

УДК 533.9

## АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ МОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ С ПЛОСКИМ СЛОЕМ ЭЛЕКТРОННОЙ ПЛАЗМЫ

А. И. Голубев, Н. П. Пятаков  
(РФЯЦ-ВНИИЭФ, г. Саров)

Сформулирована модельная задача о взаимодействии лазерного излучения с плоским слоем пространственно-однородной электронной плазмы. При этом сделан ряд предположений, позволяющих перейти от кинетического уравнения Власова для электронной плазмы к простой гидродинамической модели.

Получено аналитическое решение модельной задачи. Оно может быть использовано для тестирования программ, с помощью которых выполняются численные исследования взаимодействия лазерного излучения с плазмой, и для предварительных оценок пространственных шагов при таких исследованиях.

*Ключевые слова:* бесстолкновительная плазма, уравнения Максвелла, уравнение Власова, гидродинамическая модель.

### Введение

Численное моделирование широко применяется при проведении исследований во многих областях физики плазмы. Одной из таких областей является взаимодействие лазерного излучения с плазмой. Отметим, что при этом, как правило, для моделирования поведения плазмы используется численный метод *частица в ячейке* [1].

Для указанных задач трудно получить априорные оценки характерных пространственных масштабов изменения решения, и поэтому сложно заранее сделать обоснованный выбор пространственных шагов, требуемых при их расчете. Важность вопроса о выборе счетных параметров при численном моделировании взаимодействия лазерного излучения с плазмой подтверждается тем, что в каждой публикации по данной теме обычно приводятся сведения о пространственных шагах использованных сеток и, зачастую, о числе модельных частиц в ячейке (см., например, [2–4]).

В данной работе сформулирована и решена аналитически модельная задача о взаимодействии лазерного излучения с плоским слоем пространственно-однородной электронной плазмы. При ее формулировке сделан ряд предположений, позволяющих перейти от кинетического уравнения Власова для электронной плазмы к простой гидродинамической модели.

Полученное аналитическое решение может оказаться полезным для тестирования программ, с помощью которых выполняются численные исследования взаимодействия лазерного излучения с плазмой, и для предварительных оценок пространственных шагов при таких исследованиях.

### Уравнения модельной задачи

Напомним, что математическая модель, используемая при численном исследовании взаимодействия лазерного излучения с бесстолкновительной плазмой, как правило, включает в себя релятивистские кинетические уравнения Власова для функций распределения ионов и электронов  $f_\alpha(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$  (индекс  $\alpha$  обозначает сорт частиц) и уравнения Максвелла для напряженностей электромагнитного

поля  $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$  и  $\mathbf{H}(t, \mathbf{r})$ . Здесь  $t$  — время,  $(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  — координаты в фазовом пространстве. В дальнейшем при записи этих уравнений будем использовать декартову систему координат  $(x, y, z)$ .

Сформулируем модельную задачу, последовательно упрощая систему кинетических уравнений и уравнений Максвелла. Прежде всего предположим, что ионные компоненты плазмы на рассматриваемой стадии взаимодействия лазерного излучения с плазмой остаются неподвижными. Тогда останется только кинетическое уравнение Власова для функции распределения электронов, так что индекс  $\alpha$  в дальнейшем будем опускать. Будем также полагать, что все входящие в уравнения величины не зависят от переменных  $y, z$ , а дополнительные условия таковы, что компоненты  $E_z, H_x, H_y$  электромагнитного поля равны нулю. В этом случае получаем типичную пространственно-одномерную математическую модель, которая находит широкое применение при изучении различных задач физики плазмы.

Уравнения этой модели имеют вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_x \frac{\partial f}{\partial x} - (E_x + v_y H_z) \frac{\partial f}{\partial p_x} - (E_y - v_x H_z) \frac{\partial f}{\partial p_y} = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} + j_x = 0; \quad (2)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} + j_y = -\frac{\partial H_z}{\partial x}; \quad \frac{\partial H_z}{\partial t} = -\frac{\partial E_y}{\partial x}. \quad (3)$$

Функция распределения в (1) зависит от переменных  $t, x, p_x, p_y$ . Скорость  $\mathbf{v}$ , кинетическая энергия электронов  $\varepsilon$ , а также их плотность тока  $\mathbf{j}$  и концентрация  $n$  вычисляются по формулам

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}}{\sqrt{1 + p^2}}, \quad \varepsilon = \sqrt{1 + p^2} - 1, \quad \text{где } p^2 = p_x^2 + p_y^2; \quad (4)$$

$$\mathbf{j} = - \int \int dp_x dp_y \mathbf{v} f(t, x, p_x, p_y); \quad n = \int \int dp_x dp_y f(t, x, p_x, p_y). \quad (5)$$

Уравнения пространственно-одномерной математической модели (1)–(5) записаны в специальной системе единиц измерения, связь которой с системой единиц СГС, обычно используемой при записи исходных уравнений, имеет вид ( $[s]$  означает единицу измерения величины  $s$ )

$$[t] = \tau_*; \quad [x] = x_* = c\tau_*; \quad [p] = p_* = m_e c; \quad [f] = \frac{n_*}{p_*^2}; \quad [\varepsilon] = m_e c^2; \quad [E] = [H] = E_* = \frac{m_e c}{e\tau_*}.$$

Здесь  $e, m_e$  — заряд и масса электрона; время  $\tau_*$  равно обратной плазменной частоте  $\omega_p$ ,  $\tau_* = \omega_p^{-1} = (4\pi n_* e^2 / m_e)^{-1/2}$ .

