УДК 539.4

КИНЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КОМПАКТИРОВАНИЯ ПОВРЕЖДЕННОСТИ В СРЕДАХ С ПРОЧНОСТЬЮ

О. Н. Игнатова, В. А. Раевский, И. С. Целиков
(РФЯЦ-ВНИИЭФ, г. Саров)

Предложена модель компактирования поврежденной среды, основанная на описании схлопывания одиночной поры с учетом упругопластических свойств среды. Для описания схождения пор, распределенных по объему вещества, рассматривается движение одной сферической ячейки в идеально-пластической несжимаемой среде. В этом приближении получено аналитическое решение для зависимости интегральной поврежденности от давления, сдвиговой прочности и начальной поврежденности.

Получены уравнения, описывающие кинетику компактирования для случаев произвольной зависимости давления от времени и переменного предела текучести.

Ключевые слова: поврежденность, компактирование, модель, давление, предел текучести, среда с прочностью.

Введение

При численном моделировании высокоскоростного деформирования материалов, сопровождающегося разрушением и последующим компактированием дефектов (пор) при воздействии волн сжатия, возникают большие трудности. Компактирование дефектов, образующихся в результате действия импульсных растягивающих напряжений, исследовано недостаточно. Существующие в настоящее время модели компактирования [1, 2] являются либо слишком сложными для их реализации в численных методиках, либо не отражают всех эффектов, происходящих при закрытии пор.

В данной работе предлагается достаточно простая кинетическая модель компактирования поврежденной среды, основанная на описании схлопывания одиночной поры с учетом упругопластических свойств среды. Такой подход предложен Кэроллом и Холтом [1].

Основные соотношения. Результаты численного моделирования

Предположив, что при компактировании объем вещества не меняется ($N = \mathrm{const}$), представим поврежденную среду как систему одинаковых пор, находящихся примерно на одинаковом расстоянии от соседних пор, подобно атомам в кристаллической решетке. Тогда можно выделить элементарную *ячейку* вещества радиусом $R_{я}$ с одной порой радиусом R и рассмотреть сжатие этой ячейки внешним давлением (рис. 1). Пусть вещество обладает прочностью Y_0 с учетом вязкости, что будет препятствовать движению границы поры. Уравнение движения поры для такой модели компактирования, предложенной Кэроллом и Холтом [1], представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка по времени, что достаточно сложно для анализа и получения решений в явном виде.

Внутренний и наружный радиусы ячейки связаны с плотностью пор соотношением

$$V_i = \frac{1}{N} = \frac{4}{3}\pi\left(R_{я}^3 - R^3\right), \tag{1}$$

где V_i — объем сплошного вещества в одной ячейке, который считается неизменным; R — внутренний радиус ячейки; $N = 1/V_i$ приблизительно соответствует количеству пор в единице объема.

Для поврежденности ω получается следующее уравнение:

$$\omega = \left(\frac{R}{R_я}\right)^3 = \frac{1}{1 + \dfrac{3}{4\pi N R^3}}. \qquad (2)$$

Для описания схлопывания одиночной поры воспользуемся решением задачи о движении вакуумного пузырька радиусом R_0 в бесконечном объеме несжимаемой идеальной жидкости, полученным Рэлеем [3]. В этой задаче кинетическая энергия жидкости равна работе по перемещению вещества под действием внешнего давления. Если материал, в котором находится пора, обладает прочностью, то работа сил давления $A_д$ переходит в кинетическую энергию и частично расходуется на выделение тепла в результате совершения пластической работы $A_п$:

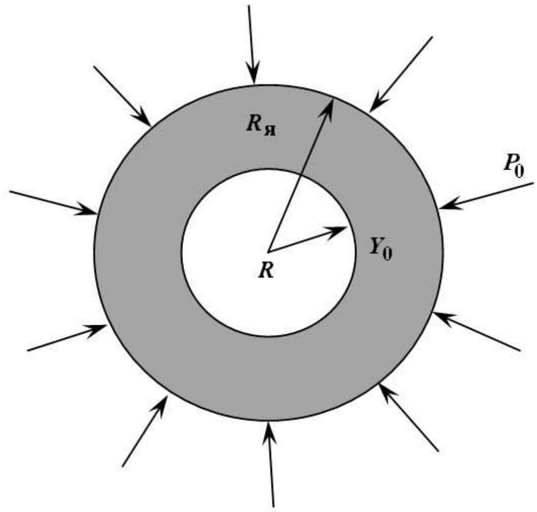

Рис. 1. Схема элементарной ячейки с наружным $R_я$ и внутренним R радиусами в веществе с прочностью Y_0 под воздействием давления P_0

