

УДК 519.6

## ИССЛЕДОВАНИЕ ТОЧНОСТИ РАЗЛИЧНЫХ МЕТОДОВ УСРЕДНЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ НА СТОРОНЕ ЯЧЕЙКИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПРИ ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Е. В. Авдошина, Ю. А. Бондаренко, А. А. Горбунов, Ю. С. Дмитриева,  
А. О. Наумов, С. Н. Проневич, Н. М. Рудько, Б. П. Тихомиров  
(РФЯЦ-ВНИИЭФ, г. Саров)

Даются аналитические оценки точности различных методов усреднения коэффициента теплопроводности на стороне ячейки интегрирования при численном решении уравнения лучистой теплопроводности. Представлены результаты расчетов двух задач с известным точным решением, подтверждающие сделанные оценки.

*Ключевые слова:* лучистая теплопроводность, коэффициент теплопроводности, тепловое сопротивление, метод потокового баланса, тестовые расчеты.

### Введение

Значительное влияние на точность расчета нелинейных тепловых волн оказывает способ усреднения коэффициента теплопроводности на стороне ячейки интегрирования при численном решении двумерного и трехмерного уравнений теплопроводности. Методам усреднения коэффициента теплопроводности на стороне ячейки посвящен ряд работ, выполненных И. М. Гельфандом, А. А. Самарским, В. Е. Трощиёвым, Н. А. Дмитриевым, Б. П. Тихомировым, Ю. А. Бондаренко, И. Д. Софроновым и др. [1–4]. Для усреднения коэффициента теплопроводности применяются арифметическое, гармоническое, полугармоническое, модифицированное гармоническое и другие усреднения.

В работе исследуется влияние на точность счета теплопроводности способа усреднения коэффициента теплопроводности на границах ячеек. Проблемы, связанные с решением уравнения теплопроводности в *смешанных* ячейках, не рассматриваются.

Статья состоит из двух основных частей. В первой части (разд. 1–3) даются постановка задачи и аналитические оценки точности различных методов усреднения коэффициента теплопроводности для одномерного случая. В разд. 2 излагается понятие теплового сопротивления в дифференциальных и разностных уравнениях (в отличие от [3, 4] рассматриваются разностные схемы, в которых температура отнесена к центрам ячеек) и построением точных решений устанавливается прямое влияние на их точность точности теплового сопротивления. В разд. 3 оцениваются погрешности теплового сопротивления для ряда способов вычисления коэффициента теплопроводности. Во второй части статьи описаны методы усреднения коэффициента теплопроводности для двумерного случая (разд. 4), которые численно исследуются на тестовых задачах (разд. 5).

### 1. Постановка задачи

Рассмотрим уравнение лучистой теплопроводности в виде

$$\rho \frac{\partial E}{\partial t} = \operatorname{div} (\varkappa \operatorname{grad} T), \quad (1)$$

где  $\rho$  — плотность;  $T$  — температура;  $E = E(\rho, T)$  — удельная внутренняя энергия;  $\varkappa = \varkappa(\rho, T) = \frac{4}{3}aclT^3$  — коэффициент теплопроводности;  $l$  — росселандов пробег;  $c$  — скорость света;  $a$  — постоянная Стефана.

В качестве начальных данных задается распределение температур, в качестве краевых условий на внешней границе могут быть заданы температура или поток тепла, зависящие от времени и координат.

Ограничиваемся неявными консервативными разностными схемами, которые построены интегро-интерполяционным методом. Уравнение (1) аппроксимируем в двумерном случае разностным уравнением баланса энергии, которое для ячейки с номером  $I$  имеет вид

$$\frac{\Delta E_I}{\Delta t} = \frac{1}{M_I} \sum_{j=1}^{n_I} \varkappa_j L_j \left( \frac{\partial T}{\partial \vec{n}} \right)_j.$$

Здесь  $\Delta E_I$  — приращение удельной внутренней энергии в ячейке с номером  $I$  за шаг по времени  $\Delta t$ ;  $M_I$  — масса ячейки с номером  $I$ ;  $n_I$  — число ближайших соседей у ячейки с номером  $I$ ;  $\varkappa_j$  — коэффициент теплопроводности, вычисленный на стороне ячейки интегрирования, являющейся границей между ячейками с номерами  $I$  и  $I_j$ , причем ячейка с номером  $I_j$  есть  $j$ -й сосед ячейки с номером  $I$ ;  $L_j$  — длина стороны ячейки (в осесимметричном случае площадь тела вращения), граничной для ячеек с номерами  $I$  и  $I_j$ ;  $\left( \frac{\partial T}{\partial \vec{n}} \right)_j$  — производная по нормали к стороне ячейки интегрирования, граничной для ячеек с номерами  $I$  и  $I_j$ . Температуры, плотности, удельные внутренние энергии определены в центрах ячеек.

На точность численного решения нелинейного уравнения теплопроводности большое влияние оказывает точность аппроксимации (усреднения) коэффициента теплопроводности на стороне ячейки интегрирования, число разработанных и используемых способов которой в настоящее время велико. Ниже приводятся различные методы усреднения коэффициента теплопроводности и оценки их точности.

## 2. Тепловое сопротивление в дифференциальных и разностных уравнениях

**Понятие теплового сопротивления в дифференциальных уравнениях.** В одномерном стационарном случае задача Дирихле для теплопроводности

$$\frac{d}{dx} \left( \varkappa(x) \frac{dT}{dx} \right) = 0; \quad T(x)|_{x=a_1} = T_{\text{лев}}; \quad T(x)|_{x=a_2} = T_{\text{прав}}$$

дает следующую связь между тепловым потоком  $q = -\varkappa(x) \frac{dT}{dx}$  и граничными температурами:

$$q(x) = \frac{T_{\text{лев}} - T_{\text{прав}}}{R(a_1, a_2)} = q_{\text{точн}} = \text{const}, \quad (2)$$

где

$$R(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\varkappa(x)} \quad (3)$$

называется *тепловым сопротивлением* слоя  $[x_1; x_2]$ , или (в случае лучистой теплопроводности) *оптической толщиной* этого слоя. Величину  $R(x_1, x_2)$  можно называть также *тепловым расстоянием* между точками  $x_1$  и  $x_2$ , так как в точном решении стационарной задачи температура линейно зависит от теплового расстояния точки до границы:

$$T(x) = \frac{T_{\text{лев}} R(x, a_2) + T_{\text{прав}} R(a_1, x)}{R(a_1, a_2)}, \quad a_1 \leq x \leq a_2. \quad (4)$$

**Тепловое сопротивление в разностных схемах теплопроводности.** Рассмотрим произвольно неравномерную разностную сетку с обозначениями

$$a_1 = x_{-1} = x_0 < x_1 < \dots < x_{J-1} < x_J = x_{J+1} = a_2; \quad \Delta x_{j+1/2} = x_{j+1} - x_j, \quad j = -1, 0, 1, \dots, J-1, J;$$

$$x_{j+1/2} = \frac{x_j + x_{j+1}}{2}, \quad j = -1, 0, 1, \dots, J-1, J; \quad \Delta x_j = x_{j+1/2} - x_{j-1/2}, \quad j = 0, 1, \dots, J-1, J.$$

