

УДК 519.6:536.71

## СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ КВАЗИДИФФУЗИОННОГО ПОДХОДА И МЕТОДА УСРЕДНЕННЫХ КОСИНУСОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ В РАССЕИВАЮЩЕЙ И ПОГЛОЩАЮЩЕЙ СРЕДЕ

А. С. Исакова, Н. Г. Карлыханов  
(РФЯЦ-ВНИИТФ, г. Снежинск)

На примере расчета задач, имеющих известное численное и (или) аналитическое решение, проведено исследование свойств решений кинетического уравнения в рассеивающей и поглощающей среде, полученных методом квазидиффузии и методом усредненных косинусов. Показано, что метод усредненных косинусов с использованием разностной схемы на основе TVD-подхода дает, особенно в слоистых системах, более точное решение по сравнению с методом квазидиффузии, для которого построена традиционная разностная схема второго порядка точности.

*Ключевые слова:* перенос излучения, рассеивающая и поглощающая среда, квазидиффузия, одномоментные уравнения переноса с усредненными косинусами.

### Введение

Ранее в работе [1] был проведен сравнительный анализ квазидиффузионного подхода и метода усредненных косинусов для решения кинетического уравнения переноса излучения в непоглощающей и нерассеивающей среде. Представляет интерес проведение подобного анализа с учетом поглощения и рассеяния.

В данной работе рассмотрен класс задач, в которых коэффициенты поглощения и рассеяния отличны от нуля. В оптически плотных средах при расчете потока излучения получается разность близких чисел, а это может привести к потере точности при вычислении коэффициентов усредненных косинусов. Но, как показали численные результаты, потери точности при вычислении как коэффициентов усредненных косинусов, так и решения в целом не происходит.

В уравнении квазидиффузии в сферически-симметричной постановке присутствует член  $(3D - 1)/r$ , где  $D$  — коэффициент квазидиффузии,  $r$  — радиус. Известно, что при больших оптических толщинах коэффициент квазидиффузии стремится к значению  $1/3$ . В реальных расчетах коэффициент  $D$  вычисляется с конечной точностью и в общем случае немного отличен от  $1/3$ . Вблизи центра сферы ( $r \rightarrow 0$ ) ошибка при вычислении этого члена может стать большой, что и наблюдается в численных расчетах. Зануление  $(3D - 1)/r$  приводит к исчезновению немонотонности в центре рассчитываемой системы, что косвенно подтверждает потерю точности при вычислении указанного члена. При использовании метода усредненных косинусов данная проблема исчезает.

### Постановка задачи

Коротко рассмотрим суть исследуемых подходов. Для простоты возьмем кинетическое уравнение переноса излучения в сферически-симметричном одномерном случае без учета движения среды:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial (\mu r^2 I)}{r^2 \partial r} + \frac{\partial}{\partial \mu} \left( \frac{1 - \mu^2}{r} I \right) + (\kappa_a + \kappa_s) I = Q + \frac{\kappa_s}{2} \int_{-1}^1 I d\mu. \quad (1)$$

Здесь используются стандартные обозначения:  $I$  — интенсивность излучения;  $\kappa_a, \kappa_s$  — коэффициенты поглощения и рассеяния излучения соответственно;  $\mu$  — косинус угла полета фотона относительно нормали к поверхности сферы;  $c$  — скорость света;  $Q$  — изотропный источник излучения;  $r$  — пространственная координата;  $t$  — время.

Уравнение (1) дополняется начальными условиями, вид которых несущественен для дальнейшего изложения, и граничными условиями двух видов:

- 1)  $I(r_{left}, \mu > 0) = f_{left}(\mu, t)$  на левой границе;  $I(r_{right}, \mu < 0) = f_{right}(\mu, t)$  на правой границе, где  $f_{left}(\mu, t), f_{right}(\mu, t)$  — заданные функции;
- 2) условие симметрии:  $I(r_{left}, \mu) = I(r_{left}, -\mu)$  на левой границе;  $I(r_{right}, \mu) = I(r_{right}, -\mu)$  на правой границе.

Рассмотрим квазидиффузионный подход. Если проинтегрировать уравнение (1) дважды, сначала с весом 1, затем с весом  $\mu$ , то получится следующая система уравнений:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial r^2 S}{r^2 \partial r} + c \kappa_a U = 2Q; \quad (2)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial DU}{\partial r} + \frac{3D-1}{r} U + c^{-1} (\kappa_a + \kappa_s) S = 0. \quad (3)$$

Здесь введены обозначения:  $U = \frac{1}{c} \int_{-1}^1 I d\mu$ ;  $S = \int_{-1}^1 \mu I d\mu$ ;

$$D = \frac{\int_{-1}^1 \mu^2 I d\mu}{\int_{-1}^1 I d\mu}. \quad (4)$$

В реальных расчетах коэффициент квазидиффузии, вычисленный по формуле (4), заменяется близким ему значением по алгоритму, описанному в работе [2]. Данный алгоритм обеспечивает выполнение диффузионного предела на любых сетках по угловой переменной и при использовании любых схем интегрирования по угловой переменной.

Система (2), (3) является системой уравнений квазидиффузии, которая дополняется граничными условиями вида

$$S = \alpha_s U + \beta_s, \quad (5)$$

где

$$\alpha_s = \frac{\int_{-1}^0 \mu I d\mu}{\int_{-1}^1 I d\mu}; \quad \beta_s = \int_0^1 \mu f(\mu, t) d\mu.$$

Условие (5) задается как на левой, так и на правой границе.

Уравнения (2), (3) на равномерной сетке по пространству и с использованием двухслойной схемы по времени аппроксимируются следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{U_{i+1/2}^{n+1} - U_{i+1/2}^n}{\tau} + \frac{r_{i+1}^2 S_{i+1}^{n+1} - r_i^2 S_i^{n+1}}{h_{i+1/2}} + c \kappa_{a,i+1/2} U_{i+1/2}^{n+1} = 2Q_{i+1/2}; \\ \frac{1}{c^2} \frac{S_i^{n+1} - S_i^n}{\tau} + \frac{D_{i+1/2} U_{i+1/2}^{n+1} - D_{i-1/2} U_{i-1/2}^{n+1}}{r_{i+1/2} - r_{i-1/2}} + \frac{3D_i - 1}{r_i} \frac{U_{i+1/2}^{n+1} + U_{i-1/2}^{n+1}}{2} + \\ + c^{-1} (\kappa_{a,i} + \kappa_{s,i}) S_i^{n+1} = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $h_{i+1/2} = \frac{r_{i+1}^3 - r_i^3}{3}$ ;  $D_i = \frac{D_{i+1/2} + D_{i-1/2}}{2}$ ;  $\kappa_{a,i} = \frac{\kappa_{a,i+1/2} + \kappa_{a,i-1/2}}{2}$ ;  $\kappa_{s,i} = \frac{\kappa_{s,i+1/2} + \kappa_{s,i-1/2}}{2}$ .

