetilde{V}_{i,j+1/2}/2$  соответственно.

Если  $H_{i,j} < H_{i+1,j}$ , то аппроксимация нормальной  $\theta_1$  и касательной  $\phi_1$  составляющих градиента поверхностного склона к границе  $C_1D_1$  может быть представлена в виде

$$\theta_1 = \frac{\frac{h_y}{h_x} (H_{i+1,j} - H_{i,j}) + \frac{h_x}{h_y} (H_{i+1,j} - H_{i+1,j+1})}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2}}; \quad \phi_1 = \frac{H_{i+1,j+1} - H_{i,j}}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2}}.$$

Аналогично при  $H_{i,j} < H_{i,j+1}$  запишем аппроксимацию нормальной  $\theta_2$  и касательной  $\phi_2$  составляющих градиента поверхностного склона к границе  $C_2D_2$ :

$$\theta_2 = \frac{\frac{h_x}{h_y} (H_{i,j+1} - H_{i,j}) + \frac{h_y}{h_x} (H_{i,j+1} - H_{i+1,j+1})}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2}}; \quad \phi_2 = \phi_1.$$

Так как длины  $l_{C_1M_1}, l_{M_1D_1}$  отрезков  $C_1M_1, M_1D_1$  равны  $l_{C_1M_1} = l_{C_2M_2} = 0,5h_x^2 / \sqrt{h_x^2 + h_y^2}$  и  $l_{M_1D_1} = l_{M_2D_2} = 0,5h_y^2 / \sqrt{h_x^2 + h_y^2}$ , то потоки  $v_1, v_2, v_3$  и  $v_4$  через границы  $A_1C_1M_1, M_1D_1B_1, A_2C_2M_2$  и  $M_2D_2B_2$  определяются соотношениями

$$\begin{aligned} v_1 &= U_{i+1,j}^{t+\tau} (U_{i+1,j}^t)^{2/3} \left[ 0,5V_{1,i+1/2,j} + l_{C_1M_1} (\theta_1^2 + \phi_1^2)^{-1/4} \right]; \\ v_2 &= U_{i+1,j}^{t+\tau} (U_{i+1,j}^t)^{2/3} \left[ 0,5V_{1,i+1,j+1/2} + l_{M_1D_1} (\theta_1^2 + \phi_1^2)^{-1/4} \right]; \\ v_3 &= U_{i,j+1}^{t+\tau} (U_{i,j+1}^t)^{2/3} \left[ 0,5V_{1,i,j+1/2} + l_{C_2M_2} (\theta_2^2 + \phi_2^2)^{-1/4} \right]; \\ v_4 &= U_{i,j+1}^{t+\tau} (U_{i,j+1}^t)^{2/3} \left[ 0,5V_{1,i+1/2,j+1} + l_{M_2D_2} (\theta_2^2 + \phi_2^2)^{-1/4} \right]. \end{aligned}$$

Таким образом, вместо соотношений (16) будем иметь

$$\begin{aligned} \widetilde{V}_{i+1/2,j} &= \begin{cases} v_1, & (x_{i+1/2}, y_j) \in D_h; \\ 0, & (x_{i+1/2}, y_j) \in \Gamma_h; \end{cases} & \widetilde{V}_{i+1,j+1/2} &= \begin{cases} v_2, & (x_{i+1}, y_{j+1/2}) \in D_h; \\ 0, & (x_{i+1}, y_{j+1/2}) \in \Gamma_h; \end{cases} \\ \widetilde{V}_{i,j+1/2} &= \begin{cases} v_3, & (x_i, y_{j+1/2}) \in D_h; \\ 0, & (x_i, y_{j+1/2}) \in \Gamma_h; \end{cases} & \widetilde{V}_{i+1/2,j+1} &= \begin{cases} v_4, & (x_{i+1/2}, y_{j+1}) \in D_h; \\ 0, & (x_{i+1/2}, y_{j+1}) \in \Gamma_h. \end{cases} \end{aligned}$$

Очевидно, что площади четырех преобразованных ячеек изменились, а именно  $S_{i,j} = S_{i+1,j+1} = \frac{9}{8} h_x h_y$ ;  $S_{i+1,j} = S_{i,j+1} = \frac{7}{8} h_x h_y$ . Заметим, что если в ячейке  $D_{i,j}$  все диагональные потоки равны нулю, то она не преобразовывается и ее площадь  $S_{i,j} = h_x h_y$ .

Подобным образом определяются и другие диагональные потоки  $\widetilde{W}_{i-1/2,j}$  и  $\widetilde{W}_{i,j\pm 1/2}$ .

Следует отметить, что, учитывая большую погрешность входных данных, можно использовать более простую аппроксимацию, приняв потоки через эти границы равными потокам через границы непреобразованных ячеек, т. е. вычислять их по формулам (16).