$$\frac{2\pi\rho\left(R_я - R\right)R^3\dot{R}^2}{R_я} = \frac{4}{3}P_0\pi\left(R_0^3 - R^3\right) - A_п\left(t\right). \qquad (3)$$

Левая часть уравнения (3) есть кинетическая энергия вещества, а правая состоит из работы давления $A_д$ и пластической работы $A_п$; R — текущий радиус поры с начальным радиусом R_0 и радиусом ячейки $R_я$; P_0 — давление; ρ — плотность вещества. В случае отсутствия прочности уравнение (3) переходит в задачу о схлопывании одиночной поры в идеальной несжимаемой жидкости, решенную Рэлеем. Согласно уравнению (3) движение границы поры будет происходить до тех пор, пока пластическая работа меньше работы сил давления, и прекратится в случае $A_п = A_д$.

Изменение работы пластического деформирования $A_п$ в случае постоянного предела текучести Y_0 приближенно может быть рассчитано по следующему уравнению:

$$A_п \approx \int\limits_V^{V_0}\int\limits_0^t Y_d \dot{\varepsilon}_i \, dt \, dV \approx -Y_0 \int\limits_0^t dt \int\limits_R^{R_я} 4\pi r^2 \frac{2\dot{R}R^2}{r^3} dr \approx \frac{8\pi}{3} Y_0 \int\limits_{R_0}^{R} R^2 \ln\left(\frac{3}{4\pi N R^3} + 1\right) dR, \qquad (4)$$

где Y_d и $\dot{\varepsilon}_i$ — предел текучести и скорость деформации соответственно. Уравнение (4) получено с учетом того, что при сферическом схождении несжимаемого вещества скорость деформации связана с радиусом: $\dot{\varepsilon}_i \cong \left|\dfrac{\partial U\left(r\right)}{\partial r}\right| = \dfrac{2R^2\dot{R}}{r^3}$. При схлопывании пор объем V остается неизменным, но изменяется внутренний радиус поры и наружный эффективный радиус ячейки $R_я$, в которой находится данная пора. В случае постоянного предела текучести можно интегрированием (4) получить точное уравнение для пластической работы:

$$A_п \approx \frac{8}{9}\pi Y_0 \left[R_0^3 \ln\left(1 + \frac{3}{4\pi N R_0^3}\right) - R^3 \ln\left(1 + \frac{3}{4\pi N R^3}\right) + \frac{3}{4\pi N} \ln \frac{4\pi N R_0^3 + 3}{4\pi N R^3 + 3}\right]. \qquad (5)$$

После несложных преобразований получаем дифференциальное уравнение изменения радиуса поры от времени:

$$\dot{R} = -\sqrt{\frac{\left(A_д - A_п\right)R_я}{2\pi\rho R^3\left(R_я - R\right)}}. \qquad (6)$$

Из уравнения (6) видно, что остановка движения границы поры произойдет в случае $A_д = A_п$. После преобразования (6) получим условие остановки поры:

$$\frac{P}{Y_0} = \frac{2}{3}\frac{R_0^3 \ln\left(1 + \dfrac{3}{4\pi N R_0^3}\right) - R^3 \ln\left(1 + \dfrac{3}{4\pi N R^3}\right) + \dfrac{3}{4\pi N}\ln\dfrac{4\pi N R_0^3 + 3}{4\pi\ N R^3 + 3}}{R_0^3 - R^3}. \tag{7}$$

С учетом (2) получим уравнение, определяющее зависимость начальной и конечной поврежденностей от отношения давления к пределу текучести:

$$\frac{P}{Y_0} = \frac{2}{3}\frac{\omega\ln\omega - \omega_0\ln\omega_0 + (1-\omega)(1-\omega_0)\ln\dfrac{1-\omega}{1-\omega_0}}{\omega_0 - \omega}. \tag{8}$$

