

УДК 519.6

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАЗВИТИЯ РЕГУЛЯРНЫХ ЛОКАЛЬНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ И ТУРБУЛЕНТНОГО ПЕРЕМЕШИВАНИЯ ЗА УДАРНОЙ ВОЛНОЙ РАЗЛИЧНОЙ ИНТЕНСИВНОСТИ

В. П. Стаценко, Ю. В. Янилкин, О. Г. Синькова, О. О. Топорова
(РФЯЦ-ВНИИЭФ, г. Саров)

С помощью методик ЭГМК и ТРЭК исследуется развитие турбулентного перемешивания и регулярного локального возмущения на границе раздела *воздух*– SF_6 при взаимодействии с распространяющейся в ударной трубе волной с числами Маха в SF_6 от 1,7 до 9,1. Рассмотрены случаи с локальным возмущением в виде треугольной канавки и полуцилиндра. Расчеты проводились с помощью прямого двумерного и трехмерного численного моделирования. Результаты расчетов сравниваются с известными экспериментальными данными.

Ключевые слова: прямое численное моделирование, локальное возмущение, зона турбулентного перемешивания, контактная граница, число Маха.

Введение

Развитие турбулентного перемешивания (ТП) вследствие неустойчивости Рихтмайера–Мешкова на границе раздела двух жидкостей или газов при прохождении через нее ударной волны (УВ) связано со случайными начальными возмущениями на этой границе. В работе [1] численно исследовалось ТП, возникающее на контактной границе (КГ) *воздух*– SF_6 при взаимодействии с распространяющейся в ударной трубе волной с большими числами Маха в воздухе ($M_v > 5$). Расчеты проводились как с помощью k - ε модели турбулентности, так и посредством прямого (без использования каких-либо моделей турбулентности) двумерного (2D) и трехмерного (3D) численного моделирования. Результаты расчетов сравнивались с известными данными опытов [2].

Однако на КГ возможны и регулярные начальные локальные возмущения (ЛВ) с достаточно большими амплитудами и длинами волн. Вопрос об их влиянии на развитие турбулентности, в частности, зоны турбулентного перемешивания (ЗТП), а также об обратном влиянии ЗТП на развитие такого ЛВ представляет определенный интерес, тем более, что ранее были проведены экспериментальные исследования [3].

В данной работе приводятся результаты численного исследования опытов [3] с помощью прямого 2D и 3D моделирования. В дополнение к экспериментальным данным анализируются параметры турбулентности, а также счетные (схемные) эффекты, возникающие при численном моделировании.

1. Постановка расчетов

Начальная геометрия задачи показана на рис. 1 (для 2D расчетов ниже вместо координаты Z используется координата X). Ее верхнюю часть занимает газовая взрывчатая смесь (ГВС, стехиометрическая ацетилен-кислородная смесь), давление P_0 в которой варьируется, что приводит к разным числам Маха УВ в воздухе и в SF_6 и разному полному энерговыделению при фиксированном значении удельного энерговыделения $Q = 72\,700$ (здесь и далее используется следующая система единиц измерения: масса — г; время — мс; длина — см). В некоторых опытах вместо ГВС использовался нагретый воздух. В таблице для каждого расчета указано, какое вещество взять в качестве драйвера. Ниже ГВС располагается воздух, и далее — SF_6 при атмосферном давлении. Температура в началь-

ный момент всюду одинакова, в каждом газе используется УРС идеального газа со своим значением γ (см. рис. 1). В таблице указаны также значения числа Маха УВ в SF_6 ($M_{УВ}$), они примерно равны его значениям в соответствующих опытах.

При расчетах считалось, что зажигание ГВС производится либо в точке $z^* = L_1 + L_2 + L_3$, $x = 2$, $y = 2$ (в двумерном случае $z^* \equiv x^*$), как в эксперименте, либо во всей плоскости z^* . Заметим, что результаты расчетов от способа инициирования практически не зависят. В соответствии с опытами $L_1 = 45$; $L_3 = 30$; $L_2 = 116,9 \div 126,1$ в разных расчетах.

Вблизи центра сечения трубы ($H/2 = 2$) задавались двумерные ЛВ границы *воздух*– SF_6 , показанные на рис. 2; в таблице указан вид возмущения в конкретных расчетах. Кроме того, в слое толщиной в две ячейки на всей КГ вносились случайные возмущения плотности: $\rho = \rho_0 \pm \delta\rho$ ($\delta\rho = 0,1\rho_0$), знак выбирался с помощью генератора случайных чисел. В некоторых расчетах генератор случайных чисел варьировался, но какой именно использовался в том или ином случае, ниже не отмечается, так как результаты расчетов слабо зависят от начального спектра возмущений.

Рассматриваемые течения — двумерные, поэтому основные расчеты проведены по 2D коду.

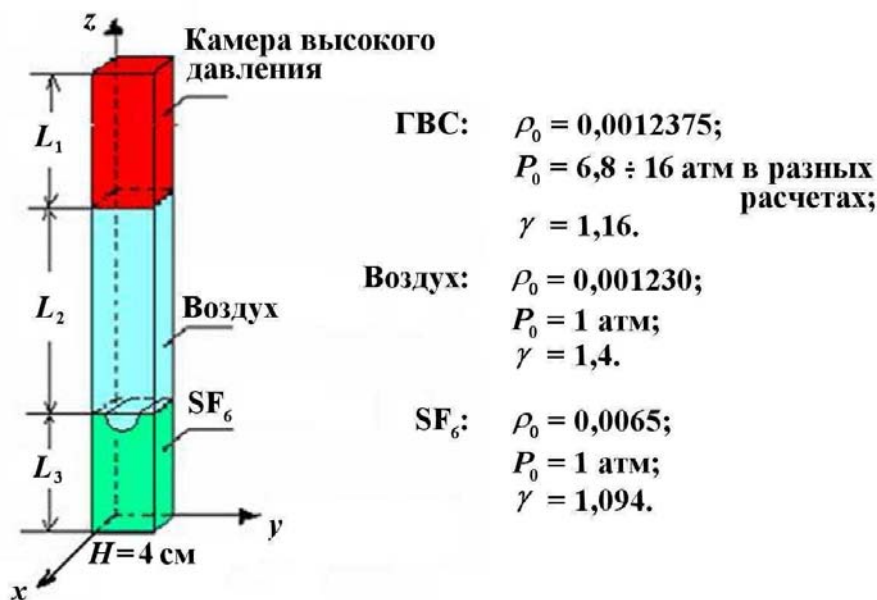


Рис. 1. Геометрия задачи и начальные газодинамические параметры газов

Параметры расчетов

Номер расчета	Размерность расчета	Счетная сетка	Вещество в камере высокого давления	$M_{УВ}$	Вид ЛВ
1	2D	100 × 1 050	ГВС	9,1	канавка
2	2D	100 × 1 050	ГВС	3,7	канавка
3	2D	100 × 1 050	воздух	1,7	канавка
4	3D	100 × 100 × 1 050	ГВС	3,7	канавка
5	3D	200 × 200 × 2 100	ГВС	3,7	канавка
6*	3D	100 × 100 × 1 050	ГВС	3,7	канавка
7	2D	100 × 1 050	ГВС	3,7	полуцилиндр
8	2D	100 × 1 050	ГВС	9,1	полуцилиндр
9	2D	100 × 1 050	воздух	1,7	полуцилиндр

* Расчет 6 отличается от расчета 4 другим спектром начальных случайных возмущений на КГ.

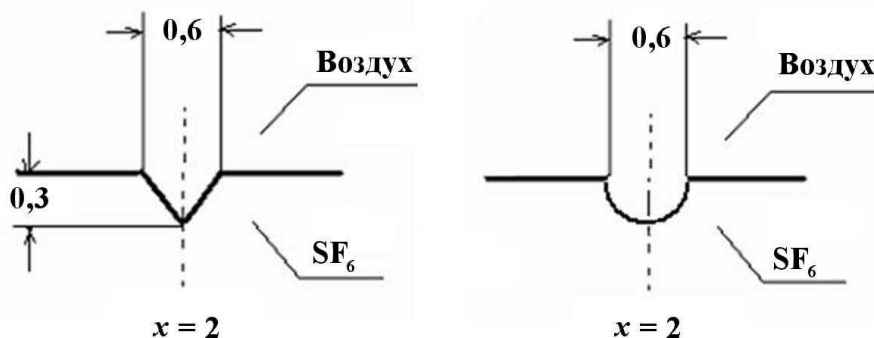


Рис. 2. Геометрия начального возмущения: слева — треугольная канавка, справа — полуцилиндр

Однако в силу того, что турбулентность всегда трехмерна, для некоторых задач дополнительно выполнены и 3D расчеты с целью уточнения полученных по 2D коду результатов.