Как известно, при численном решении уравнений переноса для конвективных членов следует использовать аппроксимацию *против потока*, предписывающую брать значения искомой функции в ячейке, из которой вытекает рассматриваемый поток:

$$\begin{aligned}
 U_{i+1/2,j}^{t+\tau} \left( U_{i+1/2,j}^t \right)^{2/3} &= \begin{cases} U_{i,j}^{t+\tau} \left( U_{i,j}^t \right)^{2/3}, & V_{1,i+1/2,j} \leq 0; \\ U_{i+1,j}^{t+\tau} \left( U_{i+1,j}^t \right)^{2/3}, & V_{1,i+1/2,j} > 0; \end{cases} \\
 U_{i-1/2,j}^{t+\tau} \left( U_{i-1/2,j}^t \right)^{2/3} &= \begin{cases} U_{i-1,j}^{t+\tau} \left( U_{i-1,j}^t \right)^{2/3}, & V_{1,i-1/2,j} \geq 0; \\ U_{i,j}^{t+\tau} \left( U_{i,j}^t \right)^{2/3}, & V_{1,i-1/2,j} < 0; \end{cases} \\
 U_{i,j+1/2}^{t+\tau} \left( U_{i,j+1/2}^t \right)^{2/3} &= \begin{cases} U_{i,j}^{t+\tau} \left( U_{i,j}^t \right)^{2/3}, & V_{1,i,j+1/2} \leq 0; \\ U_{i,j+1}^{t+\tau} \left( U_{i,j+1}^t \right)^{2/3}, & V_{1,i,j+1/2} > 0; \end{cases} \\
 U_{i,j-1/2}^{t+\tau} \left( U_{i,j-1/2}^t \right)^{2/3} &= \begin{cases} U_{i,j-1}^{t+\tau} \left( U_{i,j-1}^t \right)^{2/3}, & V_{1,i,j-1/2} < 0; \\ U_{i,j}^{t+\tau} \left( U_{i,j}^t \right)^{2/3}, & V_{1,i,j-1/2} \geq 0. \end{cases}
 \end{aligned} \tag{19}$$

Запишем в области  $D_h$  консервативные разностные уравнения, аппроксимирующие уравнения (1), (2):

$$\begin{aligned}
 \tau \Lambda \left[ \widetilde{V} + \widetilde{W} \right]_{i,j} &= S_{i,j} \left( U_{i,j}^{t+\tau} - U_{i,j} + \Theta_{i,j}^{t+\tau} - \Theta_{i,j} - \tau \varepsilon_{1,i,j} \right), \quad \varepsilon_{1,i,j} = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} \varepsilon_1 d\tau; \\
 \Lambda \left[ \widetilde{V} + \widetilde{W} \right]_{i,j} &= \left( \widetilde{V} + \widetilde{W} \right)_{i+1/2,j} + \left( \widetilde{V} + \widetilde{W} \right)_{i,j+1/2} + \left( \widetilde{V} + \widetilde{W} \right)_{i,j-1/2}.
 \end{aligned} \tag{20}$$

Как было показано выше, в начальный момент времени поверхностный слой воды не образуется, так как осадки полностью впитываются в ЗНН. Поэтому необходимо определить время запаздывания возникновения поверхностного стока воды. Для этого в каждой ячейке нужно решить уравнения (9), (10). Следует заметить, что интенсивность  $\varepsilon_1$  осадков и испарения воды, как правило, известна как средняя по площади и времени приближенная величина. Следовательно, время запаздывания  $t_0$  и запаздывающий аргумент  $\tau_3$  могут быть определены из равенств (11).

Если параметры  $a$ ,  $b$  и  $\varepsilon_1$ , которые входят в соотношения (11), зависят от координат  $x$ ,  $y$ , то значения  $t_0$  и  $\tau_3$  будут зависеть от сеточного узла  $(x_i, y_j)$ . В этом случае определяется минимальное значение  $t_0$ , которое принимается за начальный момент расчетов. Для ячеек, у которых время запаздывания больше  $t_0 + \tau$ , нужно сделать пересчет этого времени с учетом возможного притока из соседних ячеек. Действительно, при использовании явной схемы на первом временном слое при нулевых начальных условиях потоки через границы сеточных ячеек отсутствуют и приток воды происходит только за счет осадков  $\varepsilon_1$ . Но уже на следующем временном слое эти потоки возникают из ячеек, в которых  $t_0 < \bar{t}_0 + \tau$ .

Пусть, например, в элементарной ячейке  $D_{i,j}$   $t_0 > \bar{t}_0 + \tau$  и в нее поступает вода из ячеек  $D_{i-1,j}$  и  $D_{i,j-1}$ . Тогда при  $t > \bar{t}_0 + \tau$  количество воды  $A(t)$ , поступившей в ячейку за время  $t$ , определяется

из равенства

$$A(t) = (t - \bar{t}_0 - \tau)B + \int_0^t \varepsilon_1 d\tau, \quad B = -\frac{\tilde{V}_{i+1/2,j} + \tilde{V}_{i,j-1/2}}{h_x h_y}, \quad (21)$$

а расход воды  $S$  в ненасыщенную зону — суммой  $S = \varepsilon_1 + B$ . Таким образом, новые значения  $t_0$  и  $\tau_3$  определяются из той же системы уравнений (7), (8), но с другими правыми частями.