Приведем подобные слагаемые в уравнении (6):

$$F_i S_i^{n+1} = -A_i U_{i+1/2}^{n+1} + B_i U_{i-1/2}^{n+1} + C_i.$$

Здесь

$$F_i = \frac{1}{c^2 \tau} + c^{-1} (\kappa_{a,i} + \kappa_{s,i}), \quad F_i > 0;$$

коэффициенты  $A_i, B_i$  имеют следующий вид:

$$A_i = \frac{D_{i+1/2}}{r_{i+1/2} - r_{i-1/2}} + \frac{3D_i - 1}{2r_i}; \quad B_i = \frac{D_{i-1/2}}{r_{i+1/2} - r_{i-1/2}} - \frac{3D_i - 1}{2r_i}.$$

Легко заметить, что коэффициенты  $A_i, B_i$  могут быть знакопеременными из-за члена  $3D_i - 1$ , поскольку  $0 < D_i < 1$ . Отрицательность одного из этих коэффициентов физически означает перетекание излучения от ячейки с меньшей плотностью энергии излучения к ячейке с большей плотностью, что является термодинамически неустойчивым процессом. Это может привести к неустойчивости счета. Чтобы избежать этого, поступаем следующим образом.

Если данные коэффициенты положительны, то оставляем их без изменения.

Если коэффициент  $A_i$  отрицательный, то коэффициенты пересчитываются по формулам

$$A_i = \frac{D_{i+1/2}}{r_{i+1/2} - r_{i-1/2}}; \quad B_i = \frac{D_{i-1/2}}{r_{i+1/2} - r_{i-1/2}} - \frac{3D_i - 1}{2r_i}.$$

Если коэффициент  $B_i$  отрицательный, то коэффициенты пересчитываются по следующим формулам:

$$A_i = \frac{D_{i+1/2}}{r_{i+1/2} - r_{i-1/2}} + \frac{3D_i - 1}{2r_i}; \quad B_i = \frac{D_{i-1/2}}{r_{i+1/2} - r_{i-1/2}}.$$

Данный подход понижает порядок аппроксимации, но обеспечивает устойчивость счета.

Введя обозначение

$$\langle \mu \rangle = \frac{S}{cU},$$

уравнение (2) можно записать в виде

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial r^2 \langle \mu \rangle cU}{r^2 \partial r} + c\kappa_a U = 2Q, \quad (7)$$

где  $\langle \mu \rangle$  — средний косинус направления полета фотонов. Уравнение (7) дополняется граничными условиями:

$U_{left} = \frac{1}{c} \int_0^1 f_{left}(\mu, t) d\mu$  на левой границе, если  $\langle \mu \rangle > 0$ ; если  $\langle \mu \rangle < 0$ , то граничное условие не задается;

$U_{right} = \frac{1}{c} \int_{-1}^0 f_{right}(\mu, t) d\mu$  на правой границе, если  $\langle \mu \rangle < 0$ ; если  $\langle \mu \rangle > 0$ , то граничное условие не задается.

При задании на границах условия симметрии полагаем в граничных точках  $\langle \mu \rangle = 0$ .

Для уравнения (7) метод решения и разностная аппроксимация приведены в работе [3]. В настоящей работе для аппроксимации производной по времени применяется трехслойная разностная схема [4].

### Постановка расчетов

Рассматриваются две методические задачи, имеющие аналитическое решение, и задача из работы [5]. В расчетах использовались равномерные сетки по пространственной и угловой переменным. При вычислении коэффициента квазидиффузии, чтобы обеспечить выполнение свойства диффузионного предела, используется прием, описанный в [2].

**Задача 1.** Рассмотрим задачу в плоской геометрии о распространении излучения в поглощающей, но нерассеивающей среде ( $\kappa_a \neq 0$ ,  $\kappa_s = 0$ ). В начальный момент времени интенсивность излучения во всей системе равна нулю, заданы коэффициент  $\kappa_a$  и изотропный источник излучения  $Q$ .

Дополнительно заданы граничные условия  $f_{left}(\mu, t) = 0$ ;  $f_{right}(\mu, t) = 0$ .

Задача имеет аналитическое решение\* в области  $0 \leq x \leq X$  на момент установления стационарного режима:

$$\begin{aligned}
 U &= -\frac{Q}{\kappa_a} \left\{ -2 + \kappa_a \left[ (x - X) Ei(\kappa_a(X - x)) - x Ei(\kappa_a x) \right] + \exp(\kappa_a(x - X)) + \exp(-\kappa_a x) \right\}; \\
 \langle \mu \rangle &= \frac{1}{2} \frac{Q}{\kappa_a U} \left\{ \kappa_a^2 \left[ (x - X)^2 Ei(\kappa_a(X - x)) - x^2 Ei(\kappa_a x) \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \kappa_a(x - X) \exp(\kappa_a(x - X)) + \exp(\kappa_a(x - X)) + (\kappa_a x - 1) \exp(-\kappa_a x) \right\}; \\
 D &= -\frac{1}{6} \frac{Q}{\kappa_a U} \left\{ \kappa_a^3 \left[ (x - X)^3 Ei(\kappa_a(X - x)) - x^3 Ei(\kappa_a x) \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \kappa_a(x - X) \exp(\kappa_a(x - X)) + \exp(-\kappa_a x) \left[ 2 + \kappa_a x (\kappa_a x - 1) \right] + \right. \\
 &\quad \left. + 2 \exp(\kappa_a(x - X)) + \exp(\kappa_a(x - X)) (x - X)^2 - 4 \right\}.
 \end{aligned}$$

Здесь  $Ei(x) = \int_1^\infty \frac{\exp(-xy)}{y} dy$  — интегральная показательная функция.

Задача рассчитывалась при значениях параметров  $\kappa_a$  и  $Q$ , заданных в табл. 1. Расчеты проводились в области  $0 \leq x < 1$  до момента времени  $ct = 5$  (момент установления стационарного режима). Сетки, выбранные для расчетов, приведены в табл. 2. Шаг по времени  $\tau$  был взят равным  $10^{-2}$ .

Таблица 1

Задача 1. Параметры расчетной системы

$\kappa_a$	$Q$
1	0,5
10	5
100	50

Таблица 2

Задача 1. Расчетные сетки

Номер сетки	Число точек по пространству	Число точек по углу
1	10	5
2	20	9
3	40	17
4	80	33
5	160	65

**Задача 2.** Эта задача заимствована из работы [6]. Рассматривается задача в сферической геометрии о распространении излучения в поглощающей, но нерассеивающей среде ( $\kappa_a \neq 0$ ;  $\kappa_s = 0$ ). В начальный момент времени интенсивность излучения во всей системе равна нулю, заданы коэффициент  $\kappa_a$  и изотропный источник излучения  $Q$ .

Дополнительно заданы граничные условия  $f_{left}(\mu, t) = f_{left}(-\mu, t)$ ;  $f_{right}(\mu, t) = \exp(\kappa_a R) - \exp(\kappa_a R |\mu|)$ , где  $R$  — радиус системы.

\* Аналитическое решение получено авторами.

Задача имеет аналитическое решение в области  $0 \leq r \leq R$  на момент установления стационарного режима:

$$U = \frac{2 \exp(\kappa_a R) \kappa_a r - \exp(\kappa_a r) + \exp(-\kappa_a r)}{\kappa_a r};$$

$$\langle \mu \rangle = \frac{1}{\kappa_a^2 r^2} \frac{\kappa_a r (\exp(\kappa_a r) + \exp(-\kappa_a r)) - \exp(\kappa_a r) + \exp(-\kappa_a r)}{U};$$

$$D = -\frac{1}{3\kappa_a^3 r^3 U} \left[ 3\kappa_a^2 r^2 (\exp(\kappa_a r) - \exp(-\kappa_a r)) - 2\kappa_a^3 r^3 \exp(\kappa_a R) - 6 \exp(\kappa_a r) (\kappa_a r - 1) + 6 \exp(-\kappa_a r) (\kappa_a r + 1) \right].$$

Задача рассчитывалась при значениях параметров, приведенных в табл. 3. Расчеты проводились в области  $0 \leq r < 1$  до момента времени  $ct = 5$  (момент установления стационарного режима). Используемые при расчетах сетки приведены в табл. 4. Шаг по времени  $\tau$  был взят равным  $10^{-2}$ .

