

УДК 517.958:536.24, 519.634

КОНЕЧНО-РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ГРОМ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНОЙ КВАЗИДИФФУЗИОННОЙ СИСТЕМЫ ПЕРЕНОСА ТЕПЛООВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

С. А. Грабовенская, В. В. Завьялов, А. А. Шестаков
(РФЯЦ-ВНИИТФ, г. Снежинск)

Рассматривается линейная параметрическая конечно-разностная схема для численного решения нестационарной системы уравнений переноса теплового излучения квазидиффузионным методом. При решении кинетического уравнения применяется схема типа TVD. Для итерационного решения нелинейной системы квазидиффузионных уравнений используется ВДМ-метод. Приводятся результаты численных расчетов тестовых задач.

Ключевые слова: квазидиффузионный метод, перенос излучения, конечно-разностная схема.

Введение

При моделировании нестационарного переноса излучения многогрупповое кинетическое приближение является наиболее ресурсоемкой моделью, поэтому на практике желательно использовать более простые приближения, в частности, многогрупповое квазидиффузионное приближение [1]. В данной работе перенос излучения рассчитывается на основании нестационарной системы квазидиффузионных уравнений, в которой матрица диффузионных коэффициентов и граничных условий обновляется через заданное количество временных шагов на этапе решения кинетического уравнения. При этом правая часть кинетического уравнения, представляющая сумму интеграла рассеяния и источника в виде функции Планка, берется с предыдущего временного шага. Очевидно, что при таком подходе нельзя говорить о полной эквивалентности кинетической и квазидиффузионной моделей. Но, как свидетельствует практика многолетних расчетов одномерных и двумерных задач переноса излучения, рассматриваемая модель квазидиффузии дает вполне приемлемые и согласующиеся с кинетическим подходом результаты [1–13].

Для нестационарной задачи метод квазидиффузии приводит к гиперболической системе уравнений. Из теоремы Годунова известно, что для гиперболической системы не существует монотонной схемы второго порядка в классе линейных схем. Если пренебречь временной производной от потока излучения, то тип системы изменится с гиперболического на параболический. Для параболического уравнения с постоянными коэффициентами квазидиффузии возможно построение монотонной схемы второго порядка точности по пространству. В случае переменных коэффициентов это проблематично. Одним из путей построения монотонной схемы повышенного порядка точности для гиперболических уравнений является использование идеологии TVD-схем [13–15]. В [13] TVD-реконструкция применялась к разностным псевдоинвариантам. Однако реализация подобных схем усложняется для многомерных геометрий.

В работе [12] показано, что параметрическая схема РОМБ из [8, 16, 17] может быть неустойчива для квазидиффузионной модели. Там же предложена схема ГРОМ (Гибридный РОМБ), в которой выполняются условия устойчивости, положительности и монотонности решений квазидиффузионной модели для плоской и сферически-симметричной геометрий. Для выполнения этих условий в

схеме ГРОМ применены различные соотношения связи для плотности излучения в разных уравнениях системы квазидиффузии, которые отличаются в худшем случае на величину первого порядка аппроксимации и не нарушают консервативности схемы.

В данной работе одномерная схема ГРОМ обобщена на двумерный осесимметричный случай.