Число ячеек счетной сетки — $N_x \times N_y \times N_z$ в трехмерном случае либо $N_x \times N_y$ в двумерном случае — также указано в таблице. Использовалась квазиравномерная счетная сетка с минимальными размерами счетных ячеек, равными $4/N_y$. В некоторых 2D расчетах для их удешевления использовалась дробная сетка, адаптивно встраивающаяся в окрестности границы *воздух*— SF_6 .

2. Результаты расчетов опытов с ЛВ треугольная канавка

$M_{ув} = 1,7$. На рис. 3 сверху показано развитие плоской части границы *воздух*— SF_6 и ЛВ в виде растровых картин концентрации воздуха, полученных в расчете 3. Характерным является расширение вершины ЛВ и, напротив, "схлопывание" концов основания после прохождения УВ через границу (см. рис. 3, а). Теоретическое объяснение этому дано в Приложении 1. Отметим, что дальнейшее развитие ЛВ после отмеченного схлопывания концов основания приводит к выбрасыванию в воздух его смеси с SF_6 (см. рис. 3, б). Похожая картина наблюдается и в соответствующем опыте (см. рис. 3, в).

Прохождение УВ по области SF_6 приводит к росту как ЛВ, так и (в небольшой степени) ЗТП.

В расчете фронт УВ, движущейся по области SF_6 , при рассматриваемом числе Маха отстоит далеко от передней границы ЗТП по сравнению

с ее шириной $L_T = z_2 - z_1$ ¹. Это подтверждается зависимостями от времени ширины ЗТП, а также расстояний от задней границы ЗТП до фронта УВ $L_{УВ} = z_2 - z_{УВ}$ и до передней границы ЛВ $L_{ЛВ} = z_2 - z_{ЛВ}$ (рис. 4). Как видно, ширина ЗТП L_T мала по сравнению с расстоянием $L_{ЛВ}$. В свою очередь, это расстояние мало по сравнению с $L_{УВ}$. Сравнение с экспериментальными временными зависимостями показывает, что при имеющемся в целом качественном согласии результатов расстояние от задней границы ЗТП до передней границы ЛВ в расчете приблизительно вдвое больше, чем в опыте.

$M_{ув} = 3,7$. На рис. 3 снизу показано развитие плоской части границы *воздух*— SF_6 и ЛВ в виде растровых картин концентрации воздуха, полученных в 2D расчете 2. Как и для $M_{ув} = 1,7$, характерным является расширение вершины ЛВ и схлопывание концов основания после прохождения УВ через границу (см. рис. 3, з). Отличие от малого $M_{ув}$ заключается в том, что возмущение при этом "расплющивается", так что горизонтальный размер становится заметно больше, а вертикальный — меньше. Дальнейшее развитие ЛВ после отмеченного схлопывания концов основания также приводит к выбрасыванию в воздух его смеси с SF_6 (см. рис. 3, д), но оно менее ярко выражено, чем для малого $M_{ув}$. Близкая картина наблюдается и в соответствующем опыте (см. рис. 3, е).

На рис. 5 показаны (R, t) -диаграммы передней границы ЛВ, передней и задней границ ЗТП и

¹Границы ЗТП (передняя z_1 и задняя z_2) определялись по уровню концентрации одного из веществ: $\beta_1 = \varepsilon \ll 1$, $\beta_2 = 1 - \varepsilon$, положение фронта УВ — по максимуму счетной вязкости.

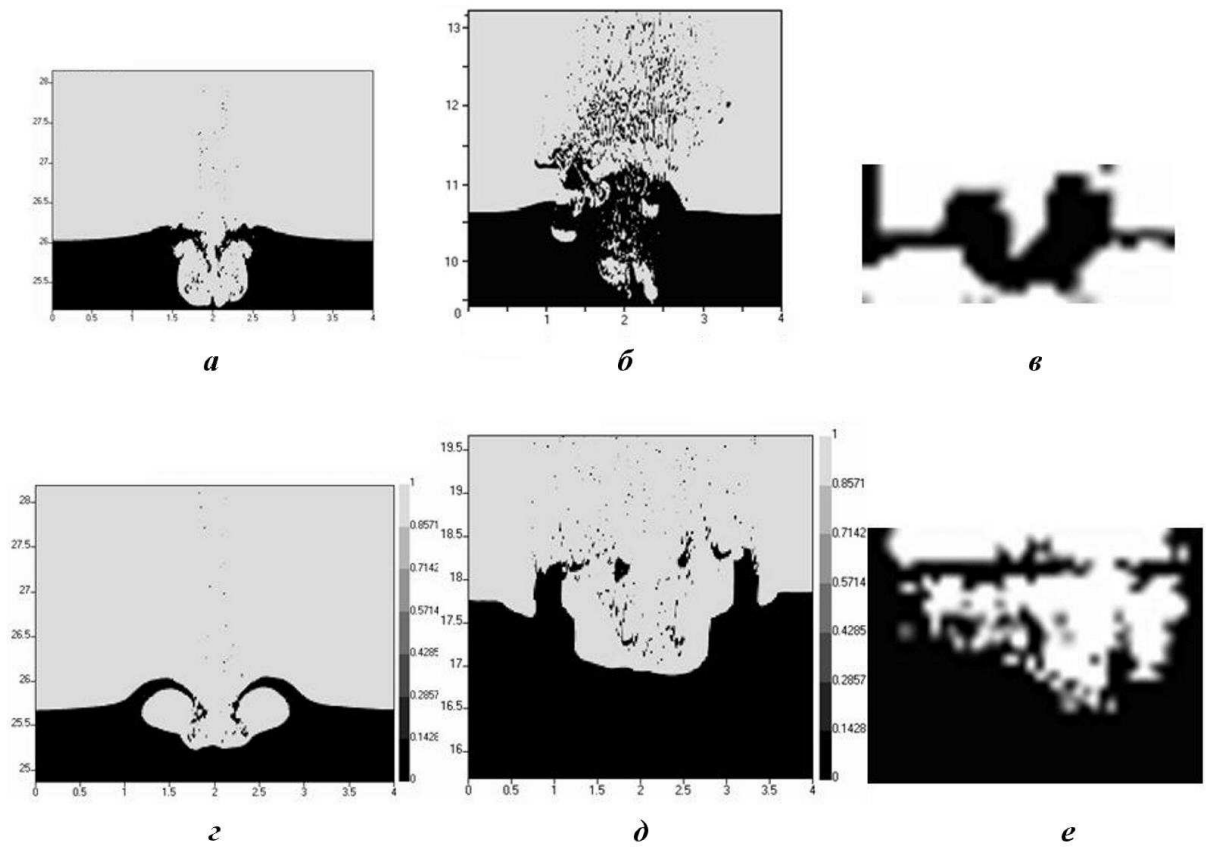


Рис. 3. Картины концентрации воздуха: сверху — $M_{УВ} = 1,7$: $a - t = 2,5$; $б - t = 4$; $в -$ опыт, $t = 2,58$; снизу — $M_{УВ} = 3,7$: $г - t = 1,5$; $д - t = 1,7$; $е -$ опыт, $t = 1,74$

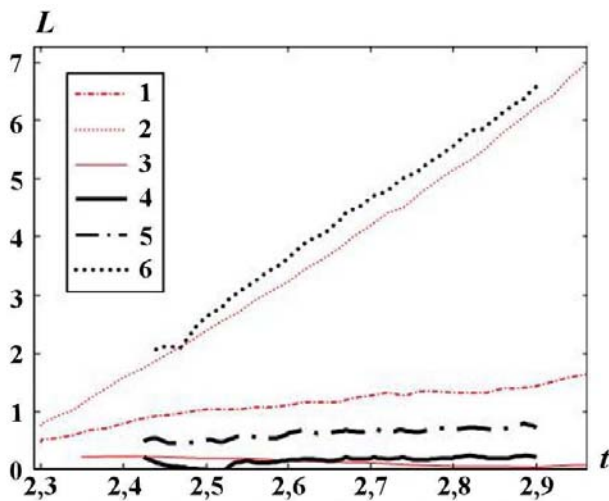


Рис. 4. Сравнение временных зависимостей, полученных в расчете 3 (1–3) и опыте (4–6): 3, 4 — ширина ЗТП; 2, 6 — расстояние от заданной границы ЗТП до фронта УВ; 1, 5 — расстояние от задней границы ЗТП до передней границы ЛВ

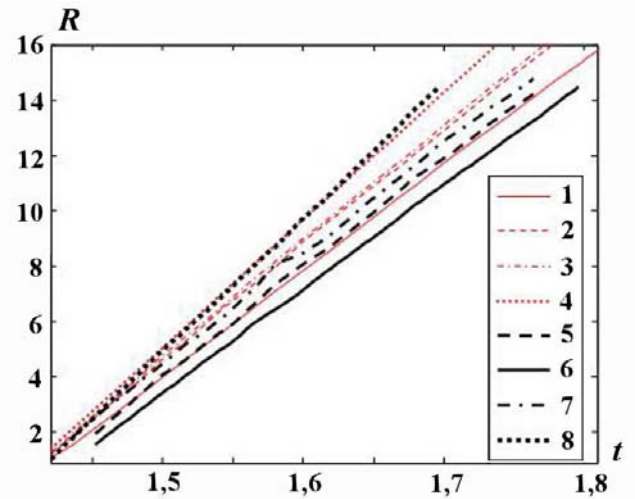


Рис. 5. Сравнение (R, t) -диаграмм, полученных в расчете 2 (1–4) и опыте (5–8): 3, 7 — передняя граница ЛВ; 2, 5 — передняя граница ЗТП; 1, 6 — задняя граница ЗТП; 4, 8 — фронт УВ

фронта УВ, полученные в расчете 2. Очевидно, границы ЗТП и ЛВ заметно ближе к фронту УВ, нежели для предыдущего случая с меньшим числом $M_{УВ}$.