Одномерный плоский стационарный аналог неявных разностных схем для теплопроводности (с определением температуры в центрах ячеек и потоков на границах ячеек) запишем в виде системы

$$-\frac{q_{j+1} - q_j}{\Delta x_{j+1/2}} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, J-1; \quad q_j = -\varkappa_j \frac{T_{j+1/2} - T_{j-1/2}}{\Delta x_j}, \quad j = 0, 1, \dots, J;$$

$$T_{-1/2} = T_{\text{лев}}; \quad T_{J+1/2} = T_{\text{прав}}.$$

Решение системы разностных уравнений (5) имеет вид

$$q_j = \tilde{q} \equiv -\frac{T_{\text{прав}} - T_{\text{лев}}}{\sum_{k=0}^J \frac{\Delta x_k}{\varkappa_k}}, \quad j = 0, 1, \dots, J;$$

$$T_{j+1/2} = \frac{T_{\text{лев}} \sum_{k=j+1}^J \frac{\Delta x_k}{\varkappa_k} + T_{\text{прав}} \sum_{k=0}^j \frac{\Delta x_k}{\varkappa_k}}{\sum_{k=0}^J \frac{\Delta x_k}{\varkappa_k}}, \quad j = -1, 0, 1, \dots, J.$$

Из сравнения (6) с (2)–(4) напрашивается следующее определение разностного теплового сопротивления между центрами ячеек:

$$\tilde{R}(x_{j_0-1/2}, x_{j_1+1/2}) = \begin{cases} \sum_{k=j_0}^{j_1} \frac{\Delta x_k}{\varkappa_k}, & -1 \leq j_0 \leq j_1 \leq J; \\ 0, & j_0 > j_1, \end{cases} \quad (7)$$

которое позволяет записать решение (6) в виде, аналогичном (2) и (4):

$$q_j = \tilde{q} \equiv \frac{T_{\text{лев}} - T_{\text{прав}}}{\tilde{R}(x_{0-1/2}, x_{J+1/2})}, \quad j = 0, 1, \dots, J; \quad (8)$$

$$T_{j+1/2} = \frac{T_{\text{лев}} \tilde{R}(x_{j+1/2}, x_{J+1/2}) + T_{\text{прав}} \tilde{R}(x_{0-1/2}, x_{j+1/2})}{\tilde{R}(x_{0-1/2}, x_{J+1/2})}, \quad j = -1, 0, 1, \dots, J. \quad (9)$$

**Тепловое сопротивление в стационарной задаче с распределенными источниками.** Для иллюстрации универсальности роли теплового сопротивления рассмотрим стационарную задачу с распределенными источниками

$$\frac{d}{dx} \left( \varkappa(x) \frac{dT}{dx} \right) = f(x); \quad T(x)|_{x=a_1} = T(x)|_{x=a_2} = 0. \quad (10)$$

Эту задачу можно трактовать как представительную модель нестационарного уравнения теплопроводности  $\frac{d}{dx} \left( \varkappa(x) \frac{dT}{dx} \right) = f(x) \equiv \rho(t, x) \frac{\partial E(T(t, x), x)}{\partial t}$ , где время выполняет роль параметра, от которого зависит источник  $f(x)$ . Для упрощения здесь используются однородные краевые условия Дирихле, в общем же случае надо взять сумму нижеприведенного решения и решения (2), (4).

Общее решение задачи (10) имеет вид

$$T(x) = - \frac{R(x, a_2) \int_{a_1}^x R(a_1, x_0) f(x_0) dx_0 + R(a_1, x) \int_x^{a_2} R(x_0, a_2) f(x_0) dx_0}{R(a_1, a_2)}; \quad (11)$$

$$q(x) = \frac{- \int_{a_1}^x R(a_1, x_0) f(x_0) dx_0 + \int_x^{a_2} R(x_0, a_2) f(x_0) dx_0}{R(a_1, a_2)}. \quad (12)$$

Здесь, как и в (2), (4), коэффициент теплопроводности  $\varkappa(x)$  входит в решение только через тепловые сопротивления (3).

Рассмотрим разностную схему для стационарной теплопроводности с распределенным источником и однородными краевыми условиями Дирихле:

$$\begin{aligned} -\frac{q_{j+1} - q_j}{\Delta x_{j+1/2}} &= f_{j+1/2}, \quad j = 0, 1, \dots, J-1; & q_j &= -\varkappa_j \frac{T_{j+1/2} - T_{j-1/2}}{\Delta x_j}, \quad j = 0, 1, \dots, J; \\ T_{-1/2} &= T_{J+1/2} = 0. \end{aligned}$$

Общее решение этой задачи имеет вид

$$\begin{aligned} T_{j+1/2} &= -\frac{1}{\tilde{R}(x_{-1/2}, x_{J+1/2})} \left( \tilde{R}(x_{j+1/2}, x_{J+1/2}) \sum_{k \leq j-1} \tilde{R}(x_{-1/2}, x_{k+1/2}) f_{k+1/2} \Delta x_{k+1/2} + \right. \\ &\quad \left. + \tilde{R}(x_{-1/2}, x_{j+1/2}) \sum_{k \geq j} \tilde{R}(x_{k+1/2}, x_{J+1/2}) f_{k+1/2} \Delta x_{k+1/2} \right), \quad j = 0, 1, \dots, J-1; \quad (13) \end{aligned}$$

$$q_j = \frac{- \sum_{k \leq j-1} \tilde{R}(x_{-1/2}, x_{k+1/2}) f_{k+1/2} \Delta x_{k+1/2} + \sum_{k \geq j} \tilde{R}(x_{k+1/2}, x_{J+1/2}) f_{k+1/2} \Delta x_{k+1/2}}{\tilde{R}(x_{-1/2}, x_{J+1/2})}, \quad j = 0, 1, \dots, J. \quad (14)$$

Аналогично формулам (11), (12) коэффициент теплопроводности входит в (13), (14) только через разностные тепловые сопротивления (7).

Для краткости несложный, но длинный вывод указанных выше формул для решений дифференциальных и разностных краевых задач здесь не приведен.

**Основной вывод о влиянии точности теплового сопротивления на точность численного решения.** Сравнивая формулы точного решения дифференциальной краевой задачи и точного решения разностной краевой задачи, можно заключить, что отличие этих решений полностью определяется отличием тепловых сопротивлений (7) и (3) для разностной и дифференциальной задач. Этот вывод очевиден при сравнении разностного решения (8), (9) с точным решением (2), (4). Аналогичный вывод получается из сравнения разностного решения (13), (14) с точным решением (11), (12) задачи с распределенным источником, если добавить ряд требований к характеру гладкости источника. На точных формулировках останавливаться не будем ввиду их громоздкости и многовариантности (зависящей от классов гладкости источника и теплового сопротивления).

Соображения о тесной связи точности численного решения с точностью аппроксимации теплового сопротивления справедливы, только когда тепловые сопротивления ограничены, т. е. когда коэффициент теплопроводности строго положителен:  $\varkappa(x) \geq \varkappa_{\min} = \text{const} > 0$ . В случае нелинейной теплопроводности, когда  $\varkappa \sim T^a$ ,  $a \geq \text{const} > 0$ , в решении могут появляться тепловые волны, на которых это требование нарушается. Поэтому при наличии в решении тепловых волн его точность вблизи фронтов этих волн уже не может быть однозначно связана с точностью теплового сопротивления. В то же время на некотором расстоянии от фронтов тепловых волн связь между точностями численного решения и теплового сопротивления все равно имеет место.