Как следует из (8), процесс компактирования определяется только безразмерными интегральными характеристиками ω_0, ω, P/Y_0. Очевидно, что для каждого ω_0 существует минимальное критическое значение $P_к/Y_0$, при котором возможно полное компактирование, т. е. $R = 0$. Оно определяется соотношением

$$\frac{P_к}{Y_0} = -\frac{2}{3}\left(\ln\omega_0 - \frac{1-\omega_0}{\omega_0}\ln\frac{1}{1-\omega_0}\right). \tag{9}$$

Кроме того, существует другой критический уровень — отношение P_0/Y_0, при котором поврежденность вообще не будет изменяться. Это условие $\dfrac{dA_д}{dR} - \dfrac{dA_п}{dR} = 0$, из которого после вычислений получаем следующее соотношение:

$$\frac{P_0}{Y_0} = \frac{2}{3}\ln\frac{1}{\omega_0}. \tag{10}$$

На рис. 2 показаны расчетные зависимости поврежденности ω от отношения P/Y, полученные по уравнениям (7)—(10). Видно, что существуют три характерные области: полного, неполного компактирования и так называемая *мертвая зона*, в которой не происходит никакого движения. Для полного компактирования необходимо воздействие давлением больше минимального критического, т. е. $P \geq P_к = -\dfrac{2}{3}Y_0\left(\ln\omega_0 - \dfrac{1-\omega_0}{\omega_0}\ln\dfrac{1}{1-\omega_0}\right)$. Если давление меньше критического, $\dfrac{P_0}{Y_0} < \dfrac{P}{Y_0} < \dfrac{P_к}{Y_0}$, то поврежденность уменьшается до значения, определяемого уравнением (8).

Интересным следствием уравнения (8) является сильная зависимость результатов компактирования от последовательности воздействия импульсами давления. Если первый импульс давления P_1 имеет амплитуду такую, что $P_0 < P_1 < P_к$, то поврежденность уменьшается с ω_0 до ω_1. При этом для полного компактирования ω_1 следующий импульс давления должен быть больше: $P_2 > P_1$, т. е. проявляется свойство неаддитивности процесса компактирования.

Расчетные зависимости поврежденности от времени в случае действия постоянного давления $P = 3$ ГПа при разной прочности, полученные по уравнениям (2), (6), показаны на рис. 3. Расчеты сделаны для меди с параметрами $\rho_0 = 8{,}93\,г/см^3$; $R_0 = 0{,}05$ см; $R_я = 0{,}074$ см ($\omega = 0{,}3$; $N = 852\,см^{-3}$). Из рис. 3 видно, что с увеличением прочности время компактирования увеличивается. Для сравнения на рисунке приведена зависимость $\omega(t)$, полученная по модели компактирования из работы [2]:

$$\begin{cases} P = 0 \quad \text{при} \quad \omega > \omega_0; \\ P = P_к\left[1 - \left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^{1/2}\right] \quad \text{или} \quad \omega = \omega_0\left(1 - \dfrac{P}{P_к}\right)^2 \quad \text{при} \quad P < P_к \quad \text{и} \quad \omega < \omega_0; \\ \omega = 0 \quad \text{при} \quad P > P_к. \end{cases} \tag{11}$$