Таблица 3

Задача 2. Параметры расчетной системы

$\kappa_a$	$Q$
1	$\exp(R)$
10	$\exp(10R)$
100	$\exp(100R)$

Таблица 4

Задача 2. Расчетные сетки

Номер сетки	Число точек по пространству	Число точек по углу
1	10	5
2	20	9
3	40	17
4	80	33
5	160	65
6	320	129

**Задача 3.** Эта задача заимствована из статьи [5]. Рассматривается задача в сферической геометрии о распространении излучения в поглощающей и в рассеивающей среде ( $\kappa_a \neq 0$ ;  $\kappa_s \neq 0$ ). В начальный момент времени интенсивность излучения во всей системе равна нулю, заданы коэффициенты  $\kappa_a$ ,  $\kappa_s$  и изотропный источник излучения  $Q$ .

Задача дополнялась граничными условиями  $f_{left}(\mu, t) = f_{left}(-\mu, t)$ ;  $f_{right}(\mu, t) = 1$ .

Расчеты проводились в области  $0 \leq r < 13$ , состоящей из семи подобластей, до момента времени  $ct = 5000$  (момент установления стационарного режима). Значения параметров, использованные при расчетах каждой подобласти, заданы в табл. 5, расчетные сетки — в табл. 6. Шаг по времени  $\tau$  выбирался автоматически.

За точное решение приняты численные результаты по данной задаче, любезно предоставленные авторами статьи [5].

Таблица 5

Задача 3. Параметры расчетной системы

Параметр	Подобласть						
	1	2	3	4	5	6	7
$r$	[0,2]	[2,3]	[3,5]	[5,6]	[6,8]	[8,10]	[10,13]
$\kappa_{tot}$	50	5	0,001	70	0,001	50	0,001
$\kappa_a$	50	5	0	60	0,001	50	0
$\kappa_s$	0	0	0,001	10	0	0	0,001
$Q$	25	0	0	25	0	0	0

Таблица 6

Задача 3. Расчетные сетки

Номер сетки	Число точек по пространству	Число точек по углу
1	60	9
2	120	17
3	240	33
4	480	65
5	960	129

Все задачи на каждом временном шаге рассчитывались в два этапа.

На первом этапе рассчитывалось уравнение переноса (1) по трехслойной схеме второго порядка аппроксимации по времени и по схеме TVD как по пространству, так и по угловой переменной с ограничителем Чакравати—Ошера [7].

На втором этапе выполнялся один из следующих расчетов:

- уравнения с усредненными косинусами по трехслойной схеме второго порядка аппроксимации по времени и по схеме TVD по пространству с ограничителем Чакравати—Ошера (расчет SMU);
- уравнений квазидиффузии по трехслойной схеме второго порядка аппроксимации по времени и по пространству (расчет KD);
- комбинации уравнений для усредненных косинусов и квазидиффузии по схеме второго порядка аппроксимации по времени и по пространству (расчет SMU+KD).

В качестве критерия точности выбрано отклонение численного решения от точного в норме  $L_2$ , рассчитанное по следующей формуле:

$$\Delta R_{\|L_2\|} = \frac{\sqrt{\int_{r_l}^{r_r} (R_a - R_c)^2 dr}}{\int_{r_l}^{r_r} |R_a| dr} \cdot 100 \%,$$

где  $R_a$  — точное решение,  $R_c$  — численное решение;  $r_l$ ,  $r_r$  — координаты границ рассчитываемой системы.

### Исследование точности вычисления коэффициентов усредненных косинусов и коэффициентов квазидиффузии на модельных задачах

На рис. 1–6 (см. также цветную вкладку) представлены профили коэффициентов квазидиффузии и усредненных косинусов для задач 1 и 2.

Из профилей коэффициентов квазидиффузии видно, что они с достаточной точностью описывают аналитическое решение, хотя для обеих задач при  $\kappa_a = 1$  (см. рис. 1 а, 4 а) коэффициент квазидиффузии немного отклонился от точного решения.

Коэффициенты усредненных косинусов не претерпевают разрывов и, как видно из рисунков, хорошо описывают аналитическое решение.

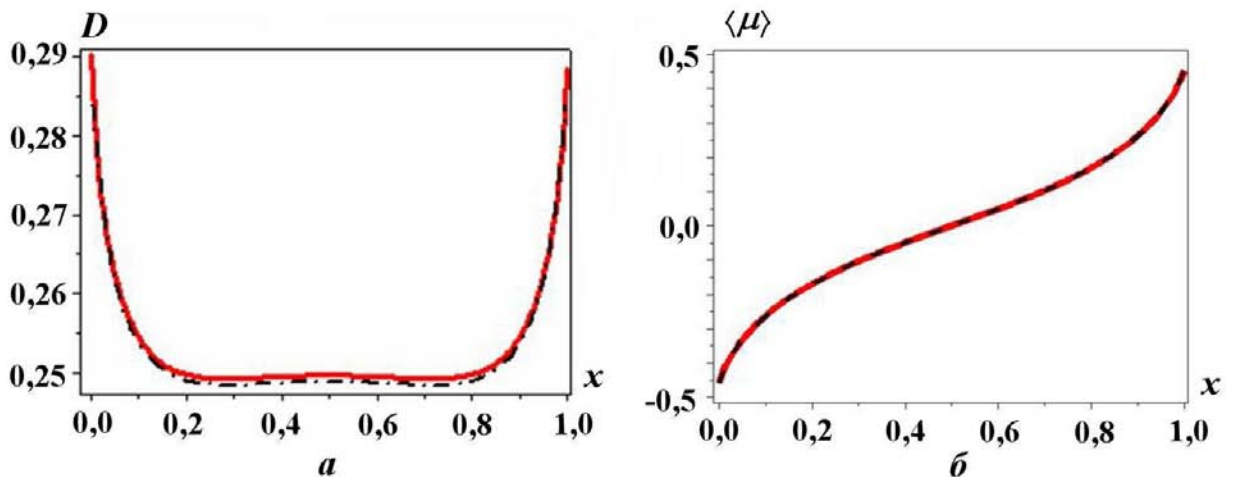


Рис. 1. Задача 1. Профили коэффициентов квазидиффузии (а) и усредненных косинусов (б) на момент установления стационарного режима, полученные на сетке 5;  $\kappa_a = 1$ ;  $Q = 0,5$ : — — — аналитическое решение; - - - - SMU; - · - · - KD