Далее предполагается, что решение уравнений (1)–(3) вычисляется в области  $D = \{x_{\min} \leq x \leq x_{\max}\}$  при следующих дополнительных условиях:

– в начальный момент времени  $t = 0$  электроны холодные, т. е.

$$f(t = 0, x, p_x, p_y) = n_0(x) \delta(p_x) \delta(p_y);$$

– в начальный момент времени все компоненты электромагнитного поля в области  $D$  равны нулю;

– граничные условия для компонент электромагнитного поля заданы в виде

$$x = x_{\min}: E_y + H_z = 0; \quad x = x_{\max}: -E_y + H_z = 2\beta\varphi(t), \quad (6)$$

где  $\beta$  — некоторый параметр, характеризующий интенсивность линейно поляризованного лазерного излучения;

– электроны могут свободно переходить через границы области  $D$ .

При оценке точности результатов численного моделирования взаимодействия лазерного излучения с плазмой полезно использовать уравнение баланса энергии в системе *плазма — электромагнитное поле*. Из уравнений (1)—(3) нетрудно получить следующее уравнение для суммы плотности кинетической энергии  $w_k$  и плотности энергии поля  $w_p$ :

$$\frac{\partial}{\partial t}(w_k + w_p) = -\frac{\partial}{\partial x} \int \int dp_x dp_y \varepsilon v_x f - \frac{\partial}{\partial x} H_z E_y,$$

где  $w_p = (E^2 + H^2)/2$ ;  $w_k = \int \int dp_x dp_y \varepsilon f$ ;  $E^2 = E_x^2 + E_y^2$ ;  $H^2 = H_z^2$ . После интегрирования этого уравнения по области  $D = \{x_{\min} \leq x \leq x_{\max}\}$  и по времени  $t$  получим искомое уравнение баланса энергии:

$$W(t) + W_{k1}(t) + W_{k2}(t) + W_{f1}(t) + W_f^r(t) = W(t=0) + W_f^\beta(t). \quad (7)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$W(t) = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} (w_k + w_p) dx;$$

$$W_{k1}(t) = -\int_0^t dt' \int \int dp_x dp_y \varepsilon v_x f(t', x_{\min}, p_x, p_y); \quad W_{k2}(t) = \int_0^t dt' \int \int dp_x dp_y \varepsilon v_x f(t', x_{\max}, p_x, p_y);$$

$$W_{f1}(t) = \int_0^t dt' E_y^2|_{x=x_{\min}}; \quad W_f^r(t) = \int_0^t dt' P_2^r, \quad P_2^r = (E_y|_{x=x_{\max}} + \beta\varphi)^2; \quad W_f^\beta(t) = \int_0^t dt' P_2^\beta, \quad P_2^\beta = (\beta\varphi)^2.$$

Компоненты вектора Пойнтинга на границах области  $D$  преобразованы с учетом дополнительных условий (6).

Из уравнения (7) следует, что коэффициент отражения  $R(t)$  лазерного излучения от слоя плазмы равен

$$R(t) = \frac{W_f^r(t)}{W_f^\beta(t)}. \quad (8)$$

Сформулированная таким образом одномерная задача (1)—(3), (6) остается достаточно сложной для аналитического исследования. Перейдем от нее к более простой задаче, которую назовем модельной.

Будем считать движение электронов нерелятивистским; тогда в кинетическом уравнении (1) можно полагать, что  $|H_z v_x| \ll |E_y|$ . Дополнительно опустим в этом уравнении (конечно, без особых на то оснований) слагаемое с производной по  $x$  и не будем учитывать влияние на движение электронов компоненты  $F_x = -(E_x + v_y H_z)$  силы Лоренца. Существенным упрощением в модельной задаче является отсутствие движения электронов вдоль оси  $x$ . Это означает, что их концентрация  $n$  остается неизменной по времени, т. е.  $n = n_0(x)$ . Кроме того, для холодной плазмы в качестве следствия упрощенного кинетического уравнения можно получить уравнение для компоненты  $j_y$  плотности тока

$$\frac{\partial j_y}{\partial t} = E_y n. \quad (9)$$

Отметим, что для модельной задачи имеет место уравнение баланса энергии вида (7) с той лишь разницей, что в нем потоки кинетической энергии через границы области  $D$  равны нулю:  $W_{k1}(t) = W_{k2}(t) = 0$ , а плотность энергии поля равна  $w_p = (E_y^2 + H_z^2)/2$ .

### Аналитическое решение уравнений модельной задачи

Аналитическое решение уравнений (3), (9) с условиями (6) получим, полагая, что область  $D$  имеет вид  $D = \{-\infty < x \leq x_{\max}\}$  ( $x_{\max} > 0$ ), а плазма занимает область  $x < 0$ . Перейдем от переменной  $t$

к новой переменной (к *задержанному* времени)  $\tau = x + t - x_{\max}$ ,  $\tau \geq 0$ . Уравнение (9) при этом не изменится (только следует  $t$  заменить на  $\tau$ ), а уравнения (3) примут вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_y}{\partial \tau} + j_y &= -\frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{\partial H_z}{\partial \tau}; \\ \frac{\partial H_z}{\partial \tau} &= -\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_y}{\partial \tau}. \end{aligned} \quad (10)$$

Введем в рассмотрение инварианты Римана  $F = H_z - E_y$ ;  $G = H_z + E_y$ . Из системы (10) для них получим

$$\frac{\partial F}{\partial x} + j_y = 0; \quad 2\frac{\partial G}{\partial \tau} + \frac{\partial G}{\partial x} + j_y = 0. \quad (11)$$

Согласно (6) дополнительные условия для функций  $F$ ,  $G$  имеют вид

$$F(\tau, x = x_{\max}) = 2\beta\varphi(\tau); \quad G(\tau, x = -\infty) = 0. \quad (12)$$

Отметим, что, поскольку при  $0 < x < x_{\max}$   $j_y = 0$ , то из (11), (12) следует, что на этом интервале  $F(\tau, x) = 2\beta\varphi(\tau)$ .