Выпишем решение системы для случая, когда  $\varepsilon_1$  не зависит от времени:

$$t_0 = \frac{b}{2aS} \left( 1 - \frac{S}{\sqrt{S^2 + 2aS}} \right) + \frac{B}{S} (\bar{t}_0 + \tau); \quad \tau_3 = \frac{b}{2a^2} \left( 1 + \frac{a}{S} - \sqrt{1 + \frac{2a}{S}} \right) + \frac{B}{S} (\bar{t}_0 + \tau). \quad (22)$$

Если для вычисленного значения  $t_0$  оказывается, что  $t_0 < \bar{t}_0 + 2\tau$ , то для этой ячейки время запаздывания и запаздывающий аргумент становятся определенными и толщина слоя воды  $U_{i,j}^{t+\tau}$  определяется из сеточного уравнения (20) при шаге по времени, равном  $\bar{t}_0 + 2\tau - t_0$ . Если же  $t_0 > \bar{t}_0 + 2\tau$ , то процедура определения времени запаздывания и запаздывающего аргумента повторяется аналогичным образом на следующем шаге. Подобным образом решается задача и в том случае, когда образуются области, в которых временно исчезает водяной слой на поверхности земли, т. е. вся поступающая вода впитывается.

Обозначим через  $w^+$  сумму всех втекающих в ячейку потоков, а через  $\Theta_{i,j}^{t+\tau}$  — количество воды в ЗНН, вычисленное по формуле (12). Тогда условие

$$w^+ + \frac{h_x h_y}{\tau} \left( U_{i,j} - \Theta_{i,j}^{t+\tau} + \Theta_{i,j} + \tau \varepsilon_{1,i,j} \right) < 0 \quad (23)$$

означает, что вся поступающая вода впитывается и  $U_{i,j}^{t+\tau} = 0$ . Следовательно,  $\Theta_{i,j}^{t+\tau}$  должно вычисляться не по формуле (12), а из соотношения

$$\Theta_{i,j}^{t+\tau} = U_{i,j} + \Theta_{i,j} + \tau \varepsilon_{1,i,j} + \frac{w^+ \tau}{h_x h_y}. \quad (24)$$

Разностная схема (16)—(24) является линеаризованной неявной схемой, представляющей собой систему линейных алгебраических уравнений. Для приведения этой системы к диагональному виду пронумеруем сеточные ячейки по убыванию высоты  $H$ . Это позволит решать уравнения последовательно, начиная с первого номера, соответствующего максимальной высоте рельефа поверхности.

Общая схема алгоритма заключается в следующем. Пусть на временном слое  $t$  на сетке  $D_h$  вычислены значения  $U_{i,j}^t$  и  $\Theta_{i,j}^t$ . По этим значениям из соотношений (17), (18) определяются потоки  $V_{i\pm 1/2,j}$ ,  $V_{i,j\pm 1/2}$  и  $\omega_{i\pm 1/2,j}$ ,  $\omega_{i,j\pm 1/2}$  на границах сеточных ячеек, в том числе потоки воды через створ реки Гр. Затем, начиная с первой ячейки, вычисляется количество  $\Theta_{i,j}^{t+\tau}$  воды в ЗНН, толщина  $U_{i,j}^{t+\tau}$  водного слоя на поверхности водосбора и потоки, вытекающие из ячейки. Если  $U_{i,j}^{t+\tau} = 0$ , то дополнительно рассчитывается время запаздывания  $t_0$  и запаздывающий аргумент  $\tau_3$ . Для определения количества воды, вытекшей из створа реки, производится суммирование по времени соответствующих значений потоков в полуузлах, лежащих на створе. Расчеты на временном слое  $t + \tau$  заканчиваются вычислением балансовых соотношений, подготовкой к переходу на следующий временной слой и проверкой признака окончания расчетов.

Разработанные алгоритмы реализованы в программе, предназначенной для расчетов склонового стока наряду с одновременной визуализацией их результатов.

## Верификация модели на данных по бассейну реки Меша Республики Татарстан

Для решения задачи задается граница расчетной области  $D$ , проходящая по водоразделу выбранного участка бассейна реки, и информация о рельефе склоновой поверхности с учетом глубины речной сети. Подготовка входных данных выполняется с использованием стандартных инструментальных геоинформационных систем, например, с помощью коммерческой программы ArcGIS или



свободно распространяемых программных систем QGIS, GRASS, SAGA-GIS, TAS, WhiteBox с аналогичными функциональными возможностями.