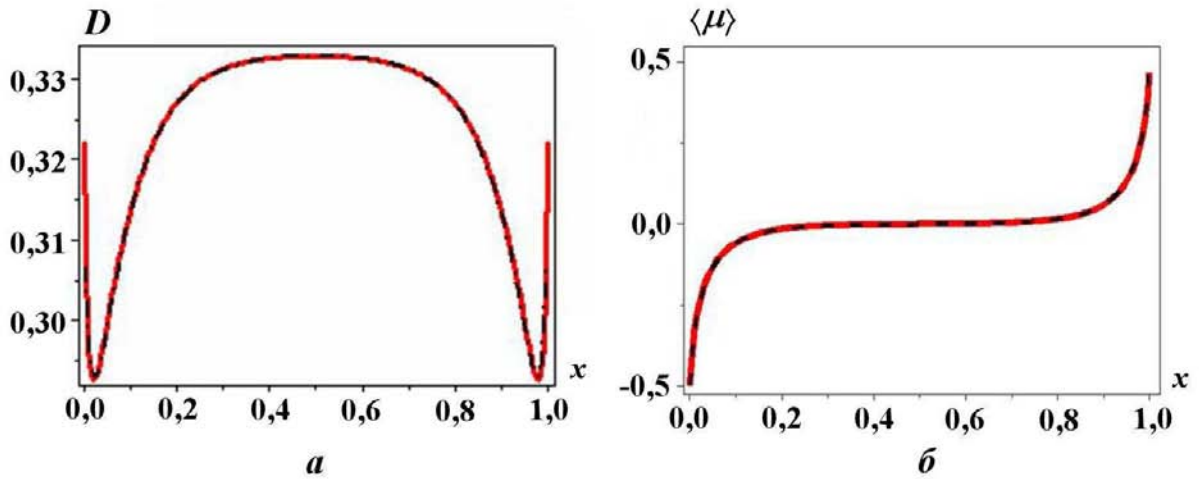


Рис. 2. Задача 1. Профили коэффициентов квазидиффузии ( $a$ ) и усредненных косинусов ( $b$ ) на момент установления стационарного режима, полученные на сетке 5;  $\kappa_a = 10$ ;  $Q = 5$ : — — — — аналитическое решение; - - - - SMU; - · - · - KD

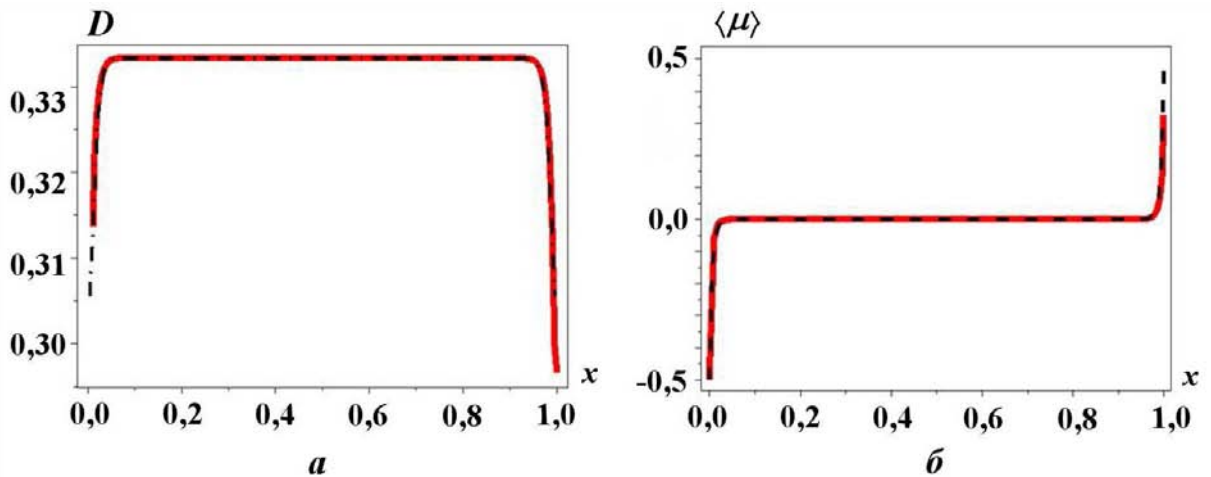


Рис. 3. Задача 1. Профили коэффициентов квазидиффузии ( $a$ ) и усредненных косинусов ( $b$ ) на момент установления стационарного режима, полученные на сетке 5;  $\kappa_a = 100$ ;  $Q = 50$ : — — — — аналитическое решение; - - - - SMU; - · - · - KD

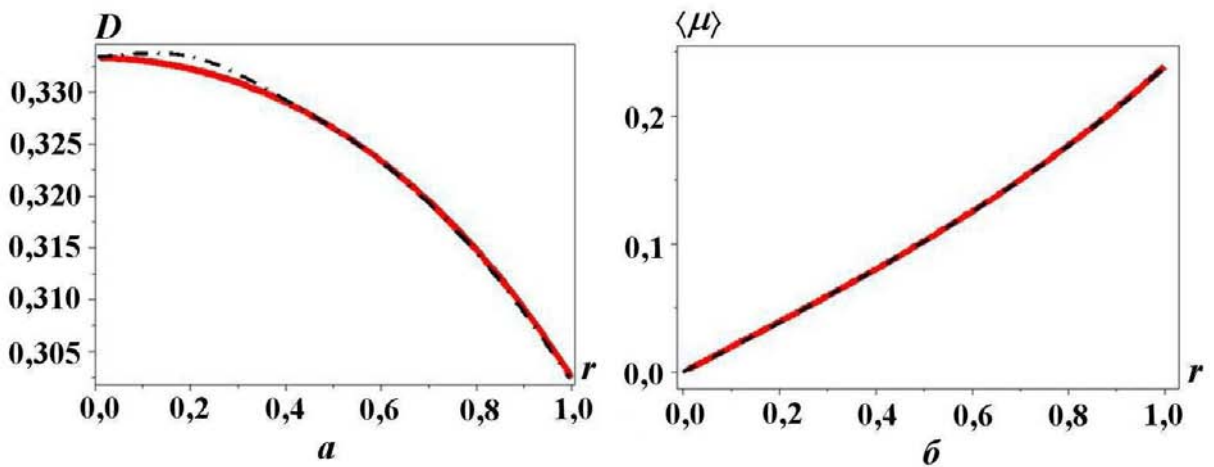


Рис. 4. Задача 2. Профили коэффициентов квазидиффузии ( $a$ ) и усредненных косинусов ( $b$ ) на момент установления стационарного режима, полученные на сетке 5;  $\kappa_a = 1$ : — — — — аналитическое решение; - - - - SMU; - · - · - KD

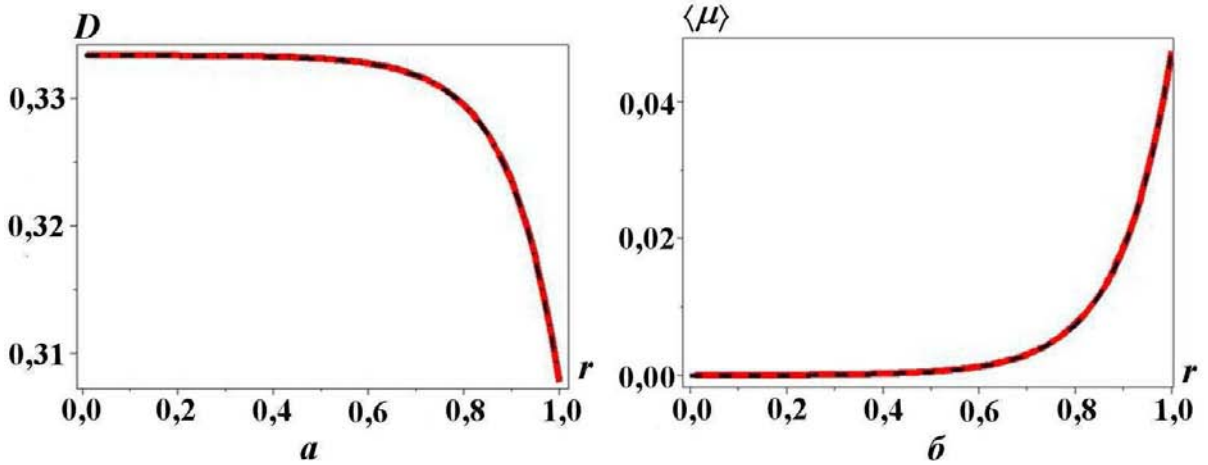


Рис. 5. Задача 2. Профили коэффициентов квазидиффузии ( $a$ ) и усредненных косинусов ( $b$ ) на момент установления стационарного режима, полученные на сетке 5;  $\kappa_a = 10$ : — — — — SMU; -.-.- — KD