Проще всего аналитическое решение поставленной задачи можно найти, сформулировав предварительно краевую задачу для компоненты  $E_y$ . Дифференцируя первое уравнение в (11) по переменной  $\tau$  и учитывая определение инварианта  $F$  и второе уравнение из (10), получаем следующее уравнение для  $E_y$ :

$$2\frac{\partial^2 E_y}{\partial \tau \partial x} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = n_0 E_y. \quad (13)$$

Дополнительное условие для  $E_y$  при  $x = -\infty$  получается из условия для  $G$  (12) и второго уравнения (10); оно имеет вид  $\frac{\partial E_y}{\partial x} \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow -\infty$ . Дополнительное условие при  $x = x_{\max}$  получается после дифференцирования по  $\tau$  условия (12) для функции  $F$  и учета второго уравнения (10); оно имеет вид

$$2\frac{\partial E_y}{\partial \tau} + \frac{\partial E_y}{\partial x} = -2\beta\frac{d\varphi}{d\tau}.$$

Сформулированная краевая задача будет решена аналитически для случая, когда в области  $x < 0$ , занимаемой плазмой, концентрация электронов постоянна:  $n = n_0 = \text{const}$ .

Используем для ее решения преобразование Лапласа. Положим

$$E(p, x) = \int_0^{\infty} e^{-p\tau} E_y d\tau; \quad g(p) = \beta \int_0^{\infty} e^{-p\tau} \varphi d\tau,$$

где  $p$  — аргумент преобразования Лапласа. Применяя преобразование Лапласа к уравнению (13), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение для  $E$

$$\frac{d^2 E}{dx^2} + 2p\frac{dE}{dx} = n_0 E, \quad (14)$$

которое следует решать при дополнительных краевых условиях

$$\frac{dE}{dx} \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow -\infty; \quad 2pE + \frac{dE}{dx} = -2pg \quad \text{при } x = x_{\max}.$$

При этом на границе  $x = 0$  должны быть непрерывны функция  $E$  и ее производная по  $x$  (это следует из непрерывности на этой границе функций  $E_y$ ,  $H_z$ ).

Нетрудно убедиться, что решение уравнения (14), удовлетворяющее краевым условиям, имеет следующий вид:

$$\text{при } x > 0 \quad E = -g + B_2 e^{-2px}; \quad \text{при } x < 0 \quad E = A_2 e^{\lambda_2 x}, \quad \lambda_2 = \sqrt{p^2 + n_0} - p. \quad (15)$$

Постоянные  $A_2$  и  $B_2$  определяются из условий непрерывности функции  $E(x)$  и ее производной на границе  $x = 0$ :

$$-g + B_2 = A_2; \quad -2pB_2 = \lambda_2 A_2. \quad (16)$$

С учетом формул (15) и соотношений (16) искомое решение уравнения (14) может быть представлено в следующей форме:

$$\text{при } x > 0 \quad E = g \left( \frac{\sqrt{p^2 + n_0} - p}{\sqrt{p^2 + n_0} + p} e^{-2px} - 1 \right); \quad \text{при } x < 0 \quad E = -2g \frac{p}{\sqrt{p^2 + n_0} + p} e^{(\sqrt{p^2 + n_0} - p)x}. \quad (17)$$

Поскольку согласно второму уравнению в системе (10) образ по Лапласу  $H$  для компоненты  $H_z$  связан с  $E$  соотношением  $H = -E - p^{-1} \frac{dE}{dx}$ , то для  $H$  находим

$$\text{при } x > 0 \quad H = g \left( \frac{\sqrt{p^2 + n_0} - p}{\sqrt{p^2 + n_0} + p} e^{-2px} + 1 \right); \quad \text{при } x < 0 \quad H = 2g \frac{\sqrt{p^2 + n_0}}{\sqrt{p^2 + n_0} + p} e^{(\sqrt{p^2 + n_0} - p)x}. \quad (18)$$

Сначала, исходя из формул (17), (18), получим временное представление решения в области  $x > 0$ . Отметим, что при  $x = 0$

$$E = e(p) = -2g \frac{p}{\sqrt{p^2 + n_0} + p}. \quad (19)$$

С учетом этого выражения формулу (17) для  $E$  при  $x > 0$  можно записать в виде

$$E = -g(p) + g(p) e^{-2px} + e(p) e^{-2px}.$$

Отметим, что прообраз  $\psi(\tau)$  для функции  $e(p)$  можно представить в виде [5]

$$\psi(\tau) = -2\beta \int_0^\tau \frac{d\varphi(t')}{dt'} \frac{J_1(\sqrt{n_0}(\tau - t'))}{\sqrt{n_0}(\tau - t')} dt', \quad (20)$$

где  $J_1(x)$  — функция Бесселя первого рода первого порядка. Следовательно, временное представление для  $E_y$  при  $x > 0$  можно записать следующим образом:

$$E_y(\tau, x) = -\beta\varphi(\tau) + \left( \beta\varphi(\tau - 2x) + \psi(\tau - 2x) \right), \quad (21)$$

где слагаемые в правой части отличны от нуля только при положительных значениях аргументов.