### 3. Оценки точности теплового сопротивления для разных способов усреднения

Приведем оценки погрешностей  $\Delta R = \tilde{R} - R$  тепловых сопротивлений, где разностные и точные тепловые сопротивления определены в (7) и (3). Для краткости ограничимся только полными тепловыми сопротивлениями  $R = R(a_1, a_2)$  и  $\tilde{R} = \tilde{R}(a_1, a_2) = \tilde{R}(x_{-1/2}, x_{J+1/2})$ . Будем предполагать, что строго положительные функции  $\varkappa(x)$  (или в квазилинейном случае функции  $\varkappa(x, T)$  с гладкой зависимостью от температуры при  $T > 0$ ) кусочно-гладкие с конечным числом разрывов и все точки разрыва функции  $\varkappa(x)$  (или  $\varkappa(x, T)$ ) приходятся в точности на узлы сетки  $x = x_{k_{\text{разр}}}$  (смешанные ячейки не рассматриваем). Оценки для  $\Delta R$  получаем при  $h = \max_j \{\Delta x_{j+1/2}\} \rightarrow 0$ , когда  $hJ \leq \text{const}$ .

**Оценки точности теплового сопротивления в линейном случае.** Сначала рассмотрим линейный случай, когда  $\varkappa = \varkappa(x)$ . Оценим точность теплового сопротивления для нескольких простых способов вычисления  $\tilde{\varkappa}_j$  по известным  $\varkappa_{j\pm 1/2} = \varkappa(x_{j\pm 1/2})$ .

При получении требуемых оценок для интервалов  $[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$ , в которых функция  $\varkappa(x)$  гладкая, используется представление

$$\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \frac{dx}{\varkappa(x)} = \frac{\Delta x_j}{2} \left( \frac{1}{\varkappa_{j-1/2}} + \frac{1}{\varkappa_{j+1/2}} \right) + O(h^3). \quad (15)$$

Если на узел сетки  $x_k = x_{k_{\text{разр}}}$  приходится разрыв  $\varkappa(x)$ , то имеет место формула

$$\int_{x_{k_{\text{разр}}-1/2}}^{x_{k_{\text{разр}}+1/2}} \frac{dx}{\varkappa(x)} = \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta x_{k_{\text{разр}}-1/2}}{\varkappa_{k_{\text{разр}}-1/2}} + \frac{\Delta x_{k_{\text{разр}}+1/2}}{\varkappa_{k_{\text{разр}}+1/2}} \right) + O(h^2). \quad (16)$$

Для нескольких простых способов усреднения коэффициента теплопроводности ошибки теплового сопротивления, полученные с помощью (15) и (16), приведены в табл. 1. На неравномерных сетках интерполяция дает заметно лучшую точность описания теплового сопротивления, чем аналогичное простое усреднение. Наилучшим по точности описания теплового сопротивления является метод гармонической интерполяции, но он обладает известным недостатком при решении квазилинейных уравнений с наличием тепловых волн (это относится и к методу гармонического усреднения). Например, при  $\varkappa = T^b$  и  $b > 0$ ,  $T_{j+1/2}^n > 0$ ,  $T_{j-1/2}^n = T_{j-3/2}^n = \dots = 0$  в ячейку с номером  $j - 1/2$  тепло никогда не попадет. Говорят, что в этом случае происходит *запирание* тепловой волны.

Таблица 1

#### Ошибки полного теплового сопротивления

Способ усреднения	Формула для $\tilde{\varkappa}_j$	Главная часть ошибки $\Delta R$ теплового сопротивления (вклад $O(h^2)$ опущен)
Арифметическое усреднение	$\frac{1}{2} (\varkappa_{j-1/2} + \varkappa_{j+1/2})$	$\frac{1}{2} \sum_{k=k_{\text{разр}}} \frac{\varkappa_{k+1/2} - \varkappa_{k-1/2}}{\varkappa_{k+1/2} + \varkappa_{k-1/2}} \left( \frac{\Delta x_{k+1/2}}{\varkappa_{k+1/2}} - \frac{\Delta x_{k-1/2}}{\varkappa_{k-1/2}} \right)$
Линейная интерполяция	$\frac{\varkappa_{j-1/2} \Delta x_{j+1/2} + \varkappa_{j+1/2} \Delta x_{j-1/2}}{\Delta x_{j-1/2} + \Delta x_{j+1/2}}$	$\frac{1}{2} \sum_{k=k_{\text{разр}}} \frac{\varkappa_{k+1/2} - \varkappa_{k-1/2}}{\varkappa_{k+1/2} + \varkappa_{k-1/2}} \cdot \frac{\varkappa_{k+1/2}}{\frac{\Delta x_{k+1/2}}{\varkappa_{k+1/2}} + \frac{\Delta x_{k-1/2}}{\varkappa_{k-1/2}}}$
Гармоническое усреднение	$\frac{2\varkappa_{j-1/2}\varkappa_{j+1/2}}{\varkappa_{j-1/2} + \varkappa_{j+1/2}}$	$-\frac{1}{4} \sum_{k=k_{\text{разр}}} (\Delta x_{k+1/2} - \Delta x_{k-1/2}) \left( \frac{1}{\varkappa_{k+1/2}} - \frac{1}{\varkappa_{k-1/2}} \right)$
Гармоническая интерполяция	$\frac{\varkappa_{j-1/2}\varkappa_{j+1/2} (\Delta x_{j-1/2} + \Delta x_{j+1/2})}{\varkappa_{j-1/2} \Delta x_{j+1/2} + \varkappa_{j+1/2} \Delta x_{j-1/2}}$	$O(h^2)$

**О точности теплового сопротивления в квазилинейном случае.** В квазилинейном случае для  $\varkappa(x) = \varkappa(x, T(x))$  большинство методов вычисления коэффициента теплопроводности на границе двух ячеек основано на том или ином способе вычисления вспомогательной температуры  $\tilde{T}_j \approx T(x_j)$  с последующей гармонической интерполяцией. Эти методы можно назвать *методами нелинейной гармонической интерполяции*.

В *методе потокового баланса В. Е. Троциёва* (неопубликованная работа 1960 г.) для нахождения вспомогательной температуры используется предположение равенства разностных потоков на границе двух ячеек:

$$-q_{j-1/4} = \varkappa(x_{j-1/2}, \tilde{T}_j) \frac{\tilde{T}_j - T_{j-1/2}}{\Delta x_{j-1/2}/2} = \varkappa(x_{j+1/2}, \tilde{T}_j) \frac{T_{j+1/2} - \tilde{T}_j}{\Delta x_{j+1/2}/2} = -q_{j+1/4} = -q_j = \tilde{\varkappa}_j \frac{T_{j+1/2} - T_{j-1/2}}{\Delta x_j},$$

откуда следует уравнение

$$\varkappa(x_{j-1/2}, \tilde{T}_j) \frac{\tilde{T}_j - T_{j-1/2}}{\Delta x_{j-1/2}} = \varkappa(x_{j+1/2}, \tilde{T}_j) \frac{T_{j+1/2} - \tilde{T}_j}{\Delta x_{j+1/2}}. \quad (17)$$

Из (17) получаем температуры  $\tilde{T}_j$  и затем с помощью гармонической интерполяции находим разностные коэффициенты теплопроводности

$$\tilde{\varkappa}_j = \frac{\varkappa(x_{j-1/2}, \tilde{T}_j) \varkappa(x_{j+1/2}, \tilde{T}_j) (\Delta x_{j-1/2} + \Delta x_{j+1/2})}{\varkappa(x_{j-1/2}, \tilde{T}_j) \Delta x_{j+1/2} + \varkappa(x_{j+1/2}, \tilde{T}_j) \Delta x_{j-1/2}}.$$

Одно из решений уравнения (17) удовлетворяет условию  $\min\{T_{j\pm 1/2}\} < \tilde{T}_j < \max\{T_{j\pm 1/2}\}$ , которое обеспечивает отсутствие запираания тепловой волны. Но при  $\varkappa(x, T) = f(x)T^{a(x)}$ ,  $a(x) > 0$  нелинейное уравнение (17) допускает *паразитное* решение  $\tilde{T}_j = 0$  с запираанием тепловой волны, что и наблюдалось на практике.