Постановка задачи

Система уравнений, описывающая распространение теплового излучения, состоит из спектрального кинетического уравнения переноса, описывающего перенос, поглощение и рассеяние теплового излучения, и уравнения энергии среды, характеризующего изменение температуры вещества за счет поглощения и испускания им фотонов. В многогрупповом приближении для двумерной осесимметричной геометрии в цилиндрической системе координат без учета движения среды для изотропного рассеяния данная система уравнений выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{c} \frac{d}{dt} \left(\frac{I_g}{\rho} \right) + \mathbf{\Omega} \nabla I_g + \alpha_g I_g &= \frac{\alpha_{cg}}{4\pi} B_g + \frac{\alpha_{sg}}{4\pi} U_g; \\ \rho \frac{dE}{dt} &= \sum_g \alpha_{cg} (U_g - B_g) \Delta \varepsilon_g + \rho Q. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $\rho(\mathbf{r}, t)$ — плотность вещества; $\mathbf{r} = (r, z)$ — радиус-вектор; t — время; g — индекс энергетической группы ($g = 1, \dots, \hat{g}$); ε_g — энергия фотонов группы g , $\Delta \varepsilon_g = \varepsilon_{g+1/2} - \varepsilon_{g-1/2}$; $\mathbf{\Omega} = (\xi = \sqrt{1 - \mu^2} \cos \phi, \eta = \sqrt{1 - \mu^2} \sin \phi, \mu = \cos \theta)$ — единичный вектор в направлении полета фотона, где θ — угол между $\mathbf{\Omega}$ и осью Z , ϕ — угол между проекцией \mathbf{r} и проекцией $\mathbf{\Omega}$ на плоскость, перпендикулярную оси Z ; $I_g(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, t)$ — спектральная интенсивность излучения; $\mathbf{\Omega} \nabla I_g = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \xi I_g) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} (r \mu I_g) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} (\eta I_g)$ — оператор переноса; $\alpha_g(T, \rho) = \alpha_{cg} + \alpha_{sg}$ — коэффициент ослабления, где $T(\mathbf{r}, t)$ — температура среды, $\alpha_{cg}(T, \rho)$ — коэффициент поглощения, $\alpha_{sg}(\rho)$ — коэффициент рассеяния; $B_g(T)$ — интенсивность равновесного излучения (функция Планка); $U_g(\mathbf{r}, t) = \int_{\mathbf{\Omega}} I_g d\mathbf{\Omega}$ — спектральная плотность энергии излучения, умноженная на скорость света c ; $E(T, \rho)$ — удельная внутренняя энергия вещества; $Q(\mathbf{r}, t)$ — внешний источник.

Для системы уравнений (1) в области Γ с замкнутой границей $\bar{\Gamma}$ решается смешанная задача со следующими начальными и граничными условиями:

$$I_g(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, t = 0) = I_g^0(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}); \quad I_g(\mathbf{r} \in \bar{\Gamma}, \mathbf{n}\mathbf{\Omega} < 0, t) = I_g^-(\mathbf{r} \in \bar{\Gamma}, \mathbf{\Omega}, t); \quad T(\mathbf{r}, t = 0) = T^0(\mathbf{r}),$$

где \mathbf{n} — внешняя нормаль к $\bar{\Gamma}$. В силу осевой симметрии справедливо условие

$$I_g(r = 0, z, \mu, \phi, t) = I_g(r = 0, z, \mu, 2\pi - \phi, t),$$

поэтому рассматривается только область значений $-1 \leq \mu \leq 1$; $0 \leq \phi \leq \pi$. В качестве граничного условия на оси симметрии используется условие симметричного переноса

$$I_g(r = 0, z, \mu, \phi, t) = I_g(r = 0, z, \mu, \pi - \phi, t), \quad 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Возможны условия зеркального отражения на плоскости $Z = \text{const}$:

$$I_g(r, z = \text{const}, \mu, \phi, t) = I_g(r, z = \text{const}, -\mu, \phi, t), \quad -1 \leq \mu \leq 1.$$

Обозначим через $\Phi_g = \int_{\mathbf{\Omega}} \mathbf{\Omega} I_g d\mathbf{\Omega}$ спектральный поток энергии излучения. Проинтегрировав (1) по $\mathbf{\Omega}$ с весами 1, ξ , μ , получим систему уравнений квазидиффузии

$$\begin{aligned}
 & \frac{\rho}{c} \frac{d}{dt} \left(\frac{U_g}{\rho} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial (r\Phi_{1,g})}{\partial r} + \frac{\partial \Phi_{2,g}}{\partial z} + \alpha_{cg} U_g = \alpha_{cg} B_g; \\
 & \frac{\rho}{c} \frac{d}{dt} \left(\frac{\Phi_{1,g}}{\rho} \right) + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (rD_1 U)_g + \frac{\partial}{\partial z} (rD_3 U)_g + (2D_{1,g} + D_{2,g} - 1) U_g \right] + \alpha_g \Phi_{1,g} = 0; \\
 & \frac{\rho}{c} \frac{d}{dt} \left(\frac{\Phi_{2,g}}{\rho} \right) + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (rD_3 U)_g + \frac{\partial}{\partial z} (rD_2 U)_g \right] + \alpha_g \Phi_{2,g} = 0; \\
 & \rho \frac{dE}{dt} = \sum_g \alpha_{cg} (U_g - B_g) \Delta \varepsilon_g + \rho Q,
 \end{aligned} \tag{2}$$