Временное представление для  $H_z$  при  $x > 0$  легко найти из соотношения  $H_z = F + E_y = 2\beta\varphi(\tau) + E_y$ :

$$H_z(\tau, x) = \beta\varphi(\tau) + \left( \beta\varphi(\tau - 2x) + \psi(\tau - 2x) \right). \quad (22)$$

Формулы (20)—(22) дают при  $x > 0$  аналитическое решение модельной задачи с плотностью тока (9). Отметим, что слагаемые в скобках в (21), (22) соответствуют излучению, отраженному от плазмы.

Для аналитического решения (21), как и следовало ожидать,

$$P_2^r(t) = \left( \beta\varphi(t - 2x_{\max}) + \psi(t - 2x_{\max}) \right)^2,$$

причем  $P_2^r(t) = 0$  при  $t < 2x_{\max}$ .

Теперь, снова исходя из формул (17), (18), получим временное представление решения в области  $x < 0$ . Согласно (17) в этой области  $E(p, x) = e(p) e^{(\sqrt{p^2 + n_0} - p)x}$ . Учитывая вид прообраза для

экспоненты в этой формуле ([5], формула (23)), временное представление  $E_y(\tau, x)$  при  $x < 0$  можно записать следующим образом:

$$E_y(\tau, x) = \psi(\tau) + \sqrt{n_0}x \int_0^\tau \psi(\tau - t') \frac{J_1\left(\sqrt{n_0}\sqrt{(t' - x)^2 - x^2}\right)}{\sqrt{(t' - x)^2 - x^2}} dt'. \quad (23)$$

Выражение для компоненты  $H_z(\tau, x)$  в области  $x < 0$  несложно написать, если учесть, что в ней согласно (18), (19)  $H(p, x) = (2g(p) + e(p))e^{(\sqrt{p^2 + n_0} - p)x}$ . Следовательно,

$$H_z(\tau, x) = 2\beta\varphi(\tau) + \psi(\tau) + \sqrt{n_0}x \int_0^\tau (2\beta\varphi(\tau - t') + \psi(\tau - t')) \frac{J_1\left(\sqrt{n_0}\sqrt{(t' - x)^2 - x^2}\right)}{\sqrt{(t' - x)^2 - x^2}} dt'. \quad (24)$$

Формулы (20)–(24) дают искомое аналитическое решение модельной задачи в области  $D = \{-\infty < x \leq x_{\max}\}$ ; напомним, что в них  $\tau = x + t - x_{\max}$ ,  $\tau \geq 0$ . В этом решении в силу линейности модельной задачи компоненты электромагнитного поля пропорциональны параметру  $\beta$ , характеризующему интенсивность лазерного излучения.

Полученное аналитическое решение имеет довольно сложный вид. Однако современные пакеты прикладных программ дают возможность вычислить значения компонент  $E_y(\tau, x)$ ,  $H_z(\tau, x)$  при требуемых значениях аргументов по приведенным выше формулам без особых усилий со стороны пользователя этих пакетов. Авторами статьи для этих целей использовался пакет Mathcad 14.

*Замечание.* В книге [1] для тестирования программ, в которых реализована пространственно-одномерная математическая модель (1)–(3), предлагается так называемая задача о предвестнике [6]. В ней рассматривается распространение имеющей малую амплитуду электромагнитной волны с частотой  $\omega$  из вакуума в разреженную немагнитную плазму, плазменная частота которой  $\omega_p < \omega$ . В этом случае в плазме можно наблюдать сигналы (предвестники), опережающие основную часть волны. В книге [6] (формула (22.13)) приведено полученное А. Зоммерфельдом приближенное аналитическое решение этой задачи. Отметим, что в книге [1] в аналогичной формуле (7.2) допущена опечатка; чтобы согласовать эту формулу с формулой (22.13) из [6] (и восстановить в ней правильную размерность), выражение (7.2) для  $f(x, t)$  в [1] следует (в обозначениях книги [1]) дополнительно умножить на функцию  $x^{-1/2}$ .

Покажем, что это же решение для предвестника может быть найдено в рамках рассмотренной выше модельной задачи, если при этом сделать те же предположения, что в книге [6].

Пусть зависимость  $\varphi(t)$  в (6) задана в виде  $\varphi(t) = \sin(\omega t)$ . Будем, следуя А. Зоммерфельду, пренебрегать отражением волны от границы плазмы  $x = 0$  и получим решение модельной задачи в области  $x < 0$  для малых моментов времени  $\tau$ , таких что  $\omega\tau \ll 1$ . В этом случае можно считать, что при выполнении обратного преобразования Лапласа основной вклад даст область значений параметра  $p \gg \sqrt{n_0}$ . Тогда при значениях  $x < 0$  вместо исходного выражения для  $E$  (17) можно записать  $E \approx -g \exp(n_0 x / 2p)$ . Учитывая, что прообразом функции  $p^{-1} \exp(-n_0 |x| / 2p)$  служит  $J_0(\sqrt{2n_0 |x|} \tau)$  [5], где  $J_0(x)$  — функция Бесселя первого рода нулевого порядка, получаем для  $E_y(\tau, x)$  при  $x < 0$  следующее выражение:

$$E_y(\tau, x) \approx -\beta \int_0^\tau \frac{d\varphi(t')}{dt'} J_0\left(\sqrt{2n_0 |x|}(\tau - t')\right) dt' = -\beta\omega \int_0^\tau \cos(\omega t') J_0\left(\sqrt{2n_0 |x|}(\tau - t')\right) dt'.$$