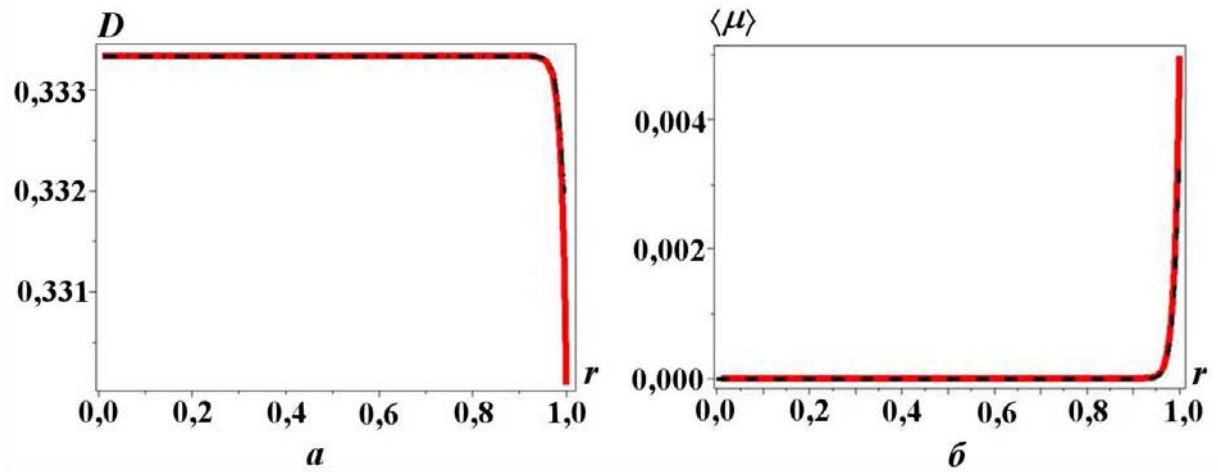


Рис. 6. Задача 2. Профили коэффициентов квазидиффузии ( $a$ ) и усредненных косинусов ( $b$ ) на момент установления стационарного режима, полученные на сетке 5;  $\kappa_a = 100$ : — — — — SMU; -.-.- — KD

### Исследование точности решений, полученных методом усредненных косинусов и методом квазидиффузии, на модельных задачах

На рис. 7 представлены решения задачи 1. Видно, что аналитическое решение хорошо согласуется с решениями, полученными как из уравнения с усредненными косинусами, так и из уравнений квазидиффузии.

Из табл. 7 и графиков сходимости (рис. 8) хорошо видно, что для задачи 1 метод усредненных косинусов дает более точный результат по сравнению с квазидиффузионным методом.

На рис. 9, 10 представлены решения задачи 2, а в табл. 8 — отклонения численных решений от аналитического.

Несмотря на то, что коэффициенты  $D$  и  $\langle \mu \rangle$  для этой задачи при  $\kappa_a = 1$  вычислены с хорошей точностью (см. рис. 4), полученные решения, особенно вблизи центра, отличаются от аналитического. Это относится к решениям, полученным как по методу квазидиффузии, так и по методу усредненных косинусов.

Увеличение оптической толщины рассчитываемой системы не сказывается на точности вычисления коэффициентов  $D$  и  $\langle \mu \rangle$ , в то время как результаты расчетов в целом, выполненные по методу квазидиффузии, начинают проявлять немонотонные свойства. По мнению авторов, это связано с



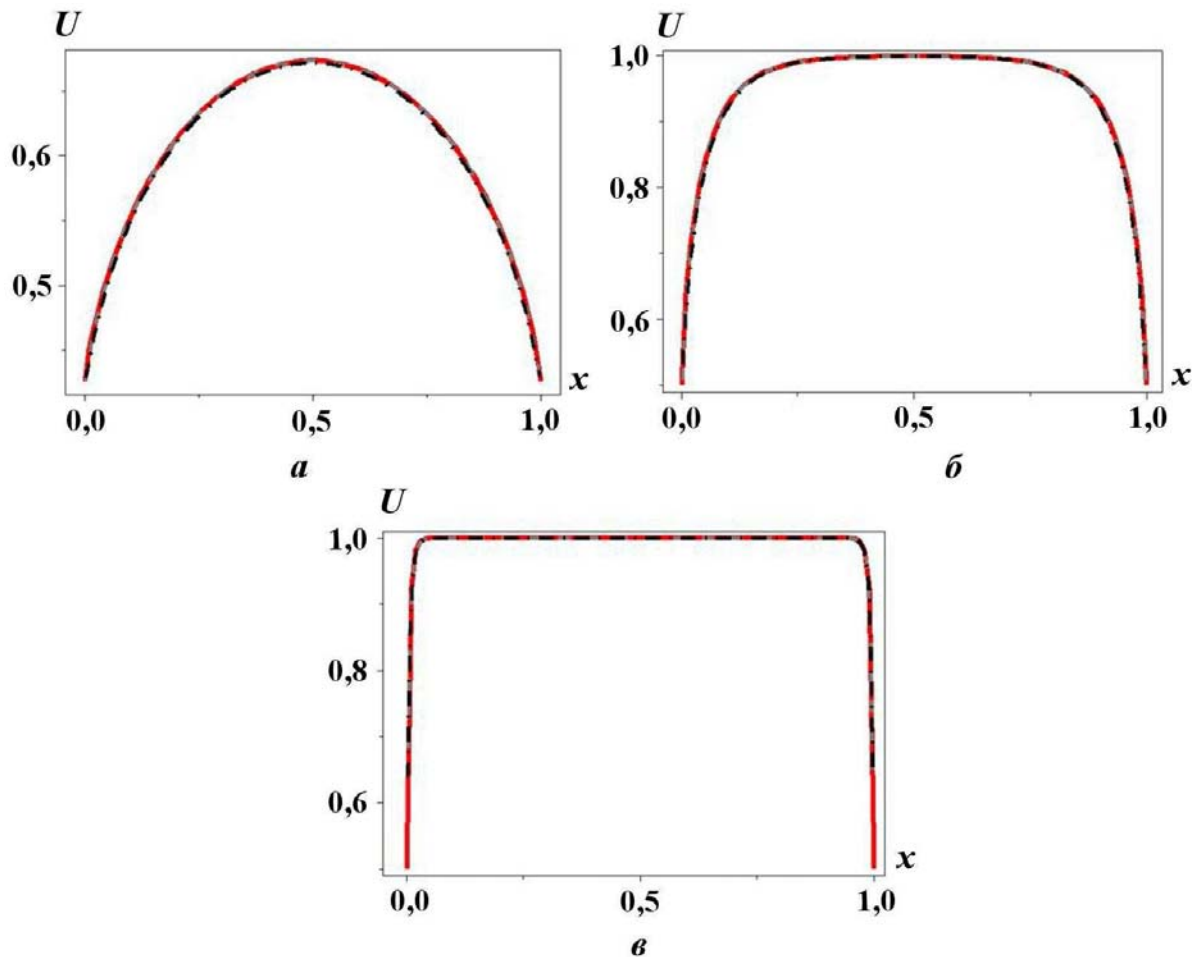


Рис. 7. Задача 1. Профили плотности энергии излучения на момент установления стационарного режима, полученные на сетке 5: *a* –  $\kappa_a = 1$ ;  $Q = 0,5$ ; *б* –  $\kappa_a = 10$ ;  $Q = 5$ ; *в* –  $\kappa_a = 100$ ;  $Q = 50$ ; — — — — аналитическое решение; - - - - SMU; - · - · - KD