Для устранения этого недостатка Н. И. Юрина и Б. П. Тихомиров в неопубликованных работах предложили *модифицированный метод потокового баланса*, в котором для нахождения вспомогательных температур вместо уравнения (17) решается уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\varkappa(x_{j-1/2}, \tilde{T}_j) + \varkappa(x_{j-1/2}, T_{j-1/2})}{2} \frac{\tilde{T}_j - T_{j-1/2}}{\Delta x_{j-1/2}/2} &= \\ &= \frac{\varkappa(x_{j+1/2}, \tilde{T}_j) + \varkappa(x_{j+1/2}, T_{j+1/2})}{2} \frac{T_{j+1/2} - \tilde{T}_j}{\Delta x_{j+1/2}/2}. \end{aligned} \quad (18)$$

Тогда разностный коэффициент теплопроводности будет равен

$$\begin{aligned} \tilde{\varkappa}_j &= \frac{1}{2} \times \\ &\times \frac{(\varkappa(x_{j-1/2}, \tilde{T}_j) + \varkappa(x_{j-1/2}, T_{j-1/2})) (\varkappa(x_{j+1/2}, \tilde{T}_j) + \varkappa(x_{j+1/2}, T_{j+1/2})) (\Delta x_{j-1/2} + \Delta x_{j+1/2})}{(\varkappa(x_{j-1/2}, \tilde{T}_j) + \varkappa(x_{j-1/2}, T_{j-1/2})) \Delta x_{j+1/2} + (\varkappa(x_{j+1/2}, \tilde{T}_j) + \varkappa(x_{j+1/2}, T_{j+1/2})) \Delta x_{j-1/2}}. \end{aligned} \quad (19)$$

Решение уравнения (18) всегда удовлетворяет условию  $\min\{T_{j\pm 1/2}\} < \tilde{T}_j < \max\{T_{j\pm 1/2}\}$  отсутствия запираания тепловой волны.

В *методе улучшенной гармонической интерполяции* в (19) вместо точного решения уравнения (18) используется решение, полученное после первой итерации:

$$\tilde{T}_j = \frac{\varkappa(x_{j-1/2}, T_{j-1/2}) \Delta x_{j+1/2} T_{j-1/2} + \varkappa(x_{j+1/2}, T_{j+1/2}) \Delta x_{j-1/2} T_{j+1/2}}{\varkappa(x_{j-1/2}, T_{j-1/2}) \Delta x_{j+1/2} + \varkappa(x_{j+1/2}, T_{j+1/2}) \Delta x_{j-1/2}}.$$

Этот метод также позволяет избежать записи тепловой волны.

Выкладки с использованием соотношений (15) и (16) показывают, что все три метода нелинейной гармонической интерполяции для строго положительных  $\kappa(x) = \kappa(x, T(x))$  дают одинаковый порядок точности теплового сопротивления  $\Delta R = O(h^2)$ . По количеству вычислений самым дешевым является метод улучшенной гармонической интерполяции.

#### 4. Методы усреднения коэффициента теплопроводности на стороне ячейки, реализованные в различных методиках

Приведем конкретные расчетные формулы для усреднения коэффициента теплопроводности  $\kappa_j$  на стороне ячейки, которые используются в двумерных методиках [5–9] при счете теплопроводности (в этих методиках уравнение теплопроводности решается относительно температуры).

Для простоты пусть две соседние ячейки имеют номера 1 и 2 (рис. 1), тогда коэффициент теплопроводности на их общей (граничной) стороне будет обозначаться  $\kappa_{12}$ . Номер итерации по нелинейности уравнения состояния и коэффициента теплопроводности опустим.

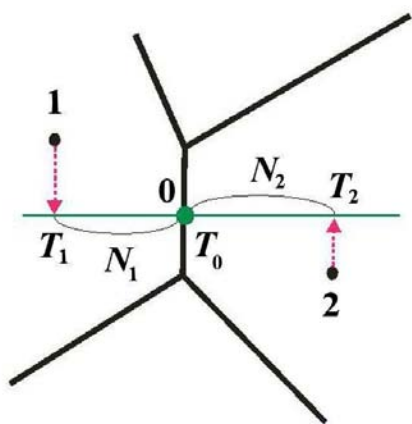


Рис. 1. Расчет коэффициента теплопроводности на границе ячеек

**Улучшенное гармоническое усреднение.** Расчетная формула выглядит следующим образом:

$$\kappa_{12} = \frac{(\kappa_1 + \kappa_{10})(\kappa_2 + \kappa_{20})}{\kappa_1 + \kappa_{10} + \kappa_2 + \kappa_{20}}. \quad (20)$$

Здесь  $\kappa_1 = \kappa(\rho_1, T_1)$ ;  $\kappa_2 = \kappa(\rho_2, T_2)$ ;  $\kappa_{10} = \kappa(\rho_1, T_{12})$ ;  $\kappa_{20} = \kappa(\rho_2, T_{12})$ , где  $T_1, T_2$  — температуры в центрах ячеек 1, 2 (см. рис. 1);  $T_{12} = 0,5(T_1 + T_2)$ . Здесь в отличие от (19) не учитываются расстояния до стороны ячейки и более просто определяется температура  $T_{12}$  на стороне ячейки.

**Арифметическое усреднение с весами (линейная интерполяция).**

$$\kappa_{12} = \frac{N_2}{N_1 + N_2} \kappa_1(T_1, \rho_1) + \left(1 - \frac{N_2}{N_1 + N_2}\right) \kappa_2(T_2, \rho_2). \quad (21)$$

Здесь  $N_1, N_2$  — отрезки срединных нормалей, полученные проектированием центров ячеек 1 и 2 на срединную нормаль к стороне ячейки интегрирования. Возможны иные методы определения весов.

**Два варианта модифицированного гармонического усреднения.** Как уже отмечалось, метод гармонического усреднения предполагает использование температуры на стороне ячейки интегрирования, полученной из условия непрерывности потока тепла на стороне ячейки (метод потокового баланса) для последующего усреднения коэффициента теплопроводности. Две разновидности метода отличаются формой записи односторонних потоков.

*Первый вариант* предполагает для определения температуры на стороне ячейки запись линейного уравнения.