где $D_{1\div 3,g}$ — квазидиффузионные коэффициенты:

$$\begin{aligned}
 D_{1,g} &= \frac{1}{U_g} \int_{\Omega} \xi^2 I_g d\Omega; & D_{2,g} &= \frac{1}{U_g} \int_{\Omega} \mu^2 I_g d\Omega; & D_{3,g} &= \frac{1}{U_g} \int_{\Omega} \mu \xi I_g d\Omega; \\
 \Phi_g &= \begin{pmatrix} \Phi_{1,g} \\ \Phi_{2,g} \end{pmatrix}, & \Phi_{1,g} &= \int_{\Omega} \xi I_g d\Omega, & \Phi_{2,g} &= \int_{\Omega} \mu I_g d\Omega.
 \end{aligned}$$

Соответствующие начальные и граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned}
 U_g(\mathbf{r}, t = 0) &= U_g^0(\mathbf{r}), & \Phi_g(\mathbf{r}, t = 0) &= \Phi_g^0(\mathbf{r}); & T(\mathbf{r}, t = 0) &= T^0(\mathbf{r}); \\
 \tilde{\alpha}_g U_g - \tilde{\beta}_g (\mathbf{n} \Phi_g) &= \tilde{\varphi}_g, & \mathbf{r} &\in \bar{\Gamma}.
 \end{aligned}$$

Здесь $\tilde{\alpha}_g, \tilde{\beta}_g, \tilde{\varphi}_g$ — параметры граничных условий, причем $\tilde{\alpha}_g \geq 0, \tilde{\beta}_g \geq 0, \tilde{\alpha}_g + \tilde{\beta}_g > 0$.

В случае полной изотропии излучения $D_{1,g} = D_{2,g} = \frac{1}{3}, D_{3,g} = 0$ и получается система уравнений P_1 -приближения. Продифференцировав в системе (2) члены с $D_{1\div 3,g} U_g$, можно получить недивергентную форму уравнения для потока, которая более удобна для численной реализации. Тогда в P_1 -приближении исчезает член $\frac{2D_{1,g} + D_{2,g} - 1}{r} U_g$, который при $r \rightarrow 0$ может ухудшать аппроксимацию.

К сожалению, в квазидиффузионной системе этот член присутствует, поэтому аппроксимация при $r \rightarrow 0$ требует особого внимания. Соответственно переход к P_1 -приближению — один из наиболее очевидных способов устранения данной особенности. При этом не нарушается консервативность схемы, так как в уравнение баланса входит только первое уравнение системы (2), записанное в дивергентной форме, а потоки на гранях в уравнении баланса сокращаются.

В недивергентной форме для потока система квазидиффузионных уравнений (2) имеет вид

$$\begin{aligned}
 & \frac{\rho}{c} \frac{d}{dt} \left(\frac{U_g}{\rho} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial (r\Phi_{1,g})}{\partial r} + \frac{\partial \Phi_{2,g}}{\partial z} + \alpha_{cg} U_g = \alpha_{cg} B_g; \\
 & \frac{\beta \rho}{c} \frac{d}{dt} \left(\frac{\Phi_g}{\rho} \right) + D_g \nabla U_g + \alpha_g \Phi_g + \mathbf{P}_g U_g = 0.
 \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 D_g &= \begin{pmatrix} D_{1,g} & D_{3,g} \\ D_{3,g} & D_{2,g} \end{pmatrix}; & D_g \nabla U_g &= \begin{pmatrix} D_{1,g} \frac{\partial U_g}{\partial r} + D_{3,g} \frac{\partial U_g}{\partial z} \\ D_{3,g} \frac{\partial U_g}{\partial r} + D_{2,g} \frac{\partial U_g}{\partial z} \end{pmatrix}; \\
 \mathbf{P}_g &= \begin{pmatrix} P_{1,g} \\ P_{2,g} \end{pmatrix}, & P_{1,g} &= \frac{2D_{1,g} + D_{2,g} - 1}{r} + \frac{\partial D_{1,g}}{\partial r} + \frac{\partial D_{3,g}}{\partial z}, & P_{2,g} &= \frac{D_{3,g}}{r} + \frac{\partial D_{3,g}}{\partial r} + \frac{\partial D_{2,g}}{\partial z}.
 \end{aligned}$$