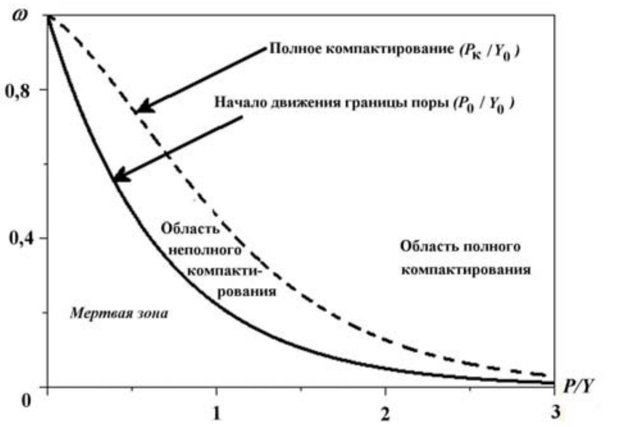

Рис. 2. Расчетные зависимости поврежденности от $P_к/Y_0$ и P_0/Y_0

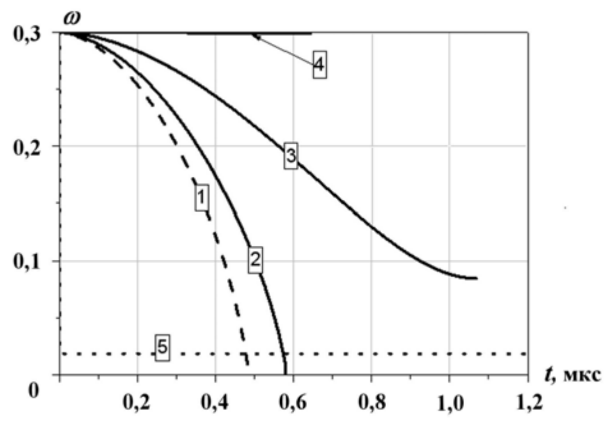

Рис. 3. Зависимости поврежденности от времени при разной прочности ($P_0 = 3$ ГПа; $R_0 = 0{,}05$ см): 1 — $Y = 0$; 2 — $Y_0 = 1{,}0$ ГПа; 3 — $Y_0 = 2{,}5$ ГПа; 4 — $Y_0 = 3{,}81$ ГПа; 5 — по модели из работы [2]

При расчете по этой модели для меди выбраны постоянные параметры: $P_к = 4$ ГПа, $\omega_0 = 0{,}3$. Уравнение (11) не зависит от прочности, откуда следует, что компактирование происходит всегда при $P < P_к$, тогда как согласно уравнениям (1)—(10) может быть такое сочетание P/Y, при котором поврежденность не изменится (кривая 4 на рис. 3).

Тестирование уравнения (6) проведено по двумерной эйлеровой методике счета для компактирования одиночной поры в меди ($\rho_0 = 8{,}93$ г/см^3) с параметрами $R_0 = 0{,}05$ см и $R_0 = 0{,}0015$ см и соответствующими радиусами ячейки $R_я = 0{,}074$ см и $R_я = 0{,}0022$ см. В обоих случаях поврежденность одинакова: $\omega = 0{,}3$. В расчетах задавалась одна ячейка (см. рис. 1) с прочностью Y_0 под действием постоянного давления P_0.

На рис. 4, 5 показаны зависимости радиуса от времени, полученные при расчете по двумерной эйлеровой методике и по уравнению (6). Видно, что зависимости близки по форме и времени полного компактирования, что свидетельствует о корректности выбранного подхода.

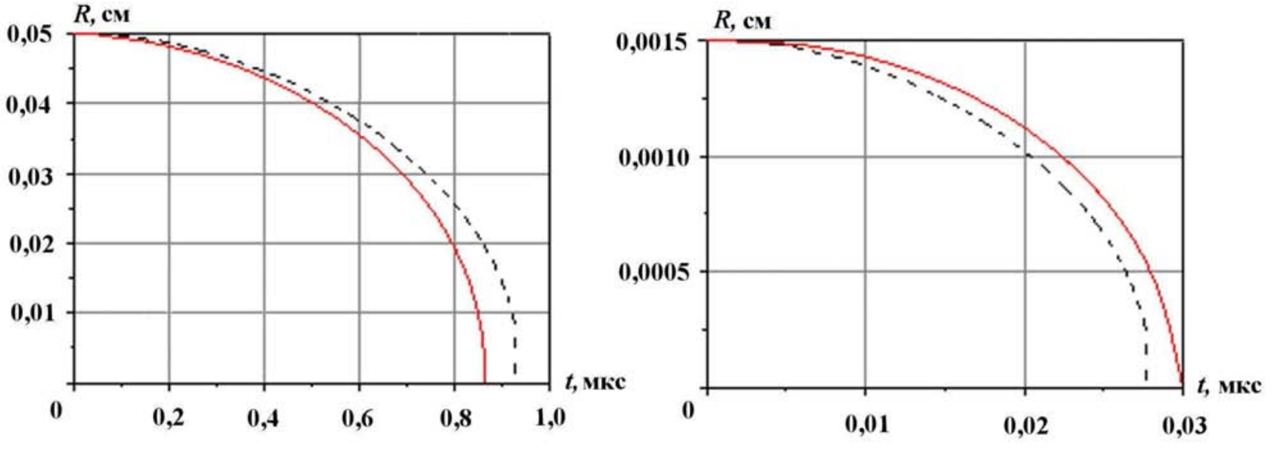

Рис. 4. Зависимости радиуса от времени, $P = 1{,}0$ ГПа; $Y = 0{,}05$ ГПа: — — — расчет по двумерной методике; —— — расчет по уравнению (6)