В рассматриваемом примере в качестве исходной цифровой модели рельефа использовалась модель рельефа Земли, полученная как результат миссии Space Shuttle—SRTM (<http://www2.jpl.nasa.gov/srtm/>). С целью устранения артефактов модели (фиктивных бессточных областей) осуществлялась соответствующая коррекция рельефа. При построении модели гидросети использовались координаты  $x, y$  (в км) русла реки Меша и ее притоков с указанием их глубины (в мм). На рис. 2 (см. также цветную вкладку) приведен рельеф поверхности участка бассейна реки Меша с выделением границы водосбора и речной сети (расчетная область  $D$ ).

Обозначим индексами "с" и "р" фильтрационные параметры задачи для склоновой поверхности и речной сети соответственно. В базовом варианте расчетов при  $h_x = h_y = 400$  м сетка  $D_h$  содержит 21 252 узла; значения коэффициентов шероховатости Маннинга, среднего радиуса пор ЗНН, поверхностного натяжения, краевого угла смачивания составляют  $n_c = 1,7 \text{ с/м}^{1/3}$ ;  $n_p = 0,03 \text{ с/м}^{1/3}$ ;  $r_c = r_p = 50$  мкм;  $\sigma_c = \sigma_p = 0,02 \text{ Н/м}$ ;  $\alpha_c = \alpha_p = 30^\circ$ ; продолжительность  $t_d$  осадков и их интенсивность  $\varepsilon_1$  равны соответственно 5 сут и 10 мм/сут; продолжительность расчетов  $t_k = 10$  сут.

Значения временного шага  $\tau$  задавались таким образом, чтобы обеспечить сходимость и устойчивость разностного решения задачи. Так, в базовом варианте отличие результатов расчетов при  $\tau = 0,1$  ч и  $\tau = 0,01$  ч составляет менее 0,1 %.

Специальная серия вычислительных экспериментов была выполнена при  $h_x = h_y = 100$  м. В этом случае сетка  $D_h$  содержит около 340 000 узлов. Как показал анализ результатов расчетов, на более плотной сетке количество жидкости, впитавшейся в ЗНН, уровень стока на склоновой поверхности и количество воды, попавшей в речную сеть, по сравнению с базовым вариантом изменяются незначительно, в то время как в речной сети уровень воды становится значительно выше. Это связано с тем, что в рассматриваемой модели русло реки представляет собой последовательную однорядную

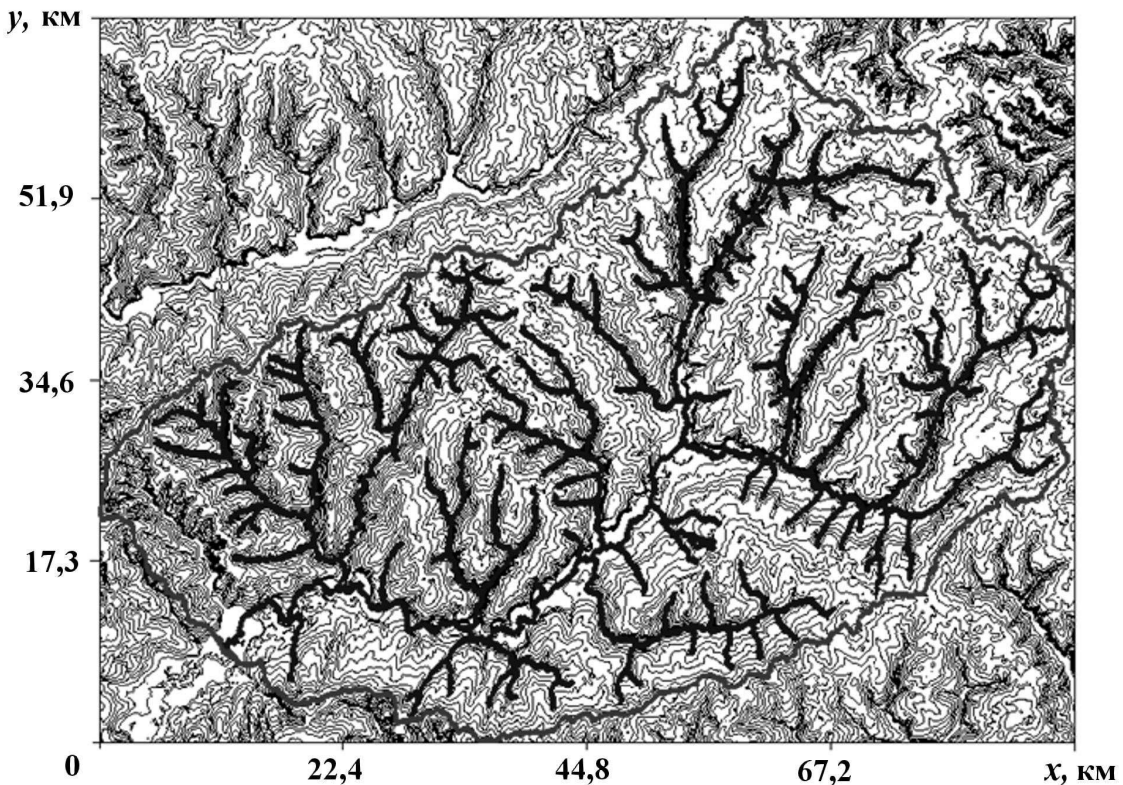


Рис. 2. Рельеф поверхности участка бассейна реки Меша с выделением границы водосбора и речной сети