Отметим, что при данном числе $M_{УВ}$ расчет без ЛВ (см. расчет из [1] на рис. 6) приводит к заметно меньшей ширине ЗТП. При меньшем числе $M_{УВ}$ такой эффект также намечается, но ширина ЗТП слишком мала, чтобы утверждать это с уверенностью.

Сравнение с опытом показывает (см. рис. 5), что при имеющемся в целом согласии результатов (особенно для фронта УВ) положения ЗТП и передней границы ЛВ, полученные в расчете, "опережают" опытные данные. В опыте, как и в расчете, фронт УВ, движущийся по области SF_6 , при данном числе Маха ближе к передней границе ЗТП по сравнению со случаем $M_{УВ} = 1,7$. Это подтверждается зависимостями от времени ширины ЗТП L_T , а также расстояний от задней границы ЗТП до фронта УВ $L_{УВ}$ и до передней границы ЛВ $L_{ПЛВ}$ (см. рис. 6). Как видно, L_T сопоставимо с $L_{ПЛВ}$. В свою очередь, $L_{ПЛВ}$ сопоставимо с расстоянием $L_{УВ}$ от задней границы ЗТП до фронта УВ.

Для данной задачи проведены также 3D расчеты 4–6 (см. таблицу). Полученное в этих расчетах характерное развитие плоской части границы *воздух*– SF_6 и ЛВ представлено на рис. 7 в

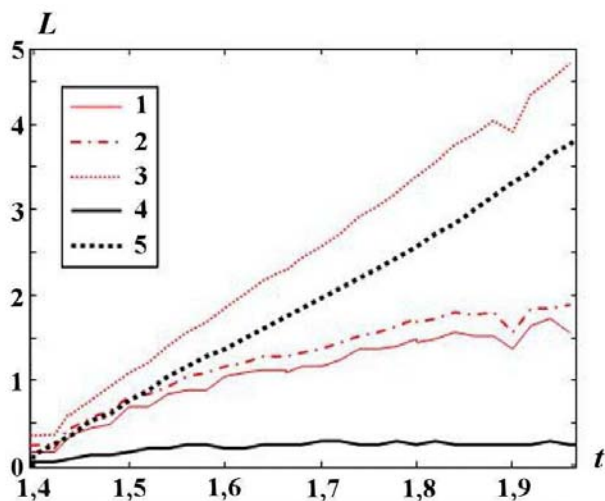


Рис. 6. Временные зависимости, полученные в расчете 2 (1–3) и расчете из [1] (4, 5): 1, 4 — ширина ЗТП; 3, 5 — расстояние от задней границы ЗТП до фронта УВ; 2 — расстояние от задней границы ЗТП до передней границы ЛВ

виде растровых картин концентрации воздуха в сечении $x = 2$. Сравнение результатов 3D расчетов на подробной (расчет 5) и грубой (расчет 6) счетных сетках показывает схожесть развития ЛВ, но на подробной сетке турбулентность более развита. Сравнение с 2D расчетами показывает, что в целом картины течения похожи друг на друга, трехмерность в основном сказывается лишь на большей турбуликации течения. Отметим также наличие "зеброобразной" картины развития возмущения в 3D расчетах, что объясняется схемными эффектами (см. Приложение 2, где дано объяснение этого факта).

Прохождение УВ по области SF_6 приводит к росту как ЛВ, так и ЗТП.

Из рис. 8 видно, что временные зависимости расстояния от задней границы ЛВ до фронта УВ² в расчетах 5 и 6 близки. Амплитуды ЛВ вначале также близки, но на более поздней стадии на подробной сетке (расчет 5) они несколько больше, чем на грубой (расчет 6). Причина этого заключается в том, что, как видно из рис. 7, на более подробной сетке развивается турбулентность, размывающая переднюю и в небольшой степени заднюю границы, в то время как на грубой сетке турбулентность подавляется схемной вязкостью.

В 3D расчете 4, как и в 2D расчете, фронт УВ, движущийся по области SF_6 , при данном числе Маха ближе к передней границе ЗТП по сравнению со случаем $M_{УВ} = 1,7$. Результаты 3D и 2D расчетов близки между собой. Это подтверждает рис. 9, где приведены зависимости от времени ширины ЗТП (L_T), а также расстояний от задней границы ЗТП до фронта УВ ($L_{УВ}$) и до передней границы ЛВ ($L_{ПЛВ}$)³. Как видно, L_T близко к $L_{ПЛВ}$. В свою очередь, на исследуемой стадии $L_{ПЛВ}$ сопоставимо с расстоянием $L_{УВ}$ от задней границы ЗТП до фронта УВ.

Сравнение указанных величин в расчете на подробной и грубой сетках показано на рис. 10. При некоторых количественных отличиях в целом согласие удовлетворительное. То же относится к сравнению временных зависимостей ЗТП, но при $t \gtrsim 0,27$ намечается превышение рассчитанных значений над данными опыта. На-

²Здесь и далее координаты отсчитываются от начального положения границы *воздух*– SF_6 .

³Здесь и далее время отсчитывается от момента прихода УВ на КГ.

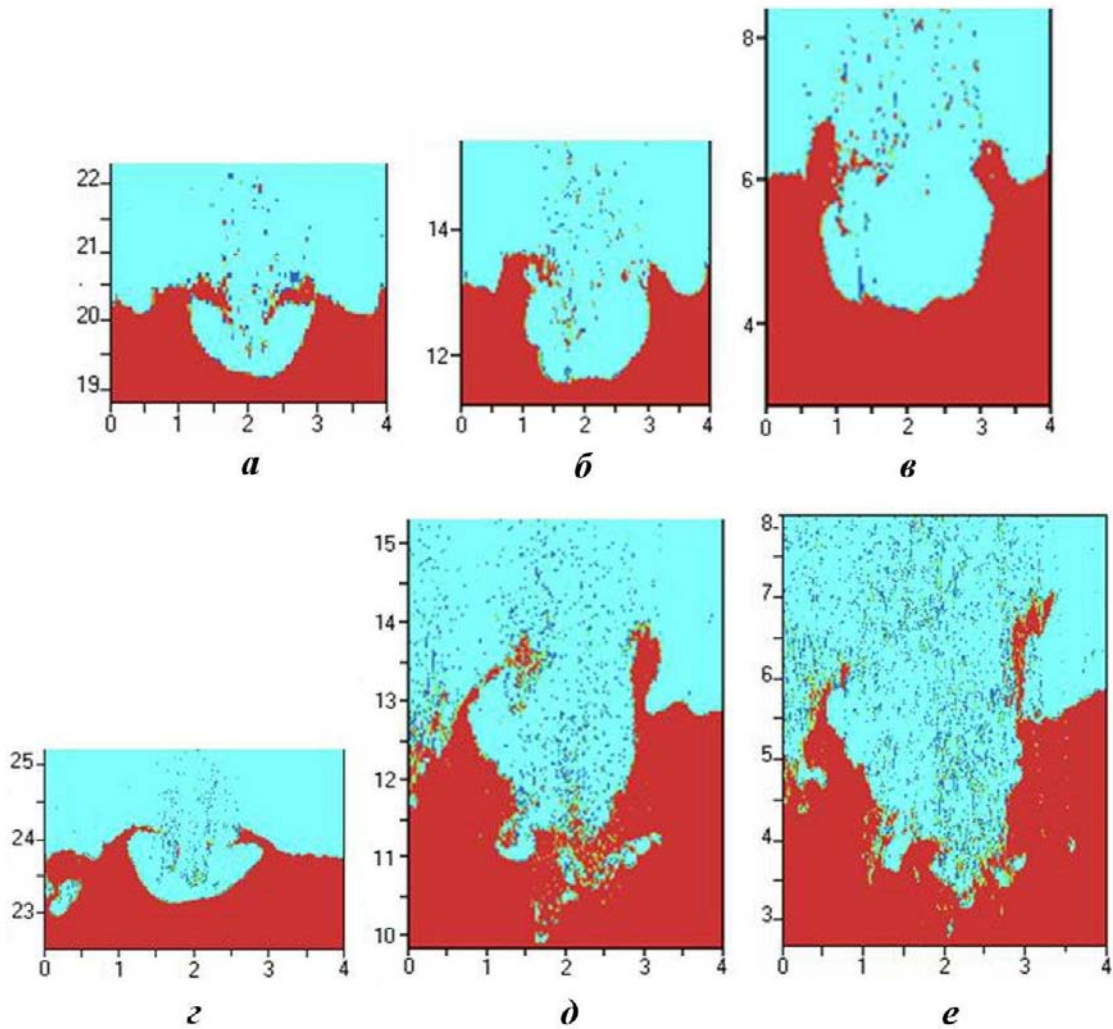


Рис. 7. Растровые картины концентрации воздуха в сечении $x = 2$: сверху — расчет 6, снизу — расчет 5; $a, г - t = 1,6$; $б, д - t = 1,9$; $в, е - t = 2,1$