Рассмотрим рис. 1.  $T_0$  — температура на середине стороны ячейки — вычисляется из условия непрерывности потока тепла через сторону ячейки интегрирования, где односторонние потоки записываются в простейшей форме:

$$\kappa_1(T_1, \rho_1) \frac{T_0 - T_1}{N_1} = \kappa_2(T_2, \rho_2) \frac{T_2 - T_0}{N_2}. \quad (22)$$

При этом температуры из центров ячеек 1 и 2 переносятся на срединную нормаль к стороне ячейки интегрирования (см. рис. 1).

Определив температуру на стороне ячейки интегрирования, используем ее для расчета коэффициента теплопроводности  $\kappa_{12}$  на стороне ячейки:

$$\frac{N}{\kappa_{12}} = \frac{2N_1}{\kappa_1(T_1) + \kappa_1(T_0)} + \frac{2N_2}{\kappa_2(T_2) + \kappa_2(T_0)}, \quad (23)$$

где  $N = N_1 + N_2$ .

То есть данный метод представляет собой распространение на двумерный случай метода улучшенной гармонической интерполяции (19). Возможны также иные способы распространения этого метода на двумерный случай.

*Второй вариант* предполагает запись нелинейного уравнения для определения температуры на стороне ячейки. Приведем форму такого уравнения, применяемую в настоящее время:

$$\frac{1}{2} \left( \kappa_1(T_1, \rho_1) + \kappa_1(T_0, \rho_1) \right) \frac{T_0 - T_1}{N_1} = \frac{1}{2} \left( \kappa_2(T_2, \rho_2) + \kappa_2(T_0, \rho_2) \right) \frac{T_2 - T_0}{N_2}. \quad (24)$$

Это уравнение решается одним из итерационных методов. Итерации проводятся до сходимости. Н. И. Юрина (в неопубликованной работе 1969 г.) с целью экономии машинного времени выделяла в коэффициенте теплопроводности главную линейную часть зависимости от температуры (аналогично методу Ньютона) и сводила решение уравнения (24) к решению квадратного уравнения.

Найдя из (24) температуру на стороне ячейки, по формуле (23) определяют коэффициент теплопроводности. Формулы записаны для плоского случая.

Этот метод есть распространение на двумерный случай модифицированного метода потокового баланса (18), (19).

**Комбинированное усреднение 1.** Суть этого метода заключается в том, что для усреднения коэффициента теплопроводности между ячейками, содержащими одно вещество, применяется арифметическое усреднение (21), а для расчета коэффициента теплопроводности на границе раздела сред — первый вариант модифицированного гармонического усреднения (22), (23).

**Комбинированное усреднение 2.** Для усреднения коэффициента теплопроводности между ячейками, содержащими одно вещество, применяется второй вариант модифицированного гармонического усреднения (24), (23), а для расчета коэффициента теплопроводности на границе раздела сред — первый вариант модифицированного гармонического усреднения (22), (23).

На трехмерный случай представленные методы распространяются аналогично.

## 5. Результаты численных исследований

Приведем результаты расчетов двух задач с известным точным решением. Это задача о бегущей тепловой волне и задача о распространении тепла в трехслойной системе под углом к границам веществ. Постановки и точные решения взяты из работ [11, 12]. Численные исследования выполнены по методике, описанной в работах [5, 10]. В этой методике аппроксимация строится по схеме расщепления по направлениям с привлечением метода прогонки. Оценки точности различных методов усреднения коэффициента теплопроводности, полученные в расчетах по другим методикам [6–9], качественно не отличаются от приведенных ниже — метод аппроксимации уравнения теплопроводности не оказывает на них существенного влияния.

Далее принята следующая нумерация методов:

- 1 — улучшенное гармоническое усреднение (20);
- 2 — арифметическое усреднение с весами (21);
- 3 — безытерационный вариант модифицированного гармонического усреднения (22), (23);
- 4 — итерационный вариант модифицированного гармонического усреднения (24), (23);
- 5 — вариант модифицированного гармонического усреднения (24), (23) с безытерационным методом Н. И. Юриной определения вспомогательной температуры на стороне ячейки.



**Задача 1. О бегущей тепловой волне.** Необходимо рассчитать поле температур внутри бруса, заполненного изначально холодным идеальным газом ( $E = T$ ,  $\rho = 1$ ) с коэффициентом теплопроводности  $\varkappa = \varkappa_0 T^\beta$ . Сечение бруса — единичный квадрат. На одной из внешних границ задано граничное условие

$$T(t)|_{y=0} = \left( \frac{\beta c^2}{\varkappa_0} t \right)^{1/\beta}.$$

На трех других границах задано граничное условие *жесткая стенка* (поток тепла равен нулю). Процесс описывается уравнением

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \operatorname{div} (\varkappa \operatorname{grad} T).$$

Задача плоская. Автомодельное решение имеет следующий вид:

$$T(t, y) = \begin{cases} \left[ \frac{\beta c}{\varkappa_0} (ct - y) \right]^{1/\beta}, & y < ct; \\ 0, & y \geq ct. \end{cases}$$

Значения параметров:  $\varkappa_0 = 6$ ;  $\beta = 3$ ;  $c = 4$ . Погрешность вычислялась по формуле

$$\delta_{L_1}(t) = \left\| T^{(\text{числ})}(t) - T^{(\text{аналит})}(t) \right\|_{L_1} = \frac{\sum_{\alpha \in \mathcal{Y}} M_\alpha \left| T_\alpha^{(\text{числ})}(t) - T_\alpha^{(\text{аналит})}(t) \right|}{\sum_{\alpha \in \mathcal{Y}} M_\alpha \left| T_\alpha^{(\text{аналит})}(t) \right|} \cdot 100\%.$$

Расчеты проводились на трех регулярных сетках с равномерным разбиением по каждому из двух направлений: сетка 1 —  $24 \times 24$  (576 ячеек); сетка 2 —  $40 \times 40$  (1600 ячеек); сетка 3 —  $80 \times 80$  (6400 ячеек).

В табл. 2 приведены результаты расчетов. На рис. 2 — графики зависимости погрешности счета от размера ячейки на момент времени  $t = 0,2$ . Наилучшую точность здесь обеспечил итерационный вариант модифицированного гармонического усреднения (24), (23).

Таблица 2

Погрешность расчета задачи 1 на момент времени  $t = 0,2$

Метод	Сетка 1	Сетка 2	Сетка 3
1	1,3170	0,6433	0,2207
2	1,1410	0,5425	0,1713
3	1,3125	0,6417	0,2204
4	0,6151	0,2758	0,0711
5	0,5535	0,2586	0,0555

**Задача 2. О распространении тепловой волны в трехслойной системе под углом к границам веществ.** Рассчитывается процесс прогрева изначально холодной системы, состоящей из трех сильно разноплотных веществ. При этом удельная внутренняя энергия и коэффициент теплопроводности существенно нелинейным образом зависят от температуры.

В начальный момент времени  $t = 0$  трехслойная плоская система, изображенная на рис. 3, заполнена холодными веществами 1, 2, 3 с различными теплофизическими свойствами в областях I, II и III соответственно. В момент времени  $t = 0$  начинается подвод тепла через отрезки границы  $AB$  и  $BC$ , в результате чего возникает тепловая волна, которая распространяется влево и вверх по системе.