В системе (3) введен диффузионный параметр β , который определяет вид приближения:

$\beta = 1$ — гиперболическая квазидиффузионная система уравнений;

$\beta = 0$ — параболическая квазидиффузионная система уравнений;

$\beta = 1; D_{1,g} = D_{2,g} = \frac{1}{3}; D_{3,g} = 0$ — P_1 -приближение, система гиперболическая;

$\beta = 0; D_{1,g} = D_{2,g} = \frac{1}{3}; D_{3,g} = 0$ — диффузионное приближение, система параболическая.

Из асимптотики коэффициентов квазидиффузии при $\alpha_g \rightarrow \infty$ следует их стремление к диффузионному пределу. Неизотропность излучения приводит к сложному поведению коэффициентов квазидиффузии в оптически плотных средах. Получаемые коэффициенты квазидиффузии отличаются от предельных значений, что может отразиться на точности вычисления плотности и потока излучения, особенно вблизи оси Z при $r \rightarrow 0$.

Разностная аппроксимация

Система уравнений переноса излучения решается в области $(t^0, t^{\hat{n}}) \times \Gamma(t)$, где $(t^0, t^{\hat{n}})$ — интервал времени ($n = 0, \dots, \hat{n}$); Γ — половина сечения тела вращения плоскостью, проходящей через ось Z , расположенная в полуплоскости $(-\infty < z < \infty, r \geq 0)$. Счетная область покрывается регулярной сеткой из четырехугольников (рис. 1), вершины которых задаются координатами r_{ij}, z_{ij} ($i = 0, \dots, \hat{i}, j = 0, \dots, \hat{j}$). При интегрировании уравнений квазидиффузии по ячейке разностной сетки Γ_{ij} (с центром в точке $(i + 1/2, j + 1/2)$) будем обходить ее по часовой стрелке, применяя при этом формулу Грина и простейшие квадратурные формулы.

Введем некоторые величины и соотношения, используемые далее:

$$\Delta V_{ij} = \int_{\Gamma_{ij}} r dr dz = \frac{1}{6} (r_1 + r_2 + r_3) [r_1 (z_2 - z_3) + r_2 (z_3 - z_1) + r_3 (z_1 - z_2)] + \\ + \frac{1}{6} (r_1 + r_3 + r_4) [r_1 (z_3 - z_4) + r_3 (z_4 - z_1) + r_4 (z_1 - z_3)];$$

$$\Delta S_{ij} = \int_{\Gamma_{ij}} dr dz = -0,5 [(r_2 - r_4) (z_1 - z_3) + (r_3 - r_1) (z_2 - z_4)];$$

$$(\Delta_j z)_i = \Delta z_i = (z_{j+1} - z_j)_i = z_3 - z_4; \quad \Delta z_j = (z_{i+1} - z_i)_j = z_1 - z_4;$$

$$(\Delta_j z)_{i+1/2} = \Delta z_{i+1/2} = (z_{j+1} - z_j)_{i+1/2} = \frac{1}{2} [(z_{j+1} - z_j)_i + (z_{j+1} - z_j)_{i+1}] = \frac{1}{2} (z_3 - z_4 + z_2 - z_1);$$

$$\Delta_* (\cdot) = (\cdot)_{*+1} - (\cdot)_*; \quad \Delta l^2 = \Delta r^2 + \Delta z^2.$$