Для моментов времени  $\tau$ , таких что  $\omega\tau \ll 1$ , последовательно имеем

$$E_y(\tau, x) \approx -\beta\omega \int_0^\tau J_0\left(\sqrt{2n_0 |x|} t'\right) dt' = -\frac{\beta\omega}{n_0 |x|} \int_0^{\sqrt{2n_0 |x|} \tau} t' J_0(t') dt' = -\frac{\beta\omega}{\sqrt{n_0}} \sqrt{2 |x|^{-1}} \tau J_1\left(\sqrt{2n_0 |x|} \tau\right).$$

Эта формула (с учетом отличий в принятых обозначениях и в выборе направления распространения волны) совпадает с формулой Зоммерфельда (22.13) [6] и с исправленной формулой (7.2) [1].

### Обсуждение результатов численного моделирования

В дальнейшем более подробно рассмотрим важный частный случай, для которого зависимость  $\varphi(t)$  в (6) имеет вид  $\varphi(t) = \sin(\omega t)$ , а частота лазерного излучения  $\omega$  меньше плазменной частоты  $\omega_p$ . При этом будем считать, что единица измерения концентрации электронов равна  $n_* = n_0$ , так что в формулах (20)–(24) надо положить  $n_0 = 1$  и под частотой  $\omega$  понимать отношение частоты лазерного излучения к плазменной частоте. При дальнейшем рассмотрении предполагается, что длительность лазерного импульса  $\tau_i = 10\pi/\omega$ , так что  $\varphi(t) = 0$  при  $\omega t > 10\pi$ .

Для иллюстрации на рис. 1, 2 приведены временные зависимости для компонент  $E_y$  и  $H_z$  соответственно, полученные при разных частотах  $\omega$  лазерного излучения на границе плазмы  $x = 0$ .

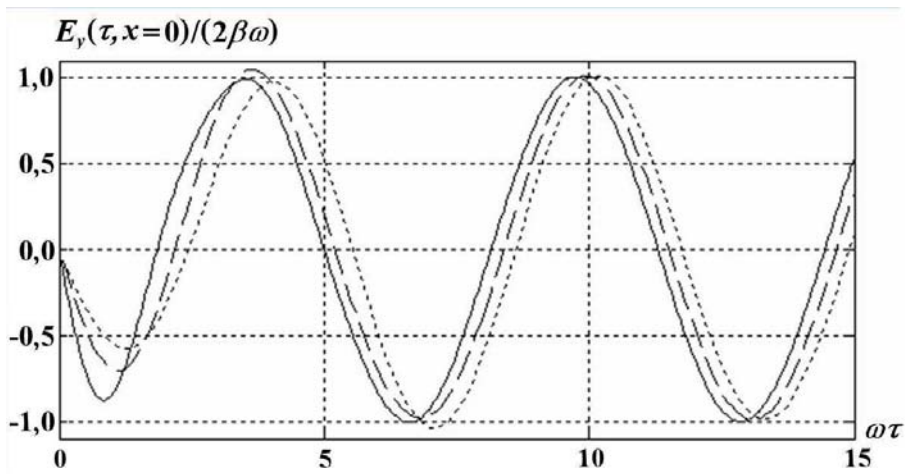


Рис. 1. Временные зависимости компоненты  $E_y$  на границе плазмы для разных частот: — — —  $\omega/\omega_p = 0,3$ ; — — — —  $\omega/\omega_p = 0,5$ ; - - - -  $\omega/\omega_p = 0,7$

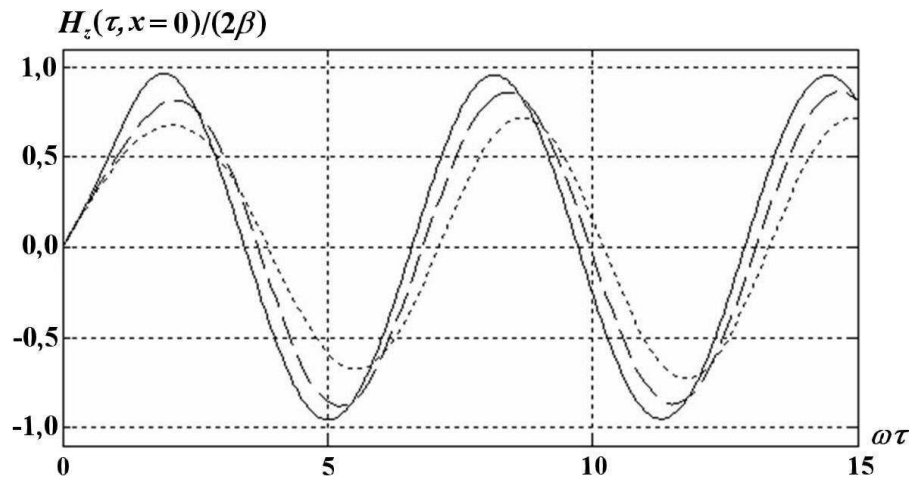


Рис. 2. Временные зависимости компоненты  $H_z$  на границе плазмы для разных частот: — — —  $\omega/\omega_p = 0,3$ ; — — — —  $\omega/\omega_p = 0,5$ ; - - - -  $\omega/\omega_p = 0,7$

Видно, что наиболее изменена по сравнению с остальными форма первой полуволны во временной зависимости для компоненты  $E_y$  (см. рис. 1).