Таблица 7

Задача 1. Отклонение (%) численного решения от аналитического в норме  $L_2$

Номер сетки	$\kappa_a = 1; Q = 0,5$		$\kappa_a = 10; Q = 5$		$\kappa_a = 100; Q = 50$	
	KD	SMU	KD	SMU	KD	SMU
1	4,633	4,004	4,018	3,89	—	—
2	3,105	1,894	2,665	2,657	1,796	1,713
3	2,031	0,804	1,741	1,616	1,657	1,54
4	1,331	0,331	1,123	0,75	1,262	1,182
5	0,856	0,151	0,735	0,299	0,507	0,509

теоремой Годунова о невозможности построить схему второго порядка точности для уравнения гиперболического типа, а также обусловлено потерей точности при вычислении выражения  $(3D - 1)/r$ .

Как видно из рис. 11, для оптически умеренных сред метод усредненных косинусов и метод квазидиффузии имеют одинаковую скорость сходимости к точному решению в норме  $L_2$ . С измельчением сетки, когда оптическая толщина ячейки  $\kappa_a \Delta r$  становится меньше единицы, решение, получаемое по методу квазидиффузии, претерпевает сильные осцилляции (см. рис. 10).

Для сетки 6 авторам не удалось получить решение задачи 2 по методу квазидиффузии при  $\kappa_a = 10$  из-за неустойчивого счета вблизи центра.

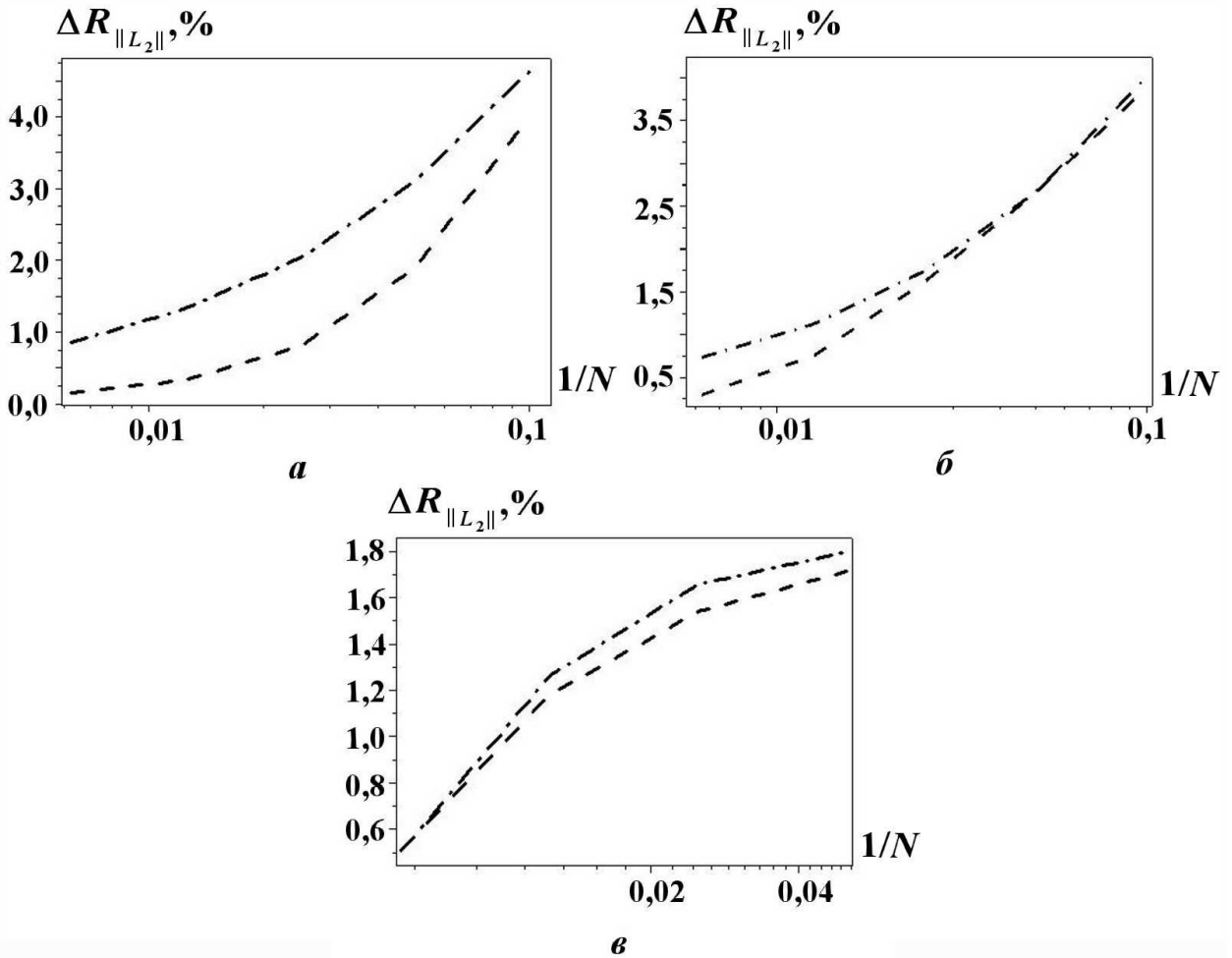


Рис. 8. Задача 1. Скорости сходимости в норме  $L_2$  по пространственной и угловой переменным:  $a - \kappa_a = 1; Q = 0,5$ ;  $b - \kappa_a = 10; Q = 5$ ;  $v - \kappa_a = 100; Q = 50$ ; ---- SMU; -.-.- KD ( $N$  — число расчетных точек)

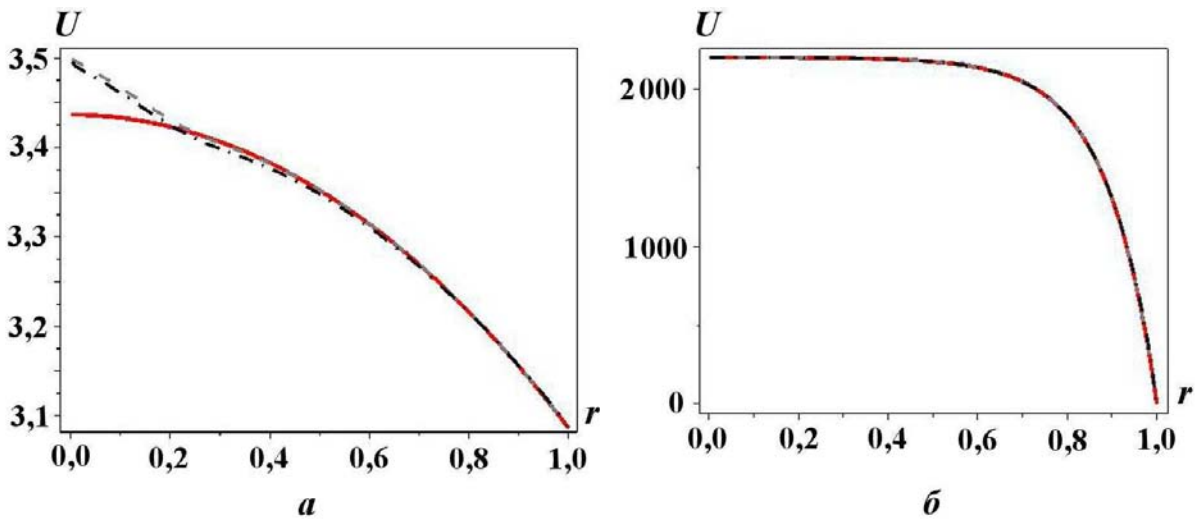


Рис. 9. Задача 2. Профили плотности энергии излучения на момент времени  $ct = 5$  на сетке 5:  $a - \kappa_a = 1$ ;  $b - \kappa_a = 10$ ; — — — — аналитическое решение; ---- SMU; -.-.- KD