цепочку ячеек. Поэтому уменьшение площади ячеек сетки приводит к росту толщины стокового водного слоя в русловой сети. При этом количество воды, проходящей через створ реки при расчетах на сетке  $100 \times 100$  м, отличается менее чем на 1,2% от базового варианта. Этот интегральный показатель поверхностного стока является наиболее важным при оценке последствий, обусловленных паводком в речной сети. Неизменность характеристик водяного стока на склоновой поверхности и его интегральных показателей позволяет оценить влияние различных параметров на более грубой сетке  $400 \times 400$  м.

В первом (базовом) варианте дождевые осадки успевают полностью впитываться в почву до момента  $t_0 = 3,5$  сут. Формирование поверхностного водного слоя начинается лишь при  $t > t_0$ . Изменение толщины  $U(x, y)$  водного слоя (в мм) внутри расчетной области на моменты прекращения выпадения дождевых осадков и завершения расчетов показано на рис. 3, а, б (см. также цветную вкладку). Визуализация двумерных полей выполнена в виде тонированных карт, цветовая палитра которых и соответствующие ей диапазоны величин  $U(x, y)$  показаны в верхних частях рисунков. Хорошо видно, что при  $t = t_d$  водный слой покрывает всю расчетную область. При этом наибольший подъем уровня воды наблюдается вдоль русла Меши и ее притоков. После прекращения осадков происходит постепенное уменьшение значений  $U$  на склоновой поверхности наряду с продолжающимся ростом (см. рис. 3, б) уровня воды как в руслах рек, так и во временных стоках и оврагах. Один из таких временных стоков образуется вдоль левой границы расчетной области (см. рис. 2 и рис. 3, а).

Динамика изменения толщины  $U_c$  слоя воды в створе реки (точнее, средней толщины слоя воды в ячейке, содержащей створ) в зависимости от времени представлена на рис. 4 (кривая 1). Видно, что на начальном этапе происходит плавный рост  $U_c$  за счет поступления воды со склоновой поверхности в окрестности створа реки. Затем начинается резкий рост  $U_c$  с последующей стабилизацией за счет добегающей воды с более удаленных участков речной сети. При  $t > 7$  сут интенсивность подъема уровня воды в створе реки значительно усиливается из-за подхода воды от места слияния (координаты  $x \approx 53$  км,  $y \approx 28,5$  км) реки Меши и ее крупного притока (см. рис. 3, б). Максимальный подъем уровня воды  $U_{c,max} = 855$  мм достигается при  $t_* = 7,6$  сут, т. е. через 2,6 суток после прекращения осадков. В дальнейшем начинается постепенное уменьшение толщины водного слоя по всей поверхности области  $D$ .

Были проведены восемь вариантов расчетов для оценки влияния различных параметров модели на процесс поверхностного стока. В таблице приведены наборы значений тех параметров, которые в вариантах 2–8 отличаются от данных варианта 1.

Как показал анализ результатов расчетов, качественная картина поверхностного стока во всех вариантах не меняется, так что соответствующие распределения  $U(x, y)$  в области  $D$  аналогичны представленным на рис. 3. Поэтому в дальнейшем количественные отличия даются в сравнении с вариантом 1 и демонстрируются с помощью временной зависимости  $U_c(t)$  в створе реки, показанной на рис. 4. Номера кривых на этом рисунке соответствуют номерам вариантов расчета.

Уменьшение поверхностного натяжения  $\sigma_p$  в речной сети в два раза (вариант 2) по сравнению с вариантом 1 приводит к снижению количества воды, впитываемой в почву внутри ячеек, содержащих русло реки. Как следствие, значение  $t_0$  уменьшается до 1,75 сут,  $U_{c,max}$  возрастает до 950 мм и достигается на 0,5 суток раньше ( $t_* = 7,1$  сут). Толщина водного слоя в речной сети значительно

### Значения отличающихся параметров для разных вариантов расчета

Параметр	Вариант расчета							
	1	2	3	4	5	6	7	8
$\sigma_p$ , Н/м	<b>0,02</b>	0,01	0,01	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02
$r_p$ , мкм	<b>50</b>	50	25	50	50	50	50	50
$n_c$ , с/м <sup>1/3</sup>	<b>1,7</b>	1,7	1,7	0,85	1,7	1,7	0,85	1,7
$t_d$ , сут	<b>5</b>	5	5	5	2,5	5	5	2,5
$\varepsilon_1$ , мм/сут	<b>10</b>	10	10	10	20	15	15	30