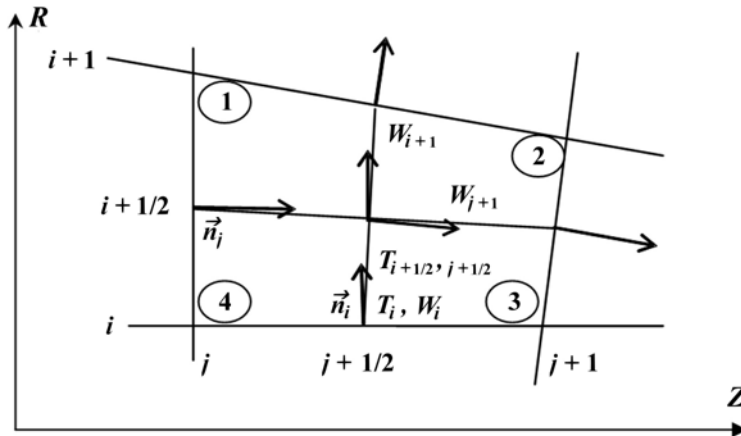


Рис. 1. Ячейка разностной сетки

Здесь и далее для упрощения индексы $i + 1/2$, $j + 1/2$, как правило, опускаются.

Интегрируя уравнения квазидиффузии по ячейке сетки и применяя неявную аппроксимацию первого порядка по времени с шагом τ , получаем систему интегральных законов сохранения

$$\begin{aligned} (q_g^0 U_g)^{n+1} + \nabla_h \Phi_g^{n+1} &= \frac{\rho^{n+1}}{c\tau} \left(\frac{U_g}{\rho} \right)^n + \alpha_{cg}^{n+1} B_g^{n+1}; \\ (q_g^1 \Phi_g)^{n+1} + D_g^{n+1} \nabla_h U_g^{n+1} + \mathbf{P}_g^{n+1} U_g^{n+1} &= \frac{\beta \rho^{n+1}}{c\tau} \left(\frac{\Phi_g}{\rho} \right)^n; \\ \rho^{n+1} \frac{E^{n+1} - E^n}{\tau} &= \sum_g \alpha_{cg}^{n+1} (U_g - B_g)^{n+1} \Delta \varepsilon_g + (\rho Q)^{n+1}. \end{aligned} \quad (4)$$

Временной индекс $n + 1$, как и другие индексы, не вызывающие сомнений, также будем опускать. Пусть $(\mathbf{n}\Delta l)_i = (\Delta_j z, -\Delta_j r)_i$; $(\mathbf{n}\Delta l)_j = (-\Delta_i z, \Delta_i r)_j$ — компоненты счетных нормалей (см. рис. 1), тогда

$$\begin{aligned} q^0 &= \frac{1}{c\tau} + \alpha_c; & q^1 &= \frac{\beta}{c\tau} + \alpha; & \nabla_h \Phi &= \frac{1}{\Delta V} (\Delta_i (r \Phi \mathbf{n}\Delta l) + \Delta_j (r \Phi \mathbf{n}\Delta l)); \\ \nabla_h U &= \frac{1}{\Delta S} \left((\mathbf{n}\Delta l)_{i+1/2} \Delta_i U + (\mathbf{n}\Delta l)_{j+1/2} \Delta_j U \right); \\ D \nabla_h U &= \frac{1}{\Delta S} \left(D_1 \left((\Delta_j z)_{i+1/2} \Delta_i U - (\Delta_i z)_{j+1/2} \Delta_j U \right) + D_3 \left((-\Delta_j r)_{i+1/2} \Delta_i U + (\Delta_i r)_{j+1/2} \Delta_j U \right) \right); \\ P_1 &= \frac{1}{\Delta S} \left(\Delta_i (D_1 \Delta z - D_3 \Delta r) + \Delta_j (-D_1 \Delta z + D_3 \Delta r) \right) + \frac{\Delta S}{\Delta V} (2D_1 + D_2 - 1); \\ P_2 &= \frac{1}{\Delta S} \left(\Delta_i (D_3 \Delta z - D_2 \Delta r) + \Delta_j (-D_3 \Delta z + D_2 \Delta r) \right) + \frac{\Delta S}{\Delta V} D_3. \end{aligned}$$

Вводя обозначения нормальных компонент вектора теплового потока

$$\begin{aligned} W_{i+1/2}^1 &= \Phi_g (\mathbf{n}\Delta l)_{i+1/2} = \Phi_1 (\Delta_j z)_{i+1/2} - \Phi_2 (\Delta_j r)_{i+1/2}; \\ W_{j+1/2}^2 &= \Phi_g (\mathbf{n}\Delta l)_{j+1/2} = \Phi_1 (-\Delta_i z)_{j+1/2} + \Phi_2 (\Delta_i r)_{j+1/2}, \end{aligned}$$