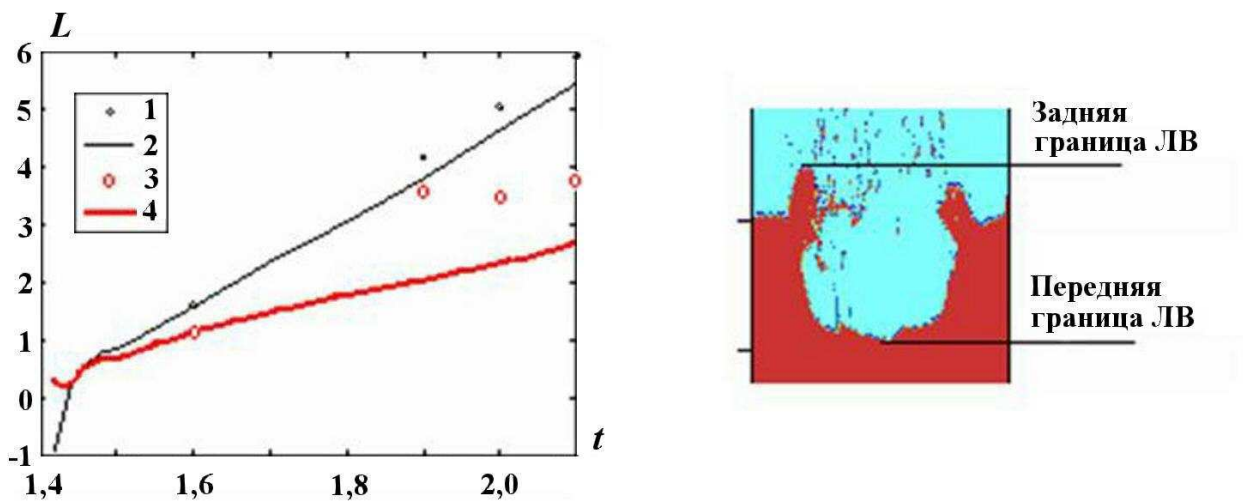


Рис. 8. Временные зависимости, полученные в расчетах 5 (1, 3) и 6 (2, 4): 1, 2 — расстояние от задней границы ЛВ до фронта УВ; 3, 4 — амплитуда ЛВ

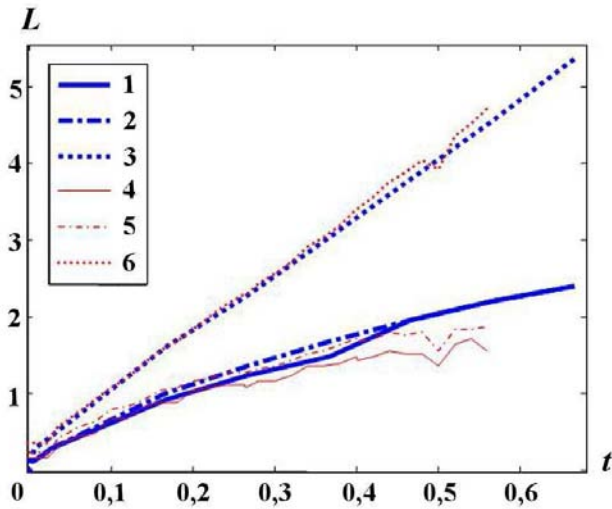


Рис. 9. Сравнение временных зависимостей, полученных в 3D расчете 4 (1–3) и 2D расчете 2 (4–6): 1, 4 — ширина ЗТП; 3, 6 — расстояние от задней границы ЗТП до фронта УВ; 2, 5 — расстояние от задней границы ЗТП до передней границы ЛВ

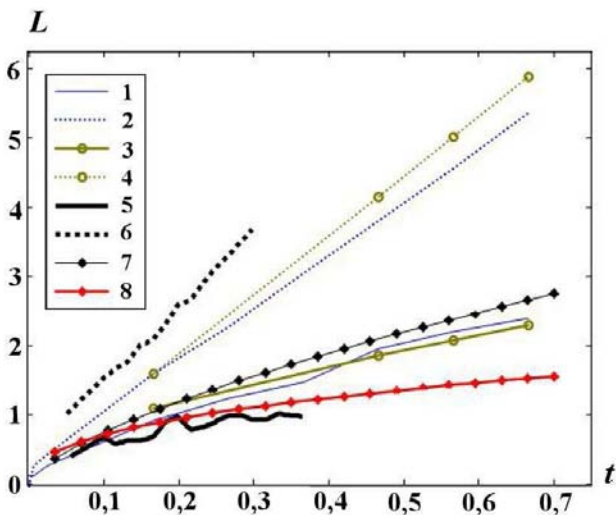


Рис. 10. Временные зависимости ширины ЗТП (1, 3, 5, 7, 8) и расстояния от задней границы ЗТП до фронта УВ (2, 4, 6): 1, 2 — 3D расчет 4; 3, 4 — 3D расчет 5; 5, 6 — опыт; 7 — оценка по формуле (П6); 8 — оценка по формуле (П11), $u_{\tau 0} \approx 8$

против, измеренное расстояние от задней границы ЗТП до фронта УВ больше рассчитанного. Указанные отличия, однако, имеют порядок погрешности измерений.

На рис. 10 приводятся также теоретические оценки для ширины ЗТП, полученные в Приложении 3. Результаты расчетов ширины ЗТП по

формуле (П11) оказываются ближе к измерениям, в то время как формула (П6) лучше согласуется с 3D расчетами.

На рис. 11 приводятся зависимости от времени максимальной в ЗТП турбулентной скорости, полученной в 3D расчете и согласно теоретическим оценкам (см. Приложение 3). Расчетная зависимость в целом близка к полученным по обеим формулам: (П8) и (П12).

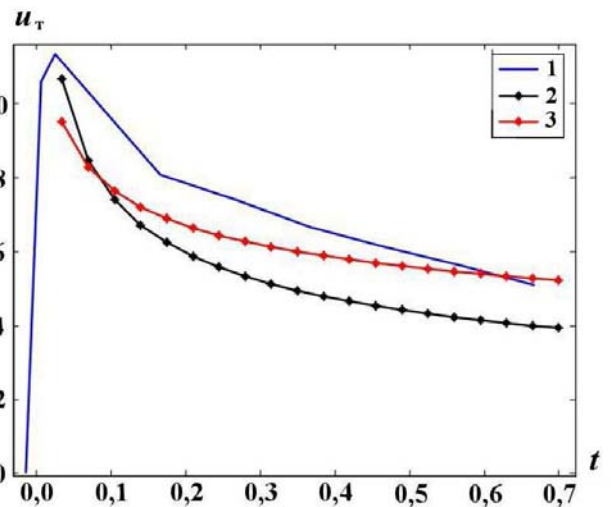


Рис. 11. Зависимости от времени турбулентной скорости: 1 — 3D расчет 4; 2 — по формуле (П8); 3 — по формуле (П12), $u_{\tau 0} \approx 8$

$M_{УВ} = 9,1$. Полученный в 2D расчете 1 общий вид развития плоской части границы *воздух*— SF_6 и ЛВ представлен растровыми картинками концентрации воздуха на рис. 12. Как и для меньших чисел $M_{УВ}$, характерным является расширение вершины ЛВ и схлопывание концов основания после прохождения УВ через границу. Отличие от $M_{УВ} = 3,7$ заключается в том, что возмущение здесь расплющивается в еще большей степени. При этом дальнейшее развитие ЛВ приводит к "прилипанию" к стенкам расположенного вблизи него SF_6 . Дальнейшее прохождение УВ по области SF_6 приводит к рассеиванию ЛВ, так что формируется ЗТП с приблизительно одномерным (меняющимся по длине трубы) распределением SF_6 . Заметим, что в соответствующем опыте также трудно выделить ЗТП в обычном понимании.