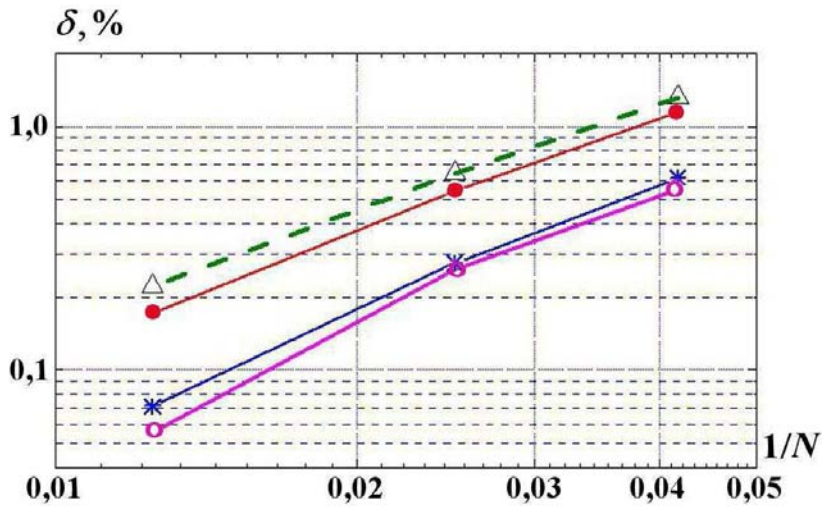


Рис. 2. Относительные погрешности в расчетах задачи 1 на трех сетках,  $t = 0,2$ :  $\triangle$  — метод 1;  $\text{---}\bullet\text{---}$  — метод 2;  $\text{---}\square\text{---}$  — метод 3;  $\text{---}\ast\text{---}$  — метод 4;  $\text{---}\circ\text{---}$  — метод 5

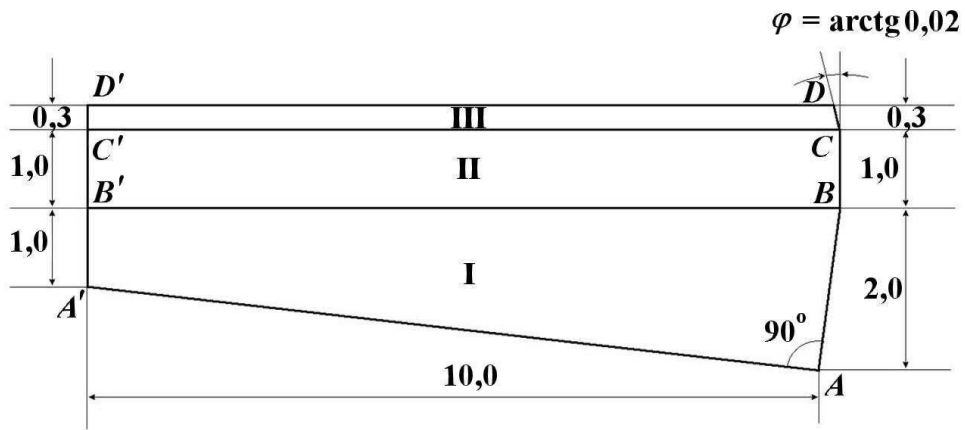


Рис. 3. Геометрия задачи 2

Процесс описывается уравнением

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \operatorname{div} (\kappa \operatorname{grad} T).$$

Задача плоская. Удельная внутренняя энергия и коэффициент теплопроводности веществ нелинейным образом зависят от температуры. Полная постановка задачи приведена в работе [12].

Точное решение (распределение температуры) имеет вид

$$T_i(t, x, y) = \tau_0 \Theta \left( -\frac{a_i x + b_i y - u_i(t - t_i)}{\xi_{0i}} \right), \quad i = 1, 2, 3,$$

где  $i$  — номер вещества;  $\tau_0 = 10^{1/3} = 2,15443469003$ ;  $\Theta(\delta)$  — функция; значения остальных величин приведены в табл. 3. Данное решение описывает тепловую волну, которая распространяется в  $i$ -м веществе со скоростью  $u_i$  в направлении единичного вектора  $(a_i, b_i)$ . Положение фронта тепловой волны в веществах в момент времени  $t > 0$  описывается уравнением

$$a_i x + b_i y = u_i(t - t_i), \quad i = 1, 2, 3.$$

**Параметры точного решения задачи 2**

Параметр	Номер вещества		
	1	2	3
$t_i$	0	-3,98014876084	-501,448992006
$\xi_{0i}$	141,367176507	127,073287136	2,84087696303
$u_i$	10,0	8,98888202170	0,200957324976
$a_i$	-0,995037190210	-0,894427191000	-0,0199960011996
$b_i$	0,0995037190210	0,447213595500	0,999800059980
$\eta_i$	-9,95037190210	-1,99007438042	-0,0199007438042
$\zeta_i$	0,995037190210	0,995037190210	0,995037190210

Поток тепла, в момент времени  $t$  проходящий через точку  $(x, y)$  в веществе с номером  $i$  в направлении единичного вектора  $(n_x, n_y)$ , вычисляется по формуле

$$Q_i(t, x, y) = (\eta_i n_x + \zeta_i n_y) T_i(t, x, y) \left[ C_1 + V_1 \left( T_i(t, x, y) \right)^3 \right].$$

Суммарный поток тепла (точнее, полное (суммарное) количество энергии), прошедший за время  $t$  от момента  $t_0 = 0$  через отрезок прямой, соединяющий точки  $Z_1 = (x_1, y_1)$  и  $Z_2 = (x_2, y_2)$  в одном веществе, определяется формулами

$$W_i(t, Z_1, Z_2) = \frac{4\kappa_{i0}(\tau_0)^7}{7u_i} \left[ a_i(y_1 - y_2) + b_i(x_2 - x_1) \right] \frac{\varkappa(\Theta(\sigma_2)) - \varkappa(\Theta(\sigma_1))}{\sigma_2 - \sigma_1}, \quad i = 1, 2, 3; \quad (25)$$

$$\sigma_j = -\frac{a_i x_j + b_i y_j - u_i(t - t_i)}{\xi_{0i}}, \quad j = 1, 2, \quad i = 1, 2, 3;$$

$$\varkappa(\Theta) = \frac{\Theta^{10}}{10} - \frac{\Theta^7}{7} + \frac{\Theta^4}{4} - \Theta + \frac{1}{6} \ln \frac{(\Theta + 1)^2}{\Theta^2 - \Theta + 1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \frac{\pi}{6} + \operatorname{arctg} \frac{2\Theta - 1}{\sqrt{3}} \right). \quad (26)$$

Функция  $\Theta(\sigma)$  определена формулой

$$\Theta^3 - \ln(1 + \Theta^3) = 3\sigma, \quad \sigma > 0; \quad \Theta = 0, \quad \sigma \leq 0.$$