На рис. 3, 4 для разных частот  $\omega$  приведены при фиксированных значениях времени  $t_m$  зависимости этих компонент от переменной  $x$  в области  $x < 0$ , занимаемой плазмой. Значения  $t_m$  — моменты времени, при которых компоненты  $E_y$  и  $H_z$  на границе плазмы  $x = 0$  достигают вторых максимумов (согласно рис. 1, 2 для компоненты  $E_y$   $\omega(t_m - x_{\max}) = 10$ , для компоненты  $H_z$   $\omega(t_m - x_{\max}) = 8,5$ ). Как и следовало ожидать, в области  $x < 0$  происходит сильное затухание этих компонент.

При интерпретации полученных результатов воспользуемся дисперсионным соотношением, связывающим частоту  $\omega$  и волновой вектор  $k$  электромагнитной волны, распространение которой описывается линейной системой уравнений (3), (9). Полагая, что все искомые величины в этой системе имеют пространственно-временную зависимость вида  $\exp(i(-\omega t + kx))$ ,  $i^2 = -1$ , для амплитуд  $E_{y0}$ ,  $H_{z0}$ ,  $j_{y0}$  получим следующую однородную систему уравнений:

$$\omega E_{y0} - j_{y0} - kH_{z0} = 0; \quad kE_{y0} - \omega H_{z0} = 0; \quad nE_{y0} + \omega j_{y0} = 0,$$

где  $n = 1$  (в системе СГС вместо  $n$  будет  $\omega_p^2$ , вместо  $k$  — произведение  $kc$ ). Условие существования нетривиального решения этой системы приводит к хорошо известному дисперсионному соотноше-

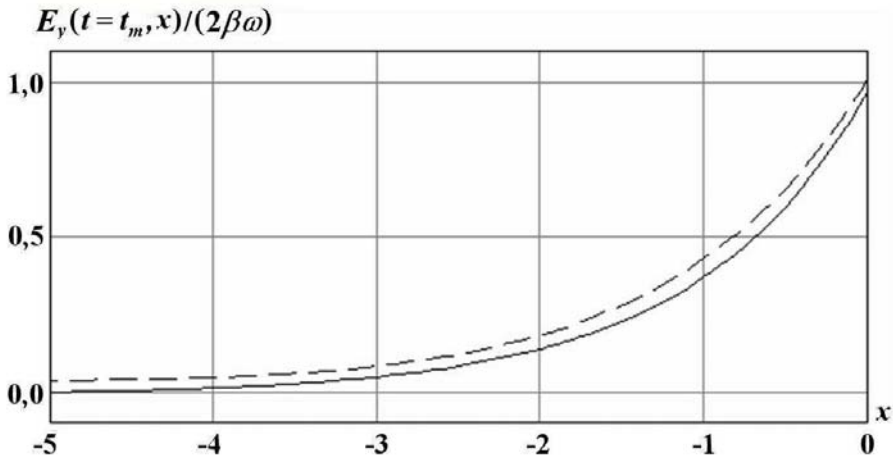


Рис. 3. Зависимость компоненты  $E_y$  от координаты  $x$  для разных частот: — —  $\omega/\omega_p = 0,3$ ; - - - -  $\omega/\omega_p = 0,5$

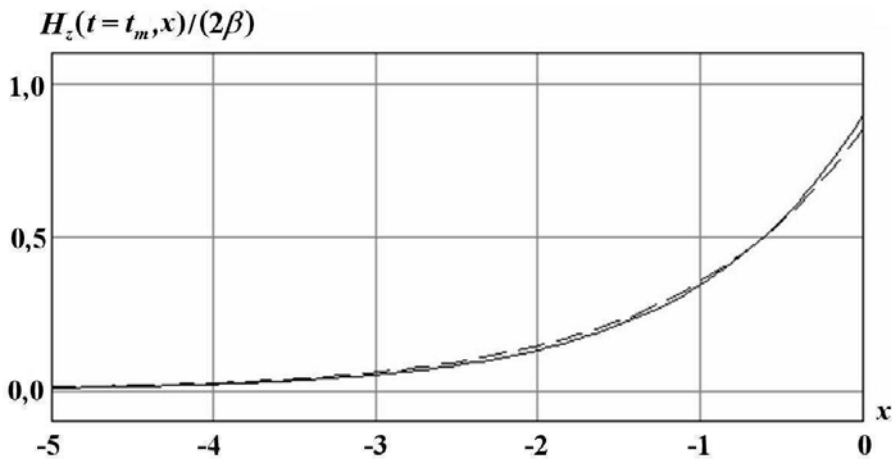


Рис. 4. Зависимость компоненты  $H_z$  от координаты  $x$  для разных частот: — —  $\omega/\omega_p = 0,3$ ; - - - -  $\omega/\omega_p = 0,5$



нию для распространения поперечных волн в холодной плазме в отсутствие внешнего магнитного поля [7]:  $k^2 = \omega^2 - 1$ .

Согласно этому дисперсионному соотношению уменьшение в  $\epsilon$  раз амплитуды волны с частотой  $\omega < 1$  при распространении ее в плазменном слое происходит на характерном масштабе  $x_0 = (1 - \omega^2)^{-1/2}$ . Для частоты  $\omega = 0,3$  этот масштаб равен  $x_0 = 1,05$ , для частоты  $\omega = 0,5$   $x_0 = 1,15$ . Отметим, что амплитуды компонент  $E_y$  и  $H_z$  на рис. 3, 4 уменьшаются в  $\epsilon^2 = 7,4$  раза на интервале  $-2,05 < x < 0$  для частоты  $\omega = 0,3$  и на интервале  $-2,35 < x < 0$  для частоты  $\omega = 0,5$ . Длины этих интервалов хорошо согласуются со значениями  $2x_0$ , полученными выше из дисперсионного соотношения.