получаем конечно-разностную схему в терминах нормальных составляющих потока:

$$\begin{aligned} q_g^0 U_g + \frac{1}{\Delta V} \left(\Delta_i (r W_g^1) + \Delta_j (r W_g^2) \right) &= \frac{\rho}{c\tau} \left(\frac{U_g}{\rho} \right)^n + \alpha_{cg} B_g; \\ q_g^1 W_g^1 + \frac{1}{\Delta S} (M_{i+1/2,g} \Delta_i U_g - M_{j+1/2,g} \Delta_j U_g) + N_{i+1/2,g} U_g &= \frac{\rho \beta}{c\tau} \left(\frac{W_g^1}{\rho} \right)^n; \\ q_g^1 W_g^2 + \frac{1}{\Delta S} (-L_{i+1/2,g} \Delta_i U_g + L_{j+1/2,g} \Delta_j U_g) + N_{j+1/2,g} U_g &= \frac{\rho \beta}{c\tau} \left(\frac{W_g^2}{\rho} \right)^n. \end{aligned} \quad (5)$$

В уравнениях (5) используются также следующие обозначения:

$$\begin{aligned} M_{i+1/2} &= D_{1,i+1/2,j+1/2} (\Delta_j z)_{i+1/2}^2 + D_{2,i+1/2,j+1/2} (\Delta_j r)_{i+1/2}^2 - (D_3 \Delta_1)_{i+1/2,j+1/2}; \\ M_{j+1/2} &= D_{1,i+1/2,j+1/2} (\Delta_i z)_{j+1/2} (\Delta_j z)_{i+1/2} + D_{2,i+1/2,j+1/2} (\Delta_i r)_{j+1/2} (\Delta_j r)_{i+1/2} - \\ &\quad - (D_3 \Delta_3)_{i+1/2,j+1/2}; \\ M_i &= D_{1,i} (\Delta_j z)_i (\Delta_j z)_{i+1/2} + D_{2,i} (\Delta_j r)_i (\Delta_j r)_{i+1/2} - D_{3,i} (\Delta_4)_i; \\ M_j &= D_{1,j} (\Delta_i z)_j (\Delta_j z)_{i+1/2} + D_{2,j} (\Delta_i r)_j (\Delta_j r)_{i+1/2} - D_{3,j} (\Delta_5)_j; \\ M_{i+1} &= D_{1,i+1} (\Delta_j z)_{i+1} (\Delta_j z)_{i+1/2} + D_{2,i+1} (\Delta_j r)_{i+1} (\Delta_j r)_{i+1/2} - D_{3,i+1} (\Delta_4)_{i+1}; \\ M_{j+1} &= D_{1,j+1} (\Delta_i z)_{j+1} (\Delta_j z)_{i+1/2} + D_{2,j+1} (\Delta_i r)_{j+1} (\Delta_j r)_{i+1/2} - D_{3,j+1} (\Delta_5)_{j+1}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L_{i+1/2} &= D_{1,i+1/2,j+1/2} (\Delta_j z)_{i+1/2} (\Delta_i z)_{j+1/2} + D_{2,i+1/2,j+1/2} (\Delta_j r)_{i+1/2} (\Delta_i r)_{j+1/2} - \\
 &\quad - (D_3 \Delta_3)_{i+1/2,j+1/2}; \\
 L_{j+1/2} &= D_{1,i+1/2,j+1/2} (\Delta_i z)_{j+1/2}^2 + D_{2,i+1/2,j+1/2} (\Delta_i r)_{j+1/2}^2 - (D_3 \Delta_2)_{i+1/2,j+1/2}; \\
 L_i &= (D_1 \Delta_j z)_i (\Delta_i z)_{j+1/2} + (D_2 \Delta_j r)_i (\Delta_i r)_{j+1/2} - (D_3 \Delta_6)_i; \\
 L_j &= (D_1 \Delta_i z)_j (\Delta_i z)_{j+1/2} + (D_2 \Delta_i r)_j (\Delta_i r)_{j+1/2} - (D_3 \Delta_7)_j; \\
 L_{i+1} &= (D_1 \Delta_j z)_{i+1} (\Delta_i z)_{j+1/2} + (D_2 \Delta_j r)_{i+1} (\Delta_i r)_{j+1/2} - (D_3 \Delta_6)_{i+1}; \\
 L_{j+1} &= (D_1 \Delta_i z)_{j+1} (\Delta_i z)_{j+1/2} + (D_2 \Delta_i r)_{j+1} (\Delta_i r)_{j+1/2} - (D_3 \Delta_7)_{j+1}; \\
 \Delta_1 &= 2 (\Delta_j r)_{i+1/2} (\Delta_j z)_{i+1/2}; \quad \Delta_2 = 2 (\Delta_i r)_{j+1/2} (\Delta_i z)_{j+1/2}; \\
 \Delta_3 &= (\Delta_i r)_{j+1/2} (\Delta_j z)_{i+1/2} + (\Delta_i z)_{j+1/2} (\Delta_j r)_{i+1/2}; \\
 (\Delta_4)_i &= (\Delta_j r)_i (\Delta_j z)_{i+1/2} + (\Delta_j z)_i (\Delta_j r)_{i+1/2}; \\
 (\Delta_5)_j &= (\Delta_i r)_j (\Delta_j z)_{i+1/2} + (\Delta_i z)_j (\Delta_j r)_{i+1/2}; \\
 (\Delta_6)_i &= (\Delta_j r)_i (\Delta_i z)_{j+1/2} + (\Delta_j z)_i (\Delta_i r)_{j+1/2}; \\
 (\Delta_7)_j &= (\Delta_i r)_j (\Delta_i z)_{j+1/2} + (\Delta_i z)_j (\Delta_i r)_{j+1/2}.
 \end{aligned}$$