Если  $\sigma_2 - \sigma_1 \approx 0$ , т. е.  $|\sigma_2 - \sigma_1| \leq \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — малое положительное число (например,  $10^{-7}$ ), то вместо (25) можно использовать приближенную формулу

$$\begin{aligned} W_i(t, Z_1, Z_2) &\approx \frac{4\kappa_{i0}(\tau_0)^7}{7u_i} \left[ a_i(y_1 - y_2) + b_i(x_2 - x_1) \right] \frac{\left( \Theta(\sigma_2) \right)^7 + \left( \Theta(\sigma_1) \right)^7}{2} = \\ &= \frac{4\kappa_{i0}}{7u_i} \left[ a_i(y_1 - y_2) + b_i(x_2 - x_1) \right] \frac{\left( T_i(t, x_1, y_1) \right)^7 + \left( T_i(t, x_2, y_2) \right)^7}{2}, \quad i = 1, 2, 3; \end{aligned} \quad (27)$$

$$|\sigma_2 - \sigma_1| \leq \varepsilon \sim 10^{-7}.$$

Погрешность определялась по формуле

$$\delta_1^{(i)}(t) = \left\| T^{(\text{расчет})}(t) - T^{(\text{аналит})}(t) \right\|_{L_1(i)} = \frac{\sum_{\alpha \in \mathcal{Y}_i} M_\alpha \left| T_\alpha^{(\text{расчет})}(t) - T_\alpha^{(\text{аналит})}(t) \right|}{\sum_{\alpha \in \mathcal{Y}_i} M_\alpha \left| T_\alpha^{(\text{аналит})}(t) \right|}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Опишем способ вычисления средней по ячейке сетки температуры  $T_\alpha^{(\text{аналит})}(t)$  для аналитического решения. Этот способ основан на том, что температура в ячейке есть некоторая усредненная по

объему ячейки величина. В силу консервативности разностных схем теплопроводности базовой консервативной величиной является внутренняя энергия ячейки. Поэтому

$$T_{\alpha}^{(\text{аналит})}(t) = T^{(i)}\left(\rho_i, E_{\alpha}^{(\text{средн}), (i)}(t)\right), \quad i = 1, 2, 3.$$

Здесь функция  $T^{(i)}(\rho_i, E)$  вычисляется по уравнению состояния. Средняя по ячейке внутренняя энергия для аналитического решения определяется по формуле (для четырехугольной ячейки с обходом ее четырех вершин  $Z_1, Z_2, Z_3$  и  $Z_4$  против часовой стрелки)

$$E_{\alpha}^{(\text{средн}), (i)}(t) = \frac{W_i(t, Z_1, Z_2) + W_i(t, Z_2, Z_3) + W_i(t, Z_3, Z_4) + W_i(t, Z_4, Z_1)}{M_{\alpha}}, \quad (28)$$

где  $M_{\alpha}$  — масса ячейки  $\alpha$ ;  $W_i(t, Z_k, Z_{k+1})$  — суммарные потоки энергии через соответствующие стороны, задаваемые формулами (25)–(27). Обобщение формулы (28) на случай многоугольных ячеек с другим числом вершин очевидно.

Расчеты проводились с равномерным разбиением счетной области по каждому из двух направлений в каждом веществе: сетка 1 —  $10 \times 10$  (300 ячеек); сетка 2 —  $20 \times 20$  (1200 ячеек); сетка 3 —  $40 \times 40$  (4800 ячеек); сетка 4 —  $100 \times 100$  (30000 ячеек); сетка 5 —  $200 \times 200$  (120000 ячеек). Границы веществ совпадают с линиями сетки.

В табл. 4 приведены погрешности расчета для веществ системы. На рис. 4–6 — погрешности в зависимости от размера ячейки для каждого вещества.

*Замечание.* В тестовых расчетах задачи 2 полезно вычислять погрешности на каждом шаге по времени, так как они заметно осциллируют (пример показан на рис. 7). Поэтому, в частности, к

Таблица 4

**Норма относительной погрешности температуры на момент времени  $t = 1,0$  в расчетах задачи 2**

Расчет		Номер вещества		
Сетка	Метод	1	2	3
1	1	0,01881	0,04563	0,06905
	2	0,01842	0,03047	0,14218
	3	0,01752	0,03709	0,08227
	4	0,00801	0,01150	0,02775
	5	0,00320	0,00636	0,01193
2	1	0,01249	0,02371	0,04200
	2	0,01155	0,01680	0,07476
	3	0,01130	0,01748	0,04747
	4	0,00435	0,00544	0,01691
	5	0,00152	0,00353	0,00685
3	1	0,00756	0,01122	0,02448
	2	0,00629	0,00812	0,03804
	3	0,00639	0,00829	0,02491
	4	0,00193	0,00249	0,00888
	5	0,00099	0,00173	0,00348
4	1	0,00284	0,00427	0,01113
	2	0,00248	0,00356	0,01432
	3	0,00238	0,00315	0,00970
	4	0,00080	0,00101	0,00335
	5	0,00023	0,00052	0,00122
5	1	0,00140	0,00215	0,00594
	2	0,00122	0,00180	0,00700
	3	0,00110	0,00150	0,00468
	4	0,00037	0,00048	0,00162
	5	0,00011	0,00025	0,00058

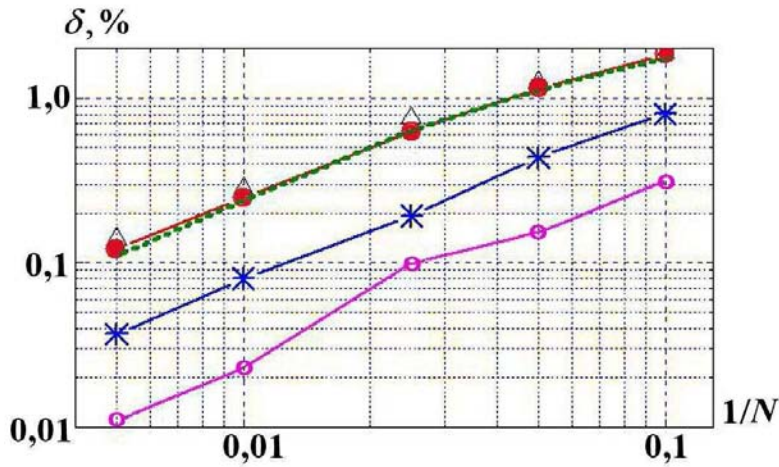


Рис. 4. Относительные погрешности в расчетах задачи 2 на момент времени  $t = 1$  в области, занимаемой первым веществом:  $\triangle$  — метод 1;  $\bullet$  — метод 2;  $---$  — метод 3;  $*$  — метод 4;  $\circ$  — метод 5

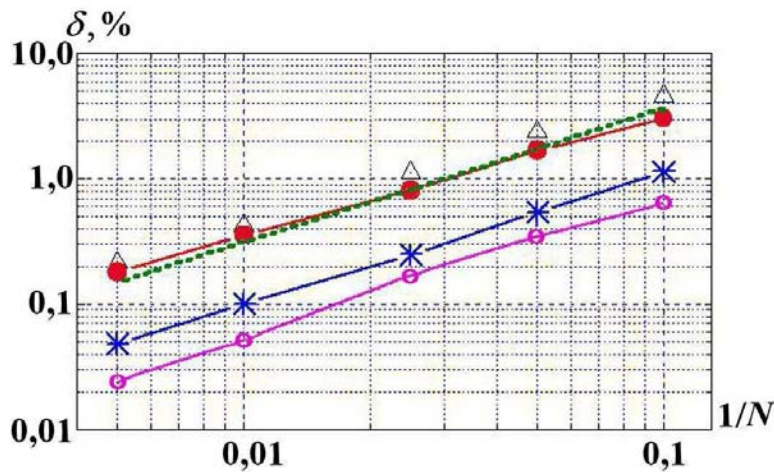


Рис. 5. Относительные погрешности в расчетах задачи 2 на момент времени  $t = 1$  в области, занимаемой вторым веществом:  $\triangle$  — метод 1;  $\bullet$  — метод 2;  $---$  — метод 3;  $*$  — метод 4;  $\circ$  — метод 5