В таблице для различных частот  $\omega$  приведены значения коэффициента отражения  $R(\omega)$  лазерного излучения (8) на момент времени  $t = \tau_i = 10\pi/\omega$ ; в рассматриваемом случае этот коэффициент вычисляется по формуле

$$R(\omega) = \frac{2}{\tau_i} \int_0^{\tau_i} \left( \sin \omega t + \frac{\psi(t)}{\beta} \right)^2 dt.$$

Приведенные данные иллюстрируют хорошо известный факт, что при частотах лазерного излучения, много меньших плазменной частоты, происходит почти полное отражение этого излучения от слоя плазмы, а при частотах, превышающих плазменную частоту, отражение становится малым.

При постановке модельной задачи исходная система (1)–(3) уравнений Власова–Максвелла была существенно упрощена. Поэтому возникает естественный вопрос, как согласуется аналитическое решение модельной задачи с решением исходной пространственно-одномерной математической модели (1)–(3). Для ответа на этот вопрос проведем сравнение аналитического решения (20)–(24) модельной задачи с численным решением уравнений исходной одномерной модели (1)–(3).

Алгоритм решения этих уравнений содержит три этапа, типичных для численного моделирования динамики плазмы:

- 1) решение уравнений Максвелла при заданной плотности тока  $\mathbf{j}$ ;
- 2) расчет изменения распределения электронов в фазовом пространстве (решение уравнений движения для модельных частиц);
- 3) вычисление плотности тока по известному распределению электронов.

На каждом этапе применялись численные методы, хорошо зарекомендовавшие себя при моделировании поведения плазмы. Для решения уравнений Максвелла (3) использовалась разностная схема *крест* (см., например, [8]). Траектории модельных частиц определялись из системы уравнений движения, для численного решения которых применялась схема Бориса [1]. При вычислении силы, действующей на частицу, использовалась линейная интерполяция значений соответствующих величин из узлов ячейки разностной сетки, в которой находится частица в данный момент времени. Эта же интерполяция применялась и при определении плотности тока в узлах сетки при заданном распределении модельных частиц в расчетной области [1]. При задании распределений модельных частиц, соответствующих начальным условиям, использовался так называемый *спокойный старт* [9]. При этом каждой модельной частице приписывался вес, равный числу реальных частиц плазмы, находящихся в объеме фазового пространства, занимаемом данной модельной частицей в начальный момент времени. Веса модельных частиц не меняются при их движении.

Далее будет представлено сравнение аналитического решения с численным решением уравнений исходной одномерной модели для задачи, в которой концентрация электронов, частота лазерного излучения и длительность лазерного импульса соответственно равны  $n_0 = 1,5 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$ ,  $\omega = 2,07 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$ ,  $\tau_i = 5(2\pi/\omega)$ , а интенсивность лазерного излучения может иметь значения  $I_1 =$

### Зависимость коэффициента отражения от частоты лазерного излучения

$\omega/\omega_p$	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
$R(\omega/\omega_p)$	0,998	0,987	0,958	0,895	0,532	0,124	0,059	0,035	0,025	0,019

$= 10^{17}$  Вт/см<sup>2</sup>,  $I_2 = 10^{18}$  Вт/см<sup>2</sup>, близкие к релятивистским. В этой задаче безразмерное значение частоты  $\omega = 0,3$ ; значения параметра  $\beta$  равны соответственно  $\beta_1 = 0,074$ ,  $\beta_2 = 0,23$ .

Численное решение этой задачи получено в расчетной области  $D$  с границами  $x_{\min} = -100$ ,  $x_{\max} = 300$ . Шаг по переменной  $x$  выбирался равным  $\Delta x = 0,125$  (в единицах системы СГС  $\Delta x = 0,125c/\omega_p$ ); шаг по времени полагался равным  $\Delta t = 0,5\Delta x$ ; в начальный момент времени в каждую ячейку разностной сетки помещалось равное количество частиц  $nr = 4$  (эти счетные параметры выбраны по результатам расчетов на сходимость).

На рис. 5, 6 для двух указанных выше значений интенсивности лазерного излучения приведены временные зависимости для компонент  $E_y$  и  $H_z$ , вычисленные на границе плазмы  $x = 0$  с использованием аналитического решения модельной задачи и на основе численного решения уравнений исходной одномерной модели (1)–(3) при интенсивностях  $I_1, I_2$ . Видно, что даже при интенсивности лазерного излучения  $I = I_2 = 10^{18}$  Вт/см<sup>2</sup> аналитическое и численное решения для компонент  $E_y$  и  $H_z$  все еще неплохо согласуются между собой. Отметим, что в представленных выше расчетах с интенсивностями  $I_1, I_2$  счетный дисбаланс  $\delta$  в энергии (вычисленный как абсолютное значение от-