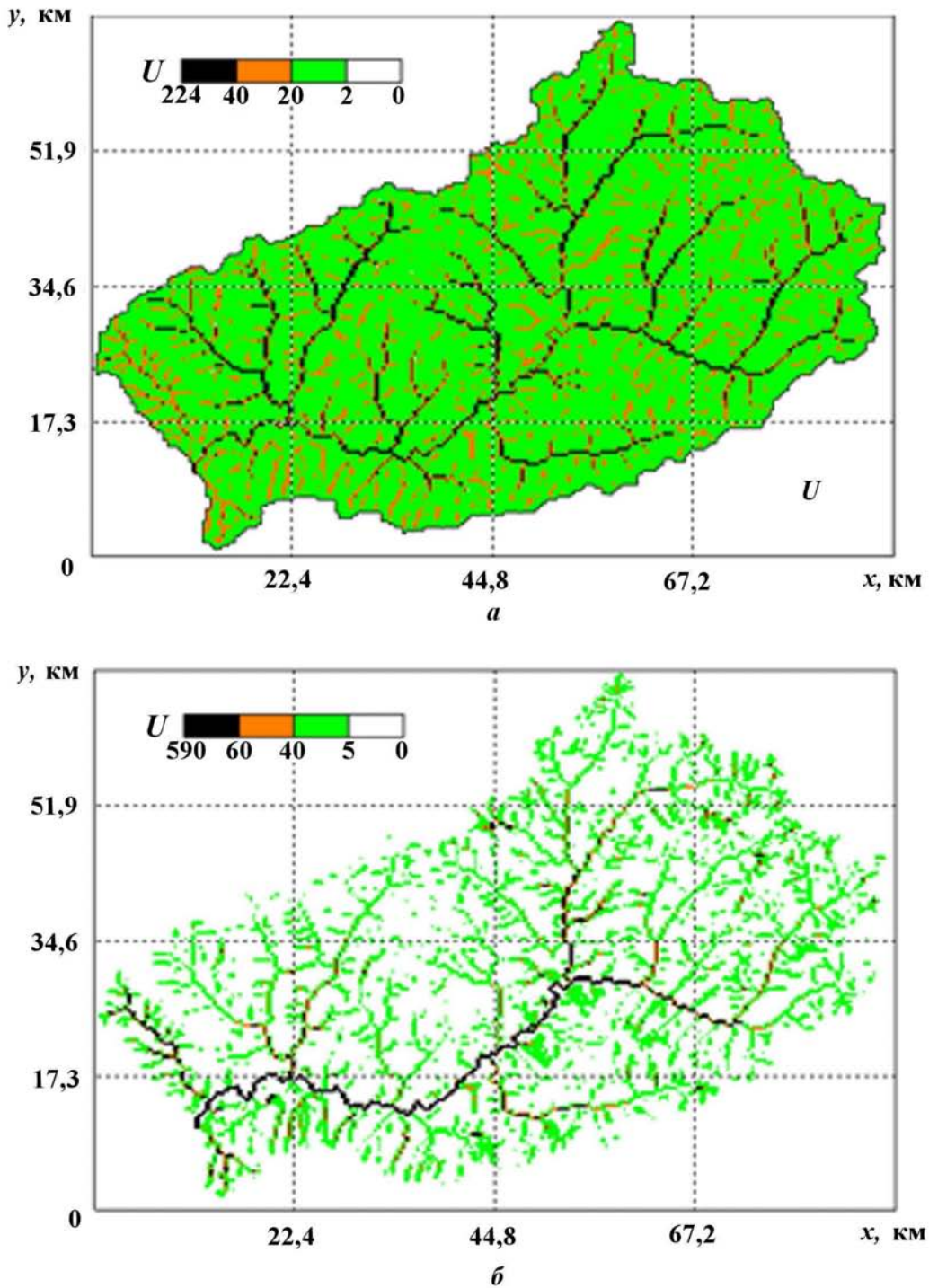


Рис. 3. Уровень  $U(x, y, t)$  водного слоя в расчетной области  $D_h$ : а —  $t = 5$  сут; б —  $t = 10$  сут

увеличивается, что приводит к более гладкому характеру зависимости  $U_c(t)$  в створе реки (кривая 2 на рис. 4).

Как известно, с уменьшением среднего радиуса пор увеличивается объем воды, поглощаемой ЗНН. Вариант 3 служит для оценки влияния параметров  $\sigma_p$  и  $r_p$  на интенсивность потока в русловой сети.