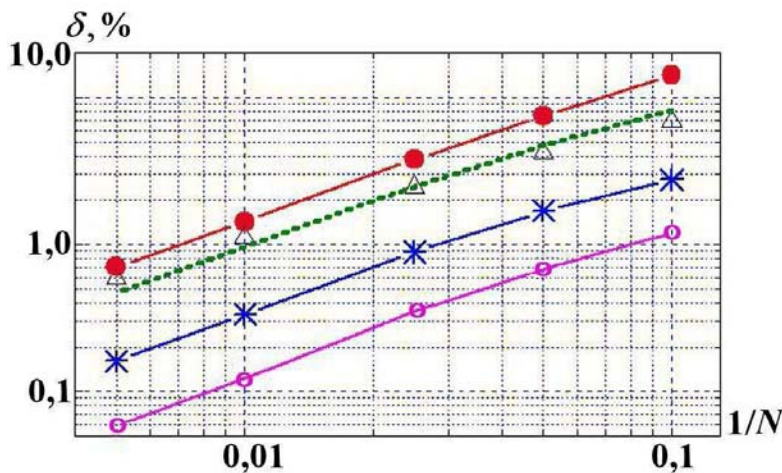


Рис. 6. Относительные погрешности в расчетах задачи 2 на момент времени  $t = 1$  в области, занимаемой третьим веществом:  $\triangle$  — метод 1;  $\bullet$  — метод 2;  $---$  — метод 3;  $*$  — метод 4;  $\circ$  — метод 5

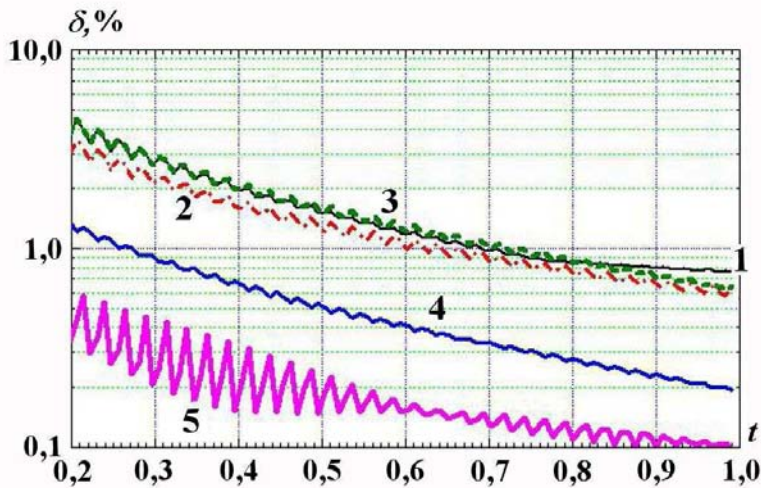


Рис. 7. Зависимость относительной погрешности от времени в веществе 1 на сетке  $40 \times 40$  в расчетах задачи 2 (цифры на графиках — номера методов)

значениям погрешностей, взятым на любой фиксированный момент времени, следует относиться как к оценкам. Но в данном случае осцилляции не влияют на качественные выводы о сравнении разных способов усреднения.

Из приведенных рисунков и таблиц можно видеть, что наилучшие по точности результаты дали методы 4 и 5. Это разновидности модифицированного гармонического усреднения, в которых температура на стороне ячейки определяется решением нелинейного уравнения, сконструированного из условия непрерывности потока тепла через сторону ячейки. Полученные результаты подтверждают ранее приведенные аналитические оценки точности различных методов. При этом основной выигрыш достигнут за счет более точного расчета коэффициента теплопроводности на стороне ячейки интегрирования, справа и слева от которой располагается одно и то же вещество.

Методы 4, 5 заметно более дорогостоящие, чем методы 1—3. Однако, поскольку при проведении расчетов важно в первую очередь обеспечить заданную точность, авторы считают их более предпочтительными.

### Заключение

Приведено описание методов усреднения коэффициента теплопроводности на стороне ячейки интегрирования при численном решении нелинейного уравнения теплопроводности. Выполнено исследование различных методов. Аналитически и при помощи численных экспериментов продемонстрировано, что наилучшие по точности результаты получены при использовании разновидностей модифицированного гармонического усреднения, в которых температура на стороне ячейки определяется решением нелинейного уравнения, сконструированного из условия непрерывности потока тепла через сторону ячейки. При этом способ аппроксимации уравнения теплопроводности не оказывает существенного влияния на полученные оценки.

### Список литературы

1. Самарский А. А. Уравнения параболического типа с разрывными коэффициентами и разностные методы их решения // Тр. Всес. совещания по дифференциальным уравнениям (Ереван, ноябрь 1958 г.). Ереван: Изд-во АН Арм. ССР, 1960. С. 148—160.
2. Дмитриев Н. А., Софронов И. Д., Тихомиров Б. П. Методика расчета одномерных многообластных задач высокотемпературной газовой динамики // Вопросы атомной науки и техни-

- ки. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики. 1983. Вып. 3. С. 3—8.
3. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971.
  4. Самарский А. А. Теория разностных схем. Изд. 3-е, исправленное. М.: Наука, 1989.
  5. Авдеев П. А., Артамонов М. В., Бахрах С. М. и др. Комплекс программ ЛЭГАК для расчета нестационарных течений многокомпонентной сплошной среды и принципы реализации комплекса на многопроцессорных ЭВМ с распределенной памятью // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2001. Вып. 3. С. 14—18.
  6. Горбунов А. А. Метод решения уравнения теплопроводности на нерегулярных сетках в параллельном режиме в методике МЕДУЗА // Там же. 2008. Вып. 3. С. 32—46.
  7. Скрыпник С. И., Рудько Н. М., Королев Р. А. и др. Численное решение двумерных уравнений газовой динамики с теплопроводностью с использованием переменного по размеру разностного шаблона // Там же. 2007. Вып. 1. С. 14—26.
  8. Софронов И. Д., Воронин Б. Л., Скрыпник С. И. и др. Методика и комплексы программ РАМЗЕС, РАМЗЕС-КП // Там же. 1999. Вып. 4. С. 27—31.
  9. Стенин А. М., Спиридонов В. Ф., Воронина Е. Б., Шкарубский В. В. Методика ЛЭГАК-ВКЛ численного моделирования двумерных газодинамических течений многокомпонентных сред с выделением контактных границ, не совпадающих с линиями сетки // Труды РФЯЦ-ВНИИЭФ. 2010. Вып. 15. С. 154—169.
  10. Бондаренко Ю. А., Голубев А. А., Горбунов А. А. и др. О "шахматном эффекте" в некоторых разностных схемах для двумерной и трехмерной теплопроводности // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2011. Вып. 1. С. 49—53.
  11. Самарский А. А., Соболев И. М. Примеры численного расчета температурных волн // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1963. Т. 3, № 4. С. 702—719.
  12. Бондаренко Ю. А., Воронин Б. Л., Горев В. В. и др. Описание набора тестов для методик и программ, предназначенных для решения двумерных задач теплопроводности // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1992. Вып. 2. С. 14—20.

Статья поступила в редакцию 14.03.14.

---