На рис. 13 показаны расчетные и экспериментальные (R, t) -диаграммы передней границы ЛВ, передней и задней границ ЗТП и фрон-

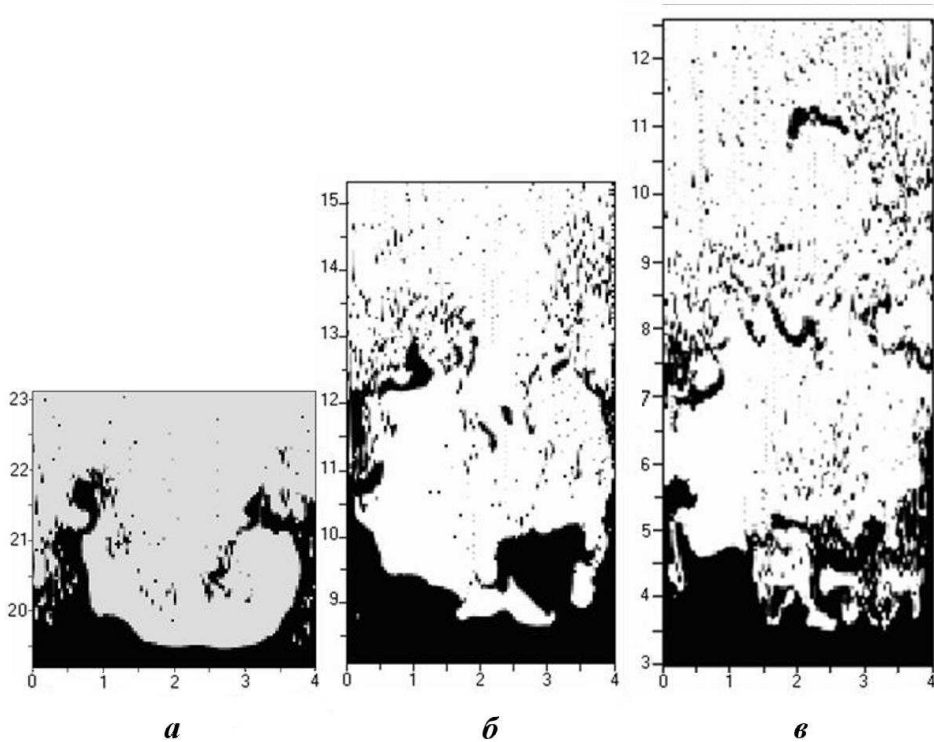


Рис. 12. Растровые картины концентрации воздуха в расчете 1: $a - t = 0,8$; $b - t = 0,9$; $v - t = 0,95$

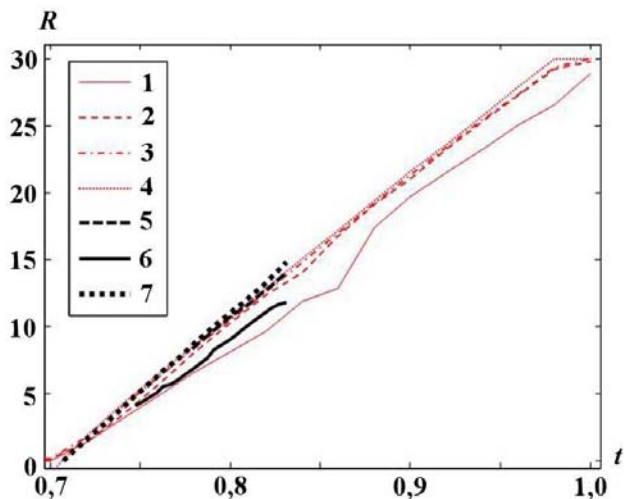


Рис. 13. Сравнение (R, t) -диаграмм, полученных в 2D расчете 1 (1–4) и опыте (5–7): 3 — передняя граница ЛВ; 2, 5 — передняя граница ЗТП; 1, 6 — задняя граница ЗТП; 4, 7 — фронт УВ

та УВ. В целом расчет согласуется с измерениями. В опыте, как и в расчете, передние границы ЗТП и ЛВ практически сливаются с фронтом УВ, движущейся по области SF_6 , и лишь на поздние моменты времени намечается отставание ЛВ от фронта УВ. Это связано с относитель-

но малым временем нахождения УВ в SF_6 при столь больших числах Маха. Если бы область SF_6 имела большую длину, это время увеличилось бы, а отставание передней границы ЗТП от фронта УВ стало бы более заметным.

3. Результаты 2D расчетов с ЛВ полуцилиндр

Опыты с ЛВ данного вида выполнены для различных чисел Маха, как меньших, так и больших числа Маха, называемого в [2] критическим: $M_{вкр} \approx 5,5$.

$M_{ув} = 1,7$. Полученный в 2D расчете 9 общий вид развития плоской части границы *воздух*– SF_6 и ЛВ представлен растровыми картинками концентрации воздуха на рис. 14 сверху. В целом они похожи на полученные в разд. 2 для ЛВ в виде треугольной канавки. Измеренная ширина ЗТП настолько мала, что оказывается меньше погрешности измерений. Поэтому на рис. 15 показана лишь полученная в расчете временная зависимость расстояния от задней границы ЗТП до передней границы ЛВ в сравнении с измерениями. Согласие можно считать

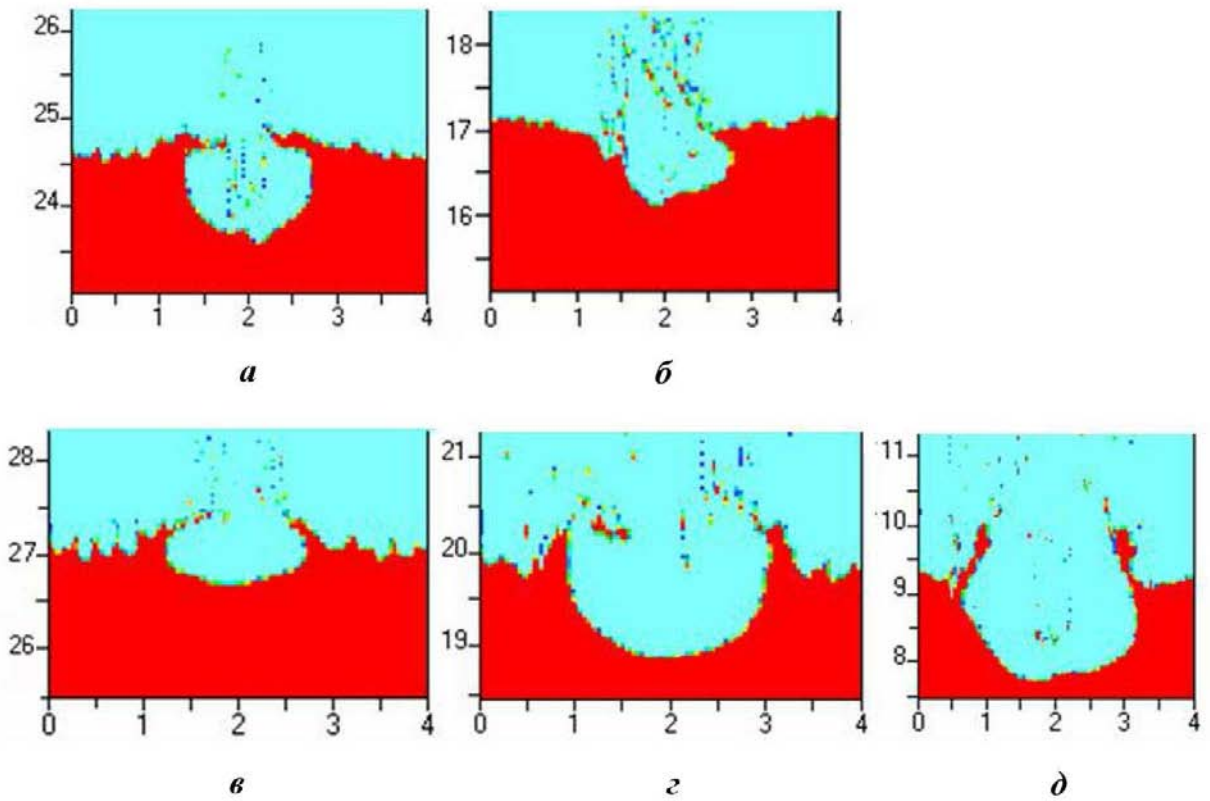


Рис. 14. Растровые картины концентрации воздуха: сверху — расчет 9: $a - t = 2,6$; $б - t = 3,2$; снизу — расчет 7: $в - t = 1,5$; $г - t = 1,7$; $д - t = 2$

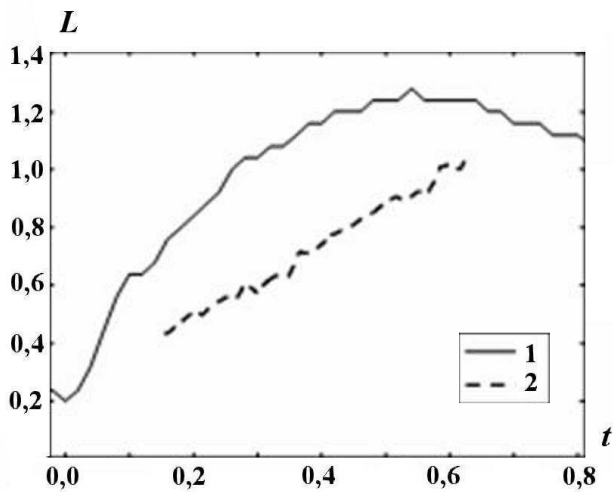


Рис. 15. Временные зависимости расстояния от задней границы ЗТП до передней границы ЛВ: 1 — расчет 7; 2 — опыт

удовлетворительным, учитывая погрешность измерений около 0,5 см.