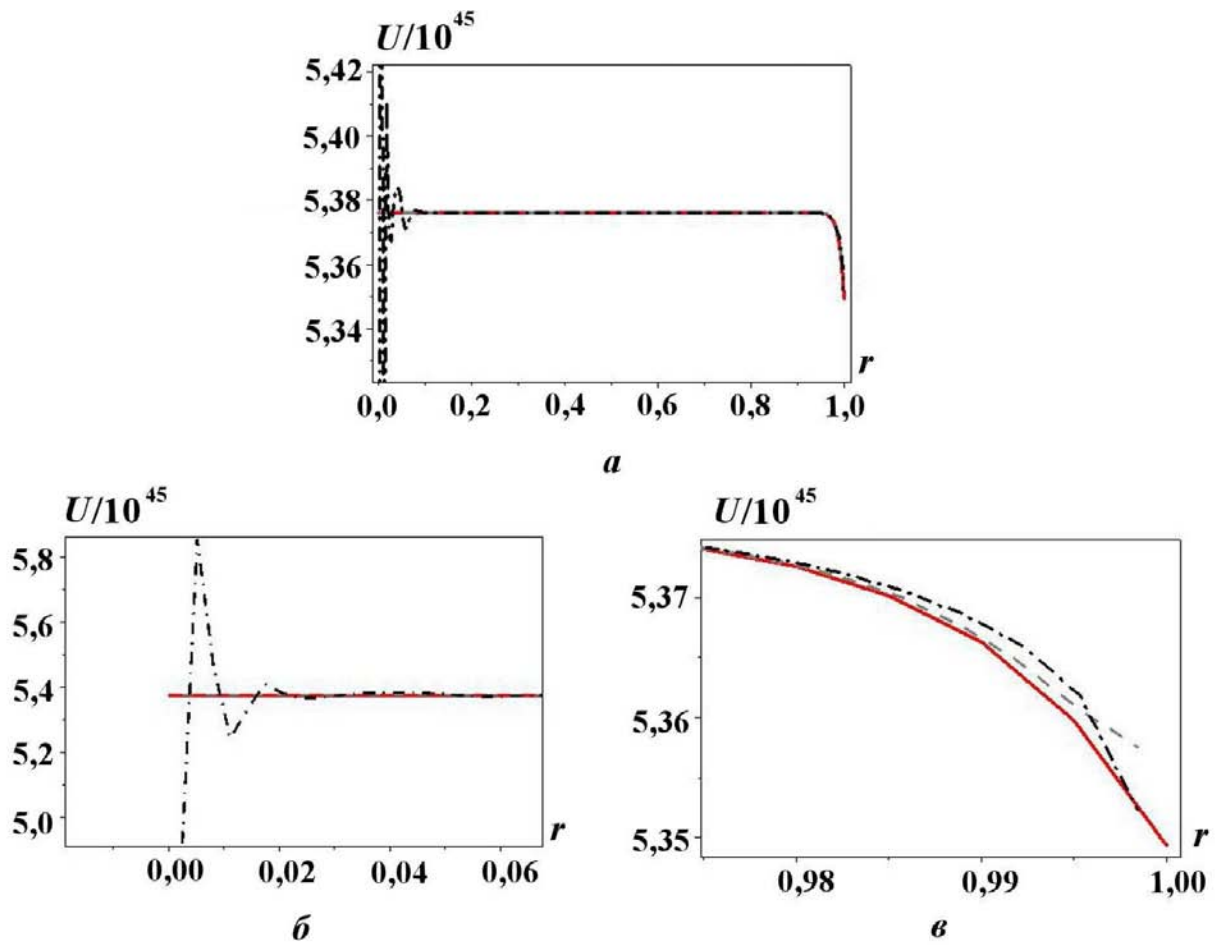


Рис. 10. Задача 2. Профиль плотности энергии излучения (а) и увеличенные фрагменты для левой (б) и правой (в) границ на момент времени  $ct = 5$  на сетке 6;  $\kappa_a = 100$ : — — — — — SMU; — · — · — KD

Таблица 8

Задача 2. Отклонение (%) численного решения от аналитического в норме  $L_2$

Номер сетки	$\kappa_a = 1$		$\kappa_a = 10$		$\kappa_a = 100$	
	KD	SMU	KD	SMU	KD	SMU
1	12,382	13,255	11,413	12,727	—	—
2	5,327	6,131	5,265	5,589	—	—
3	2,368	2,702	2,159	1,723	—	—
4	1,028	1,165	0,879	0,443	3,762	3,592
5	0,442	0,497	0,359	0,0942	1,821	2,077
6	0,189	0,209	—	0,0297	119,209	0,848

В задаче 3 в подобласти 2 (см. табл. 5) коэффициент усредненных косинусов имеет разрыв. Несмотря на это, решение, полученное по методу усредненных косинусов, хорошо согласуется с точным (рис. 12). Для данной ситуации не наблюдается потери точности решения для метода усредненных косинусов, которая проявлялась в оптически прозрачных средах [1]. По мнению авторов, это обусловлено тем, что в подобласти 2 присутствует коэффициент поглощения, отличный от нуля, выступающий в качестве диссипативного члена.

Задача 3 рассчитывалась по методам усредненных косинусов, квазидиффузии и комбинированному методу с учетом алгоритма склейки [1].

Из рис. 13 видно, что скорость сходимости к точному решению существенно выше у метода усредненных косинусов. Алгоритм склейки практически не оказал никакого влияния на точность получаемого решения.