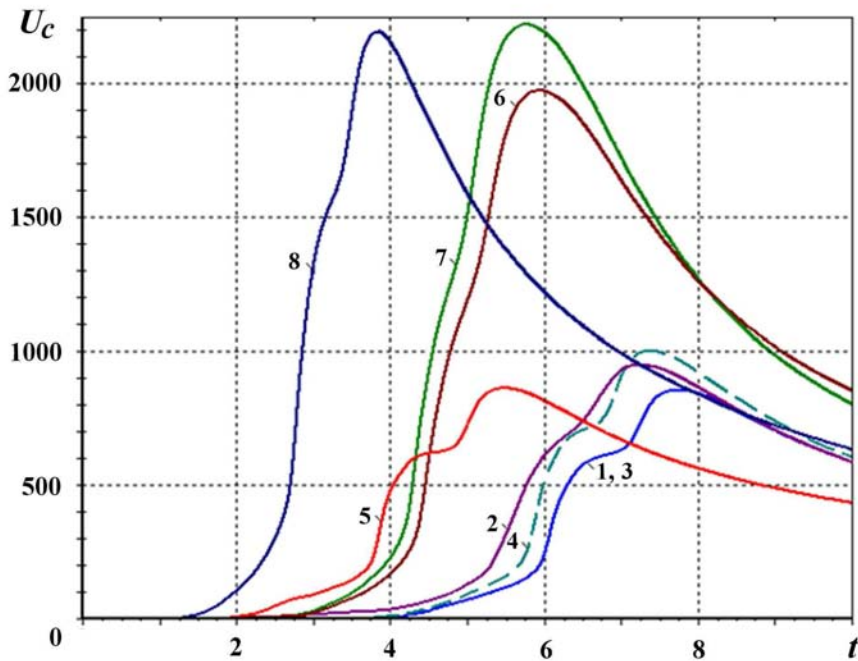


Рис. 4. Зависимость толщины  $U_c$  слоя воды в створе реки Меша от времени  $t$

Как показал анализ результатов расчетов, одновременное пропорциональное уменьшение этих параметров не меняет решения задачи ни качественно, ни количественно, что приводит к совпадению кривых 1 и 3 на рис. 4.

Коэффициент шероховатости Маннинга оказывает существенное влияние на скорость стекания воды по склоновой поверхности и на толщину водного слоя. Уменьшение значения  $n_c$  склоновой поверхности в два раза в варианте 4, как и следовало ожидать, не изменяет значения  $t_0$ , но приводит к более интенсивному поднятию уровня воды. При этом  $U_{c,max}$  возрастает на 17% и достигается при  $t_* = 7,2$  сут. Однако к моменту окончания расчетов значения  $U_c$  в вариантах 1–4 близки между собой.

Для оценки влияния интенсивности  $\varepsilon_1$  осадков при сохранении их общего количества служит вариант 5, в котором значение  $\varepsilon_1$  увеличено, а время  $t_d$  уменьшено в два раза. Такое изменение параметров приводит к двукратному сокращению времени  $t_0$ , которое становится равным 1,75 сут. При этом, как и в базовом варианте,  $U_{c,max} = 860$  мм и достигается через те же 2,6 суток после прекращения дождей. Это объясняется тем, что время добегания воды с более удаленных участков речной сети не зависит от интенсивности осадков. Интересно отметить, что через 5 суток после прекращения осадков толщина слоя воды на створе  $U_c \approx 600$  мм и практически одинакова во всех рассмотренных выше вариантах.

В варианте 6 рассматривается ситуация, когда интенсивность осадков  $\varepsilon_1$  в 1,5 раза больше, чем в базовом варианте. Это приводит к тому, что общее количество выпавших осадков увеличивается в полтора раза, а формирование водного слоя начинается при  $t_0 = 2,4$  сут. Интенсивность поднятия уровня воды высока по всей речной сети. На створе максимальное значение  $U_{c,max} = 1960$  мм в 2,3 раза больше, чем в базовом варианте, и достигается менее чем через сутки после прекращения осадков. Как видно из рис. 4, увеличение общего количества осадков приводит к более сглаженному характеру зависимости  $U_c$  от времени. На момент окончания расчетов уровень стоковой воды в створе реки примерно в 1,4 раза выше, чем в базовом варианте.

В варианте 7 по сравнению с предыдущим вариантом уменьшен в два раза коэффициент шероховатости  $n_c$  склоновой поверхности. Из сравнения кривых 6 и 7 (см. рис. 4) нетрудно видеть, что характер зависимости  $U_c$  от времени не меняется. Прирост значения  $U_{c,max}$  составляет около 10%,

что на 7% меньше, чем для аналогичной пары вариантов 1 и 4. Таким образом, влияние шероховатости  $n_c$  склоновой поверхности на изменение  $U_{c,\max}$  снижается по мере роста общего количества выпавших на нее осадков.