Зависимости от времени ширины ЗТП (рис. 16, a), а также максимальной в ЗТП

турбулентной скорости (рис. 16, $б$), полученные в расчете, оказываются в целом близки соответствующим теоретическим оценкам (см. формулы (П11) и (П12) в Приложении 3).

$M_{ув} = 3,7$. Полученный в 2D расчете 7 общий вид развития плоской части границы *воздух*– SF_6 и ЛВ представлен растровыми картинками концентрации воздуха на рис. 14 снизу. Как и для ЛВ *треугольная канавка* (см. разд. 2), характерным является расширение вершины ЛВ и схлопывание концов основания после прохождения УВ через границу. Дальнейшее развитие ЛВ и ЗТП также аналогично результатам разд. 2.

Обработка результатов расчетов показывает, что (R, t) -диаграммы УВ и передней границы ЛВ в расчете и опыте близки, однако передняя граница ЛВ несколько опережает переднюю границу ЗТП и со временем удаляется от фронта УВ. Точность определения ширины ЗТП в опыте невелика, поэтому можно вести речь лишь о тенденции сближения с расчетом, о чем свидетельствует рис. 17. В то же время отметим, что

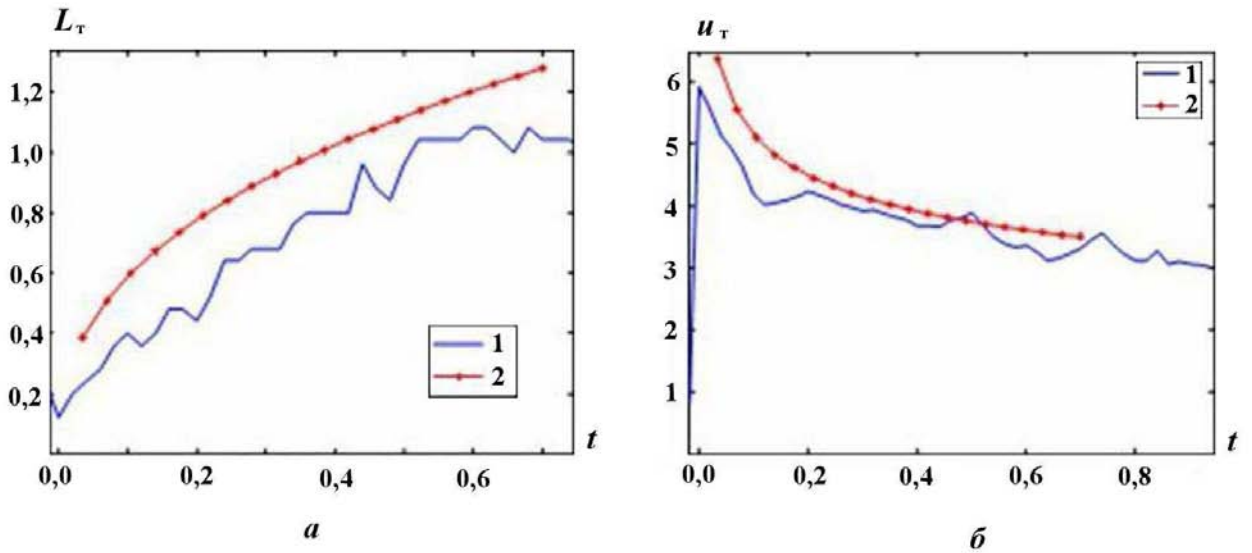


Рис. 16. Ширина ЗТП (а) и турбулентная скорость (б): 1 — расчет; 2 — по формулам (П11) и (П12), $u_{t0} \approx 4,85$

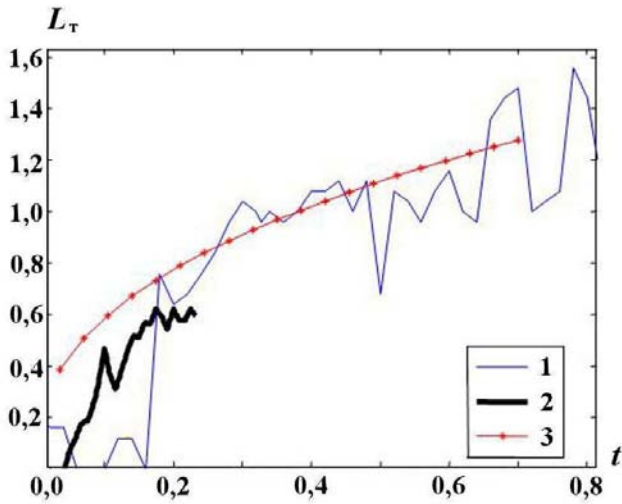


Рис. 17. Зависимость от времени ширины ЗТП: 1 — расчет 7; 2 — опыт; 3 — по формуле (П11), $u_{t0} \approx 4,85$

расчетная зависимость ширины ЗТП близка к полученной по формуле (П11) из Приложения 3 (см. рис. 16, а).

$M_{УВ} = 9,1$. Полученный в 2D расчете 8 общий вид развития плоской части границы *воздух-SF₆* и ЛВ представлен растровыми картинками концентрации воздуха на рис. 18. В отличие от предыдущих вариантов сразу после прихода УВ на КГ ЛВ сильно расплющивается и фактически становится частью ЗТП, которая на этот момент остается вблизи фронта УВ и воздействует на него. На более поздней стадии намечается отставание ЛВ и ЗТП от фронта УВ, результаты же измерений выполнены лишь для относительно малых моментов времени, при которых фронт УВ и передние границы ЗТП и ЛВ совпадают. В целом результаты расчета аналогичны случаю $M_{УВ} = 9,1$, рассмотренному в

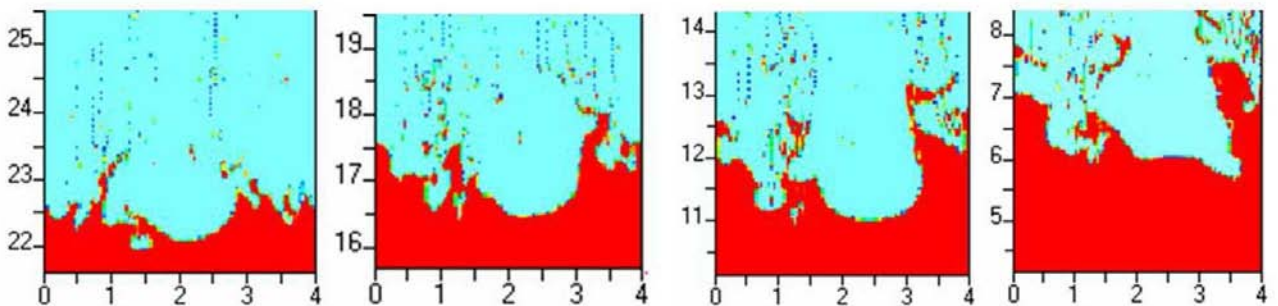


Рис. 18. Картинки концентрации воздуха, $t = 0,8; 0,85; 0,9; 0,95$ (слева направо) в расчете 8

разд. 2: передние границы ЗТП и ЛВ близки к фронту УВ. Закон роста ЗТП неплохо описывается теоретической формулой (П6) (рис. 19).