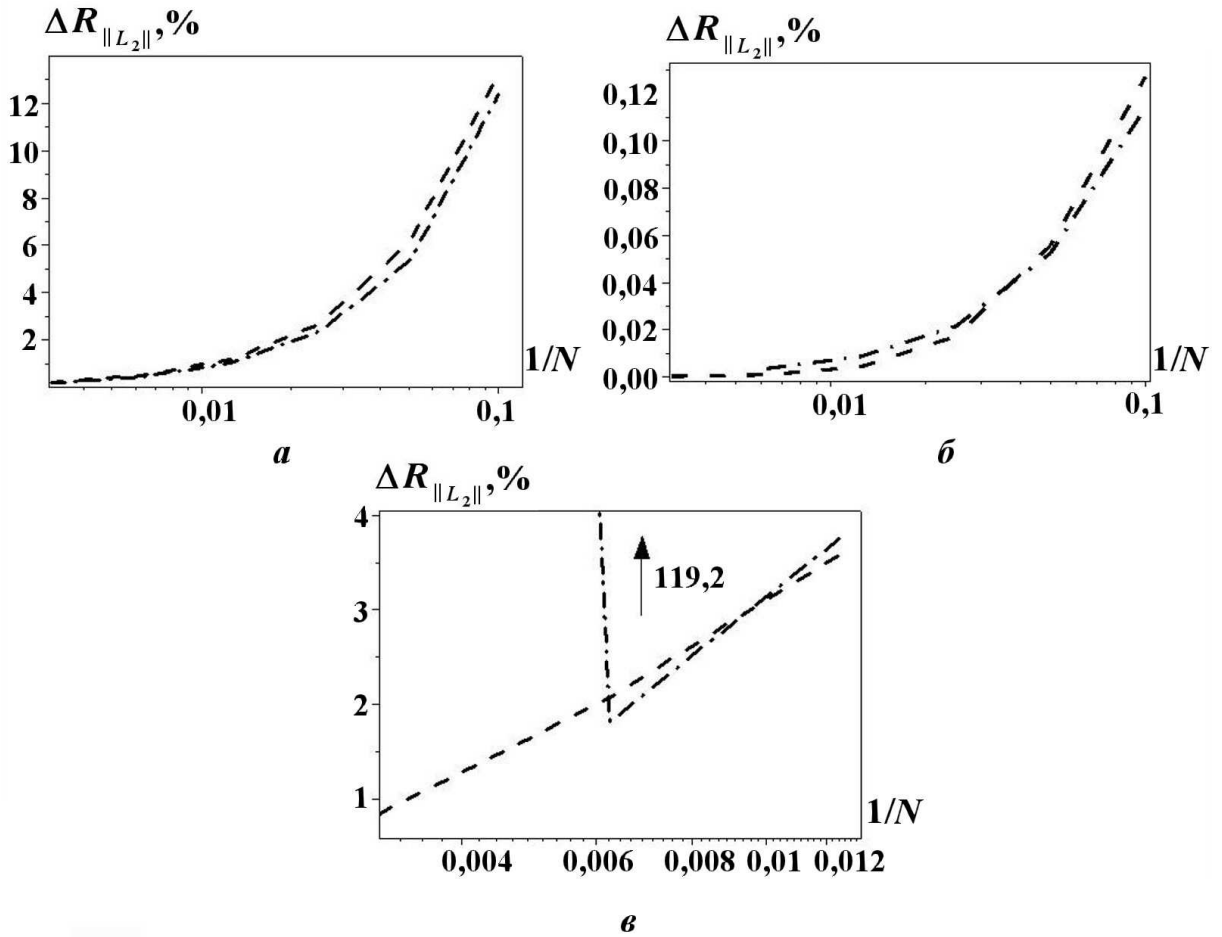


Рис. 11. Задача 2. Скорости сходимости в норме  $L_2$  по пространственной и угловой переменным:  $a - \kappa_a = 1$ ;  $б - \kappa_a = 10$ ;  $в - \kappa_a = 100$ ; - - - - SMU; - · - · - KD ( $N$ — число расчетных точек)

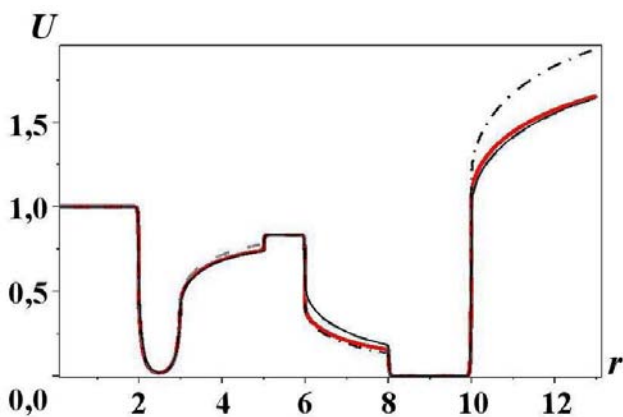


Рис. 12. Задача 3. Профиль плотности энергии излучения на момент времени  $ct = 5000$  на сетке 5: — — — — точное решение; - - - - SMU; - · - · - KD; — — — — SMU+KD

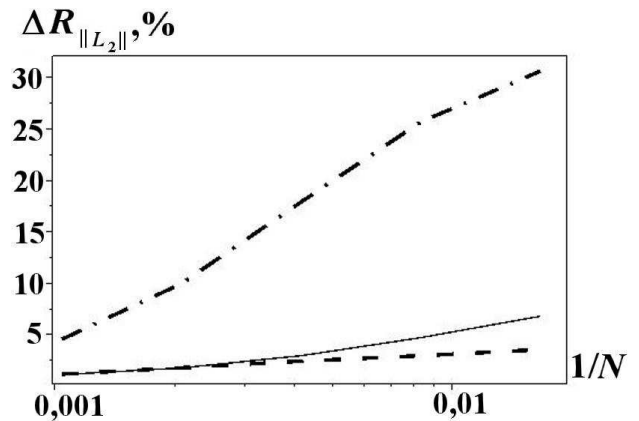


Рис. 13. Задача 3. Скорость сходимости в норме  $L_2$  по пространственной и угловой переменным: - - - - SMU; - · - · - KD; — — — — SMU+KD

## Заключение

На основе проведенных исследований показано, что метод усредненных косинусов имеет определенные преимущества перед методом квазидиффузии в широком диапазоне оптических толщин. Опасение по поводу потери точности решения, получаемого по методу усредненных косинусов в оптически плотных средах, не подтвердилось. Наличие коэффициента поглощения существенно улучшает качество решения в целом, даже в случае разрывных коэффициентов усредненных косинусов.

Проведенная серия численных расчетов показала, что для случая сферической симметрии в оптически плотных средах метод квазидиффузии дает немонотонный результат вблизи центра. Поскольку уравнение с усредненными косинусами не содержит члена  $(3D - 1)/r$ , точность решения в целом по методу усредненных косинусов получается выше точности решения, получаемого по методу квазидиффузии.

Для умеренных оптических толщин методы усредненных косинусов и квазидиффузии дают практически одинаковые результаты.

Авторы считают нужным отметить, что осциллирующее решение, получаемое по методу квазидиффузии, не означает, что данный метод неэффективен. Это связано лишь с тем, что авторы используют немонотонную разностную схему. Построение монотонных разностных схем для уравнения квазидиффузионного типа представляет определенные трудности, в то время как для усредненных косинусов просто построить монотонную схему типа TVD.

## Список литературы

1. Исакова А. С., Карлыханов Н. Г. Сравнительный анализ квазидиффузионного подхода и метода усредненных косинусов для решения кинетического уравнения переноса излучения // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2013. Вып. 3. С. 16–29.
2. Карлыханов Н. Г. Применение метода квазидиффузии для решения задач переноса излучения // Там же. 2010. Вып. 1. С. 32–38.
3. Егорова А. С., Карлыханов Н. Г. Решение кинетического уравнения переноса излучения методом усредненных косинусов // Там же. 2011. Вып. 3. С. 29–38.
4. Зувев А. И. О трехслойной схеме для численного интегрирования уравнений газодинамики и нелинейного уравнения теплопроводности // Численные методы решения задач математической физики. М.: Наука, 1966. С. 230–236.
5. Гаджиев А. Д., Кондаков И. А., Писарев В. Н. и др. Метод дискретных ординат с искусственной диссипацией (DDAD-схема) для численного решения уравнения переноса нейтронов // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2003. Вып. 4. С. 13–24.
6. Четверушкин Б. Н. Построение тестов и некоторые вопросы численного решения уравнения переноса нейтронов // Вычислительные методы в теории переноса / Под ред. акад. Г. И. Марчука. М.: Атомиздат, 1969. С. 189–201.
7. Osher S., Chakravarthy S. High resolution schemes and the entropy condition // SIAM J. Numer. Anal. 1984. Vol. 21 (5). P. 955–984.