В последнем варианте 8 общее количество осадков равно 75 мм и остается таким же, как в варианте 6, а их продолжительность  $t_d$  уменьшена в два раза. В этом случае водный слой появляется на склоновой поверхности при  $t_0 = 1,2$  сут и очень быстро увеличивается по всей речной сети. На створе максимальное значение  $U_{c,\max} = 2190$  мм, а характер зависимости  $U_c(t)$  остается таким же, как в варианте 6. Однако в отличие от аналогичной пары вариантов 1 и 5, для которой не наблюдалось прироста значения  $U_{c,\max}$ , в варианте 8 оно увеличилось примерно на 10% по сравнению с вариантом 6. Полученные результаты позволяют сделать вывод о том, что влияние изменения интенсивности осадков  $\varepsilon_1$  на максимальный уровень  $U_{c,\max}$  склоновой воды в створе реки увеличивается с ростом общего количества выпавших осадков.

### Выводы

В рамках модели двумерной кинематической волны дано математическое описание нестационарного изменения толщины водного слоя на склоновой поверхности бассейна реки с учетом дождевых осадков и впитывания воды в ЗНН почвы. Построены численная и алгоритмическая модели, реализованные в соответствующем программном комплексе, позволяющем проводить многовариантные вычислительные эксперименты.

Работа выполнена в рамках Государственного контракта (№ Н.4j.45.40.10.1134) с Казанским филиалом Учреждения Российской академии наук Межведомственного суперкомпьютерного центра РАН и включена в пакет программ НИМФА.

### Список литературы

1. Антонцев С. Н., Епихов Г. П., Кашеваров А. А. Системное математическое моделирование процессов водообмена. Н.: Наука, 1986.
2. Орлов В. Г., Сукан А. В. Основы инженерной гидрологии. Ростов н/Д: Феникс — С.-Пб.: Северо-Запад, 2009.
3. Ambrose B., Freer J., Beven K. J. Generalization of the topmodel concepts: topographic indices of hydrological similarity // Water Resources Research. 1996. Vol. 32. P. 2135—2145.
4. Anderton S. P., White S. M., Alvera B. Micro-scale spatial variability and the timing of snow melt runoff in a high mountain catchment // J. Hydrology. 2002. Vol. 268. P. 158—176.
5. Beven K. J. Infiltration into a class of vertically non-uniform soils // Hydrological Sciences Journal. 1984. Vol. 29. P. 425—434.
6. Beven K. J., Kirkby M. J. A physically-based variable contributing area model for basin hydrology // Hydrological Sciences Bulletin. 1979. Vol. 24, No. 1. P. 43—69.
7. Dunne T., Moore T. R., Taylor C. H. Recognition and prediction of runoff-producing zones in humid regions // Ibid. 1975. Vol 20. P. 305—327.
8. Eagleson P. S. Dynamic Hydrology. N.-Y.: McGraw-Hill, 1970.
9. Hewlett J. D., Hibbert A. R. Factors affecting the response of small watersheds to precipitation in humid areas // Forest Hydrology / Ed. by W. E. Sopper and H. R. Lull. N.-Y.: Pergamon, 1967. P. 275—290.
10. Jost G., Weiler M., Gluns D.R., Alila Y. The influence of forest and topography on snow accumulation and melt at the watershed-scale // J. Hydrology. 2007. Vol. 347. P. 101—115.
11. Luce C. H., Tarboton D. G., Cooley K. R. The influence of the spatial distribution of snow on basin-averaged snowmelt // Hydrological Processes. 1998. Vol. 12. P. 1671—1683.

12. *Pomeroy J. W., Gray D. M., Shook K. R. et al.* An evaluation of snow accumulation and ablation processes for land surface modelling // *Ibid.* P. 2339—2367.
13. *Pomeroy J. W., Dion K.* Winter radiation extinction and reflection in a boreal pine canopy: measurements and modelling // *Hydrological Processes.* 1996. Vol. 10 (12). P. 1591—1608.
14. *Pomeroy J. W., Granger R. J., Pietroniro A. et al.* Hydrological Pathways in the Prince Albert Model Forest. National Human Research Institute Contribution Series CS-97004. Saskatoon: Saskatchewan, 1997.
15. *Pomeroy J. W., Gray D. M., Hedstrom N. R., Janowicz J. R.* Prediction of seasonal snow accumulation in cold climate forests // *Hydrological Processes.* 2002. Vol. 16 (18). P. 3543—3558.
16. *Talbot C. A., Ogden F. L., Or D.* Comment on Layer averaged Richards equation with lateral flow by Praveen Kumar // *Advances in Water Resources.* 2004. Vol. 27. P. 1041—1042.
17. *Winkler R. D., Spittlehouse D. L., Golding D. L.* Measured differences in snow accumulation and melt among clearcut, juvenile, and mature forests in southern British Columbia // *Hydrological Processes.* 2005. Vol. 19 (1). P. 51—62.

Статья поступила в редакцию 14.12.12.

---