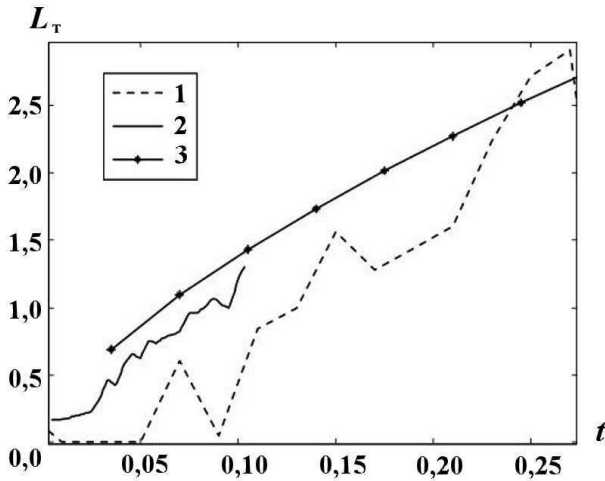


Рис. 19. Зависимости от времени ширины ЗТП: 1 — расчет; 2 — опыт; 3 — по формуле (П6), $u_{\tau 0} \approx 20$

Выводы

При прямом 2D и 3D численном моделировании задачи с ЛВ получены согласующиеся с опытными данными результаты. При этом картины развития ЛВ и ЗТП в целом качественно близки для обоих видов начального ЛВ: треугольной канавки и полуцилиндра.

Результаты 3D и 2D расчетов в целом близки друг к другу, при этом в 3D расчете на более грубой сетке имеется более длительная стадия, на которой заметна роль схемной вязкости.

Отметим также, что турбулентность в ЗТП затухает со временем в согласии с теоретическими оценками ширины ЗТП и турбулентной скорости.

Приложение 1.

Приближенно-аналитическое рассмотрение задачи

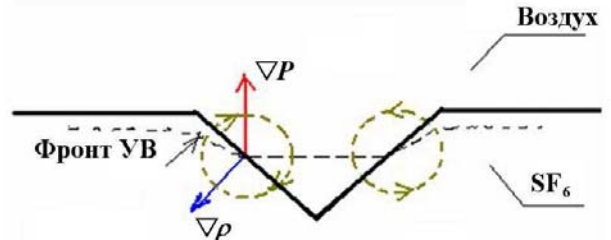
Как отмечено выше, характерным для ЛВ треугольная канавка является расширение вершины ЛВ и, напротив, схлопывание концов основания после прохождения УВ через границу. Это понятно из схемы, показанной на рис. П1.

Относительная ориентация $\nabla \rho$ и ∇P такова, что на возмущенной части границы создаются

вихри (см. рис. П1). Это следует из уравнения для завихренности $\vec{\omega}$, получающегося из уравнения Эйлера в форме Громеки—Лемба [4]

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{u} - \vec{\omega} \operatorname{div} \vec{u} + \frac{[\nabla \rho \times \nabla P]}{\rho^2}.$$

На КГ, но вне ЛВ регулярная (т. е. с размерами порядка ЛВ) завихренность, очевидно, не генерируется. Образующаяся на ЛВ завихренность $\omega_i^{(0)}$ направлена по X (вдоль образующей ЛВ): $i = x$. Она сосредоточена на КГ, имеющей эффективную толщину $L_{КГ}$. Эта толщина увеличивается по двум причинам: во-первых, вследствие схемных эффектов; во-вторых, из-за развития случайных начальных возмущений. При этом в самом начале эволюции КГ отмечается развитие неустойчивости, т. е. появление всех компонент завихренности. Пространственные масштабы их изменения, однако, малы по сравнению с соответствующими масштабами $\omega_x^{(0)}$. В силу своей малости скорости $u_k^{(1)}$, соответствующие компонентам $\omega_k^{(1)}$, удовлетворяют уравнению неразрывности $\frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial x_k} = 0$.



П1. Схема движения в области ЛВ после прохождения УВ

Приложение 2.

Оценка схемных эффектов

Для выяснения роли схемных эффектов вследствие наличия схемной вязкости воспользуемся ее оценкой [5] (k — индекс суммирования):

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_i u_k) + \frac{\partial P}{\partial x_i} = \\ = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{h}{4} \rho u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) + \theta_i (h^2, \tau^2). \end{aligned} \quad (\text{П1})$$

Правые части уравнений (П1) можно трактовать как производные от компонентов "тензора"

напряжений аппроксимационной (схемной) вязкости. Их можно записать в виде

$$\sigma_{ik} = \frac{1}{4} h \rho u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k}. \quad (\text{П2})$$

Слово "тензор" взято в кавычки, поскольку ни (П1), ни (П2) не являются тензорами. Тем не менее формула (П2) аналогична по виду выражению для компонент тензора вязких напряжений, входящих в уравнения Навье—Стокса. При этом роль коэффициента молекулярной вязкости (являющегося скаляром) здесь играет коэффициент схемной вязкости, являющийся вектором и зависящий от скорости потока u_k и размера счетной ячейки h :

$$\nu_{ck} = \frac{1}{4} h u_k.$$

После прихода (в момент t_0) УВ на КГ массовая скорость имеет на ЛВ фактически две (в основном регулярные) компоненты u_z и u_y . Компонента же u_x мала по сравнению с ними, поскольку определяется малыми случайными возмущениями; соответственно, малы и ее производные.

Таким образом, коэффициент схемной вязкости анизотропен, а именно имеет две большие компоненты, лежащие в плоскости, нормальной к образующей ЛВ:

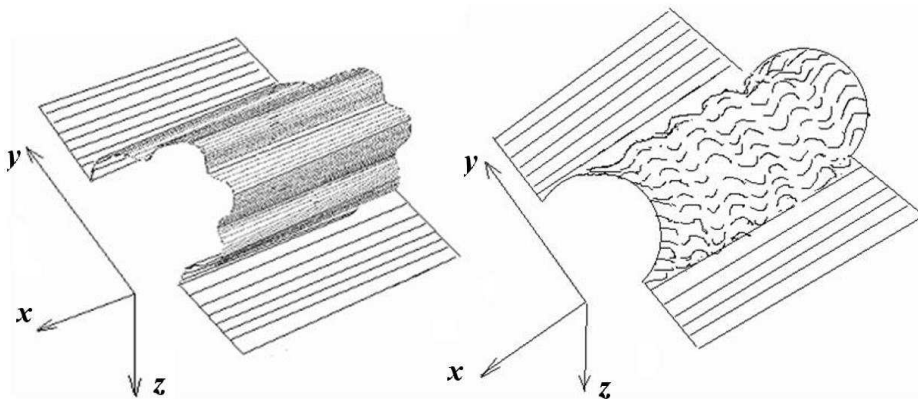
$$\nu_{cz} \approx \frac{1}{4} h u_z; \quad \nu_{cy} \approx \frac{1}{4} h u_y, \quad (\text{П3})$$

в то время как третья компонента $\nu_{cx} \approx \frac{1}{4} h u_x$ мала по сравнению с ними. Это означает, что по

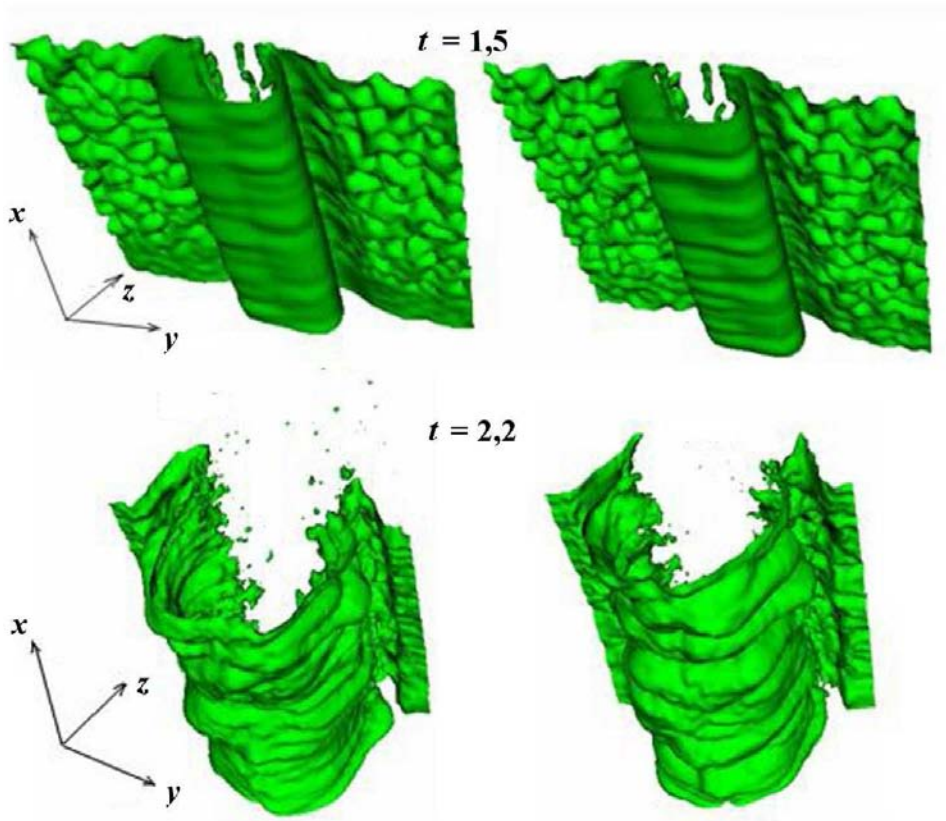
направлению X все компоненты в меньшей степени подавляются схемной вязкостью, нежели по направлениям Z и Y . Другими словами, возмущения продольно-гофрированного вида (рис. П2 слева) подавляются схемной вязкостью гораздо сильнее, чем поперечно-гофрированные (рис. П2 справа). Действительно, именно последние (с волновым вектором, направленным по X) наблюдаются на начальной (после прохождения УВ через КГ *воздух-SF₆*) стадии численного расчета (см. рис. П3, П4). При этом картина развития возмущений не зависит от того, каков был начальный спектр случайных возмущений. Из рис. П3 видно, что результаты весьма близки для двух вариантов с разными генераторами случайных чисел (расчеты 4 и 6). Число гармоник на ЛВ уменьшается (длина волны растет), а при $t = 2,2$ регулярная структура возмущений нарушается.