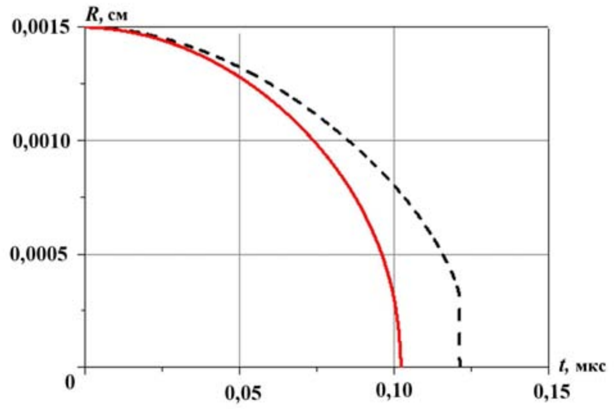

Рис. 5. Зависимости радиуса от времени, $P = 0{,}1$ ГПа; $Y = 0{,}05$ ГПа: – – – — расчет по двумерной методике; —— — расчет по уравнению (6)

Отметим, что уменьшение размера поры с $R_0 = 0{,}05$ см до $R_0 = 0{,}0015$ см уменьшает время компактирования с $t \sim 0{,}9$ мкс до $t \sim 0{,}03$ мкс. Уменьшение действующего на пору давления в десять раз приводит к увеличению времени компактирования примерно в 4 раза.

В случае, когда на границе ячейки давление переменное, следует рассматривать уравнение

$$\frac{2\pi\rho\left(R_я - R\right)R^3\dot{R}^2}{R_я} = 4\pi\int\limits_0^t P\left(t\right)R^2\dot{R}dt - A_п\left(t\right).$$

В случае переменного предела текучести уравнение для пластической работы усложняется:

$$A_п \approx \int\limits_0^t dt\int\limits_R^{R_я} 8\pi Y_d\left(\varepsilon_i,\dot{\varepsilon}_i,T\right)\frac{\dot{R}R^2}{r}dr = \frac{8\pi}{3}\int\limits_0^t Y_d\ln\left(1+\frac{3}{4\pi R^3 N}\right)R^2\dot{R}dt.$$

Уравнение для изменения радиуса поры в общем случае имеет вид

$$\dot{R} = -\sqrt{\frac{R_я}{\rho R^3\left(R_я - R\right)}\left\{\int\limits_0^t\left[2C_1\mathrm{P}\left(t\right) - \frac{4}{3}C_2Y_d\left(\varepsilon_i,\dot{\varepsilon}_i,T\right)\ln\left(1+\frac{3}{4\pi N R^3}\right)\right]R^2\dot{R}dt\right\}}, \qquad (12)$$

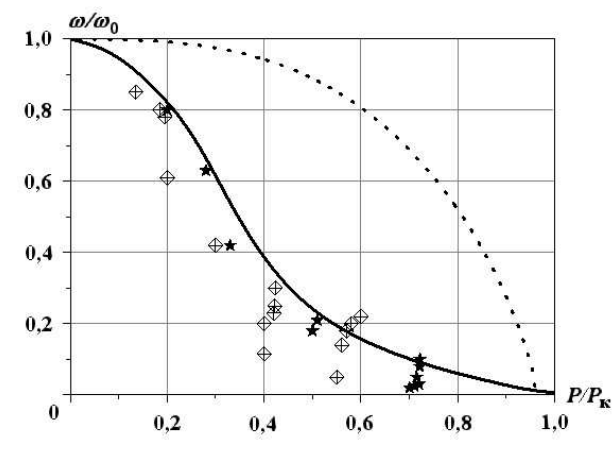

Рис. 6. Экспериментальные и расчетные зависимости ω/ω_0 от $P/P_к$: ⊠ — эксперимент [5], $\omega_0 = 0{,}356$; ★ — эксперимент [5], $\omega_0 = 0{,}15$; —— — расчет с переменным пределом текучести; - - - — расчет по уравнениям (2)—(6) с постоянным пределом текучести $Y = 0{,}1$ ГПа