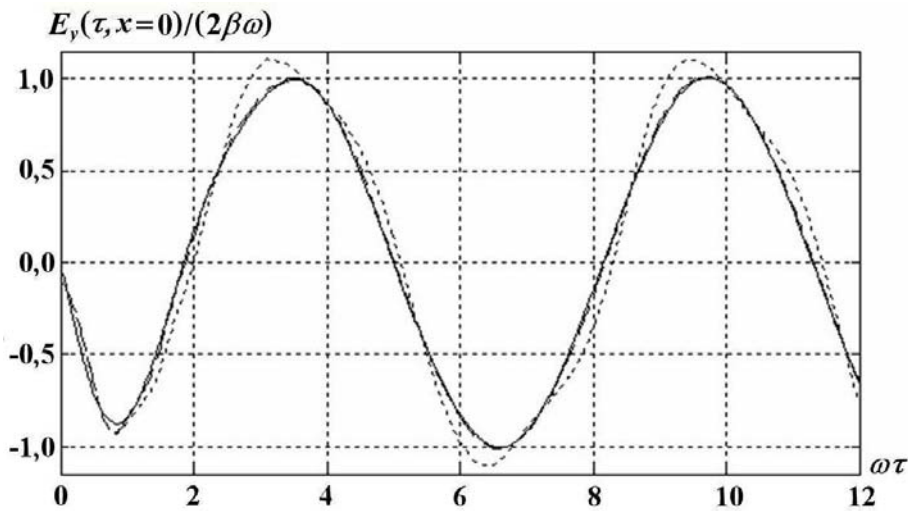


Рис. 5. Временные зависимости компоненты  $E_y$  на границе плазмы: — — аналитическое решение модельной задачи; — — — численное решение уравнений (1)–(3) при интенсивности излучения  $10^{17}$  Вт/см<sup>2</sup>; - - - численное решение уравнений (1)–(3) при интенсивности  $10^{18}$  Вт/см<sup>2</sup>

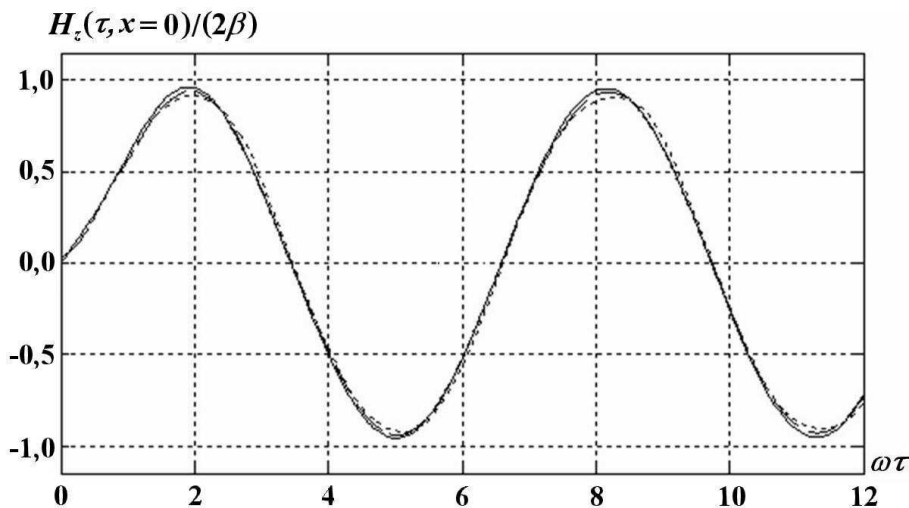


Рис. 6. Временные зависимости компоненты  $H_z$  на границе плазмы: — — аналитическое решение модельной задачи; — — — численное решение уравнений (1)–(3) при интенсивности излучения  $10^{17}$  Вт/см<sup>2</sup>; - - - численное решение уравнений (1)–(3) при интенсивности  $10^{18}$  Вт/см<sup>2</sup>

ношения разности левой и правой частей уравнения (7) к правой его части) не превышал значения  $\delta = 8 \cdot 10^{-5}$ .

### Заключение

Аналитическое решение модельной задачи, полученное в данной работе, прежде всего использовалось авторами для тестирования программ, с помощью которых выполняются численные исследования взаимодействия лазерного излучения с плазмой. При этом, например, в программу, предназначенную для решения уравнений (1)–(3), вносились соответствующие несложные изменения, которые позволяли получать непосредственно численное решение модельной задачи.

Кроме того, аналитическое решение оказалось полезным и при анализе результатов численного моделирования взаимодействия лазерного излучения с плазмой при значениях интенсивности излучения, приближающихся к релятивистским.

Авторы благодарят Б. П. Якутова за постоянную поддержку и полезные обсуждения работы.

### Список литературы

1. Бэдсел Ч., Ленгдон А. Физика плазмы и численное моделирование. М.: Энергоатомиздат, 1989.
2. Буланов С. В., Есиркенов Т. Ж., Каменец Ф. Ф. и др. О создании пучков с высоким качеством в процессе ускорения ионов мощным лазерным излучением // Физика плазмы. 2002. Т. 28, № 12. С. 1059–1076.
3. Andreev A. A., Platonov K. Yu. Nonlinear absorption of a short intense laser pulse in a nonuniform plasma // Physics of Plasma. 2003. Vol. 10, No 1. P. 220–226.
4. Yan X. Q., Lin C., Sheng Z. M. et al. Generating high-current monoenergetic proton beams by a circularly polarized laser pulse in the phase-stable acceleration regime // Phys. Rev. Lett. 2008. Vol. 100. P. 135003(1–4).
5. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Т. 1. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина. М.: Наука, 1969.
6. Зоммерфельд А. Оптика. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1953.
7. Франк-Каменецкий Д. А. Лекции по физике плазмы. М.: Атомиздат, 1964.
8. Калиткин Н. Н. Численные методы. М.: Наука, 1978.
9. Рошаль А. С. Моделирование заряженных пучков. М.: Атомиздат, 1979.

Статья поступила в редакцию 06.08.13.

---