На КГ вне ЛВ имеется лишь одна регулярная компонента скорости; соответственно, анизотропен коэффициент схемной вязкости: он имеет лишь одну компоненту, параллельную оси трубы. Следовательно, здесь не должно быть выделенного направления в развитии случайных возмущений, что и наблюдается на рис. П3, П4.

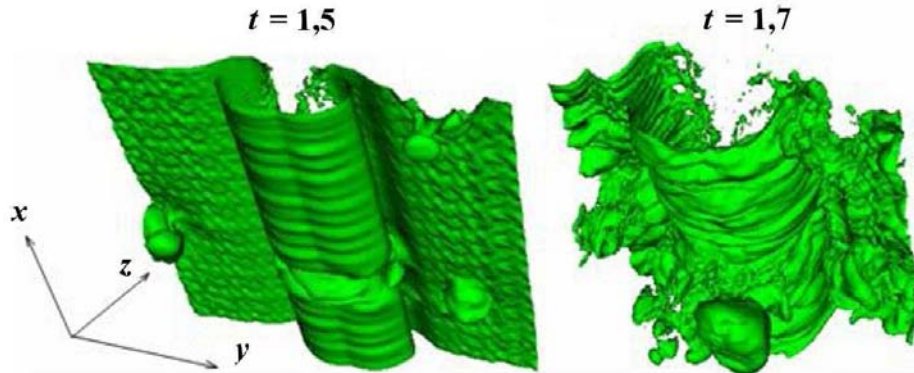
Отметим также, что в расчете на более подробной сетке (см. рис. П4) число гармоник на ЛВ на момент времени $t = 1,5$ заметно больше ($N_\lambda \approx 17 \div 18$), нежели в расчете на более грубой сетке ($N_\lambda \approx 12$), а переход регулярных возмущений к нерегулярному виду происходит гораздо раньше — уже к моменту $t = 1,7$. На начальной стадии величина $L_{КГ}$ определяется коэффициентом



П2. Характерные формы возмущений



П3. Изоповерхности концентрации $\beta_{SF_6} = 0,5$: слева — расчет 4; справа — расчет 6



П4. Изоповерхности концентрации $\beta_{SF_6} = 0,5$, расчет 6 (подробная сетка)

том схемной вязкости (П3) $\nu_c \approx \frac{1}{4}hu$ (где $u \sim \sim u_z \approx 30$):

$$L_{\text{КТ}} \sim L_{\nu_c} \sim \sqrt{\nu_c(t - t_0)}.$$

Полагая, что длина волны гармоники $\lambda \sim L_{\nu_c}$, находим число гармоник:

$$N_\lambda \approx \frac{H}{2L_{\nu_c}} \approx \sqrt{\frac{NH}{u(t - t_0)}}, \quad (\text{П4})$$

где N — число счетных узлов на ширине H трубы. Учитывая, что $H = 4$, $N = 100$ в расчете на грубой и $N = 200$ на подробной сетке, а $u \approx 30$, получаем для момента $t = 1,5$ соответствующие

значения: $N_\lambda \approx 11,5$ и $N_\lambda \approx 16,3$. Это согласуется с полученными выше значениями. Для $N = 100$, $t = 2$ формула (П4) дает $N_\lambda \approx 5$, что также согласуется с рис. П4.

Соответствующие схемные числа Рейнольдса:

$$\text{Re}_c \equiv \frac{L_{\nu_c} u}{\nu_c} \approx 2 \sqrt{\frac{u(t-t_0)N}{H}}.$$

Для $N = 100$ и $t = 2$ получается такое же число $\text{Re}_c \approx 40$, как для $N = 200$ и $t = 1,7$, что, по-видимому, обеспечивает переход к нерегулярной (турбулентной) структуре возмущений — это согласуется с полученными результатами.

Приложение 3.

Аналитические оценки ширины ЗТП

Отметим, что законы движения фронта УВ и роста ЗТП различны. Действительно, как показано в [1, 2], скорость фронта УВ на рассматриваемых масштабах турбулентности практически не успевает заметно ослабевать, т. е. $L_{УВ}$ практически линейно по времени. Что касается ширины ЗТП L_T , то скорость ее роста уменьшается весьма заметно по мере превышения начального масштаба турбулентности $l_T(t_{КГ}) = l_{T0}$.

Данный масштаб можно оценить как $l_T = \alpha H$ (примем $\alpha = 1/6$), а поскольку боковые границы в рассматриваемой задаче — жесткие стенки, он не меняется на всем времени развития ЗТП.

Модуль момента характерного вихря:

$$M_T \sim \rho u_T l_T^4,$$

где u_T — турбулентная скорость. Число таких вихрей в ЗТП

$$N_T \sim \frac{L_T H^2}{l_T^3}.$$

Полный момент ЗТП $M_{ЗТП} \sim M_T \sqrt{N_T} \sim u_T \sqrt{L_T}$ обязан сохраняться, т. е.

$$u_T^2 L_T = \text{const.} \quad (\text{П5})$$

Можно сделать два разных предположения для нахождения u_T .

Первое выражается в виде $u_T \sim \frac{dL_T}{dt}$. Тогда из (П5) следует

$$\frac{L_T}{L_{T0}} = \left(\frac{t}{t_0} \right)^{2/3}, \quad (\text{П6})$$

причем полагается

$$L_{T0} = L_T(t_0), \quad t_0 = \frac{l_{T0}}{u_{T0}}. \quad (\text{П7})$$

Из (П5), (П6) следует

$$\frac{u_T}{u_{T0}} \sim \left(\frac{t}{t_0} \right)^{-1/3}. \quad (\text{П8})$$

Второе предположение заключается в относительно медленном изменении u_T со временем. Тогда можно записать

$$L_T \sim \sqrt{D_T t}, \quad (\text{П9})$$

где коэффициент турбулентной вязкости $D_T \sim l_T u_T$. Но $l_T = \alpha H = \text{const}$, следовательно, $D_T \sim u_T$. Тогда из (П9)

$$u_T \sim \frac{L_T^2}{t}. \quad (\text{П10})$$

Но поскольку по-прежнему должно выполняться (П6), то из (П10) следует

$$\frac{L_T}{L_{T0}} = \left(\frac{t}{t_0} \right)^{2/5} \quad (\text{П11})$$

с начальными значениями (П7), где согласно 3D расчетам $u_{T0} \approx 8$ (в 2D расчетах $u_{T0} \approx 4,85$). С учетом (П10)

$$\frac{u_T}{u_{T0}} \sim \left(\frac{t}{t_0} \right)^{-1/5}, \quad (\text{П12})$$

что оправдывает сделанное выше предположение.

Список литературы

1. Синькова О. Г., Стаценко В. П., Янилкин Ю. В. Численное исследование развития турбулентного перемешивания на контактной границе *воздух—SF6* при распространении ударной волны с большими числами Маха // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2007. Вып. 2—3. С. 3—17.
2. Bliznetsov M. V., Nevmerzhitsky N. V., Razin A. N. et al. Research on turbulent mixing development at the gas-gas interface with mach number of the shock wave in the range of 2—9 // 9-th Conf. "Physics of Turbulent Mixing of Compressible Media". England, Cambridge. July 2004.

3. *Невмержицкий Н. В., Разин А. Н., Сотсков Е. А. и др.* Исследование развития турбулентного перемешивания и возмущений в газах с повышенной сжимаемостью при числах Маха ударной волны от 2 до 9 // Межд. конф. "IX Забабахинские науч. чтения." Снежинск, 2007.
4. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1973.
5. *Синькова О. Г., Стаценко В. П., Янилкин Ю. В.* Численное моделирование опыта

по исследованию турбулентного перемешивания после неоднократного прохождения ударной волны через границу раздела // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2004. Вып. 3. С. 17–22.

Статья поступила в редакцию 29.04.13.