где C_1 и C_2 — постоянные коэффициенты, введенные для корректировки уравнения (12). Для группы пор следует использовать уравнение компактирования отдельной поры (12) и далее рассчитывать поврежденность по уравнению (2).

Проведены расчеты зависимости поврежденности от давления в меди с использованием переменного (учитывающего влияние деформирования) и постоянного пределов текучести — по эйлеровой методике с моделью прочности РИНГ [4] и с использованием уравнений (2)—(6) при $Y_0 = 0{,}1$ ГПа; $\rho_0 = 8{,}93$ г/см^3; $R_0 = 0{,}0015$ см; $R_я = 0{,}0022$ см; $\omega = 0{,}3$.

На рис. 6 показаны расчетные зависимости ω/ω_0 от $P/P_к$ в сравнении с экспериментальными данными из работы [5]. Видно, что расчет с моделью прочности РИНГ, учитывающей сложную зависимость предела текучести от параметров напряженно-деформированного состояния, позволяет описать большинство экспериментальных результатов. Лучшего согласия с экспериментами можно добиться, подбирая постоянные коэффициенты C_1 и C_2 в (12), благодаря которым учитывается отличие компактирования сферических пор от реальных. В качестве определяющих моделей среды можно использовать уравнения [6]

$$\widetilde{Y}_d = (1-\omega)\,Y_d; \qquad \widetilde{G} = (1-\omega)\,G; \qquad \widetilde{P} = (1-\omega)\,P\left(\frac{\rho}{1-\omega}, T\right).$$

Заключение

Предложена кинетическая модель компактирования поврежденности, которая учитывает влияние временной зависимости действующего давления, прочности, начальной поврежденности и кинетики процесса. Аналитические решения, полученные для постоянных значений давления и прочности, согласуются с численными расчетами, что свидетельствует о корректности используемого подхода. Анализ решений показывает сложную картину процесса компактирования.

Основные выводы следующие:

1. Процесс компактирования зависит не только от давления и прочности, но и от начальной поврежденности: чем меньше поврежденность, тем больше давление, которым необходимо воздействовать на вещество для его полного компактирования.
2. Существует два критических значения отношения давления к прочности:

   1) минимальный уровень P_0/Y, при котором возможно уменьшение поврежденности; при $P/Y << P_0/Y$ поврежденность не изменяется;

   2) уровень $P_к/Y$, при котором происходит полное компактирование.

   Согласно полученному решению уменьшение поврежденности до конечного значения происходит в интервале $P_0/Y << P/Y < P_к/Y$.
3. Процесс и конечное состояние материала зависят не только от давления, но и от его временной зависимости. Это обусловлено инерцией сжатия пор.

Список литературы

1. *Carrol M. M., Holt A. C.* Static and dynamic pore-collapse relations for ductile porous materials // J. Appl. Phys. 1972. Vol. 43. P. 1626—1635.

2. *Огородников В. А., Садовой А. А., Софронов В. Н. и др.* Кинетическая модель пластического разрушения с учетом диссипативных процессов // Хим. физика. 2002. Т. 21, № 9. С. 104—109.

3. *Rayleigh* // Phil. Mag. 1917. Vol. 34. P. 94.

4. *Глушак Б. Л., Игнатова О. Н., Надёжин С. С., Раевский В. А.* Релаксационная модель сдвиговой прочности пяти металлов // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2012. Вып. 2. С. 25—36.

5. *Boade R. R.* Compression of porous copper by shock waves // J. Appl. Phys. 1968. Vol. 39, No 12. P. 5639—5702.

6. *Подурец М. А.* Термодинамическая модель пористого тела // Мат. моделирование. 1996. Т. 8, № 2. С. 29—31.

Статья поступила в редакцию 15.05.13.