Решение системы разностных уравнений

Система уравнений (5) является незамкнутой. Для ее замыкания в схеме РОМБ [8, 16, 17] применяются соотношения, связывающие U , W^1 , W^2 в центрах ячеек с их значениями на гранях. Такие соотношения связи не позволяют получить монотонные и положительные решения для уравнений квазидиффузии. В данной работе используются соотношения из [12], улучшающие положительность решения.

Система (5) решается итерационно. На каждом временном шаге организуется цикл внешних итераций (с индексом ν) по нелинейности величин, зависящих от температуры. Вычислительный процесс внутри этого цикла организован в два этапа:

- 1) решается линеаризованное уравнение энергии, из которого получаем температуру $T^{\nu+1}$;
- 2) решается многогрупповая система квазидиффузионных уравнений методом стабилизирующей поправки с учетом температуры, полученной на предыдущем этапе.

По нелинейности внутренней энергии E и функции Планка B_g применяется метод Ньютона, по нелинейности коэффициента α_{cg} — простые итерации. В дальнейшем индекс $\nu+1$ может опускаться, индекс ω будет обозначать итерации метода расщепления по направлениям ADI (Alternating Direct Implicit).

Система уравнений первого этапа имеет вид (счет вдоль столбца $j+1/2$ разностной сетки)

$$\begin{aligned}
 q_g^{0,\nu} U_g^{\omega+1/2} + \frac{1}{\Delta V} \Delta_i (r W_g^{1,\omega+1/2}) &= -\frac{1}{\Delta V} \Delta_j (r W_g^{2,\omega}) + \frac{\rho}{c\tau} \left(\frac{U_g}{\rho} \right)^n + \alpha_{cg}^\nu B_g^{\nu+1}; \\
 q_g^{1,\nu} W_g^{1,\omega+1/2} + \frac{M_{i+1/2}}{\Delta S} \Delta_i U_g^{\omega+1/2} + N_1 U_{1,g}^{\omega+1/2} &= \frac{M_{j+1/2}}{\Delta S} \Delta_j U_g^\omega + \frac{\rho\beta}{c\tau} \left(\frac{W_g^1}{\rho} \right)^n; \\
 W_g^{1,\omega+1/2} &= 0,5 \left(W_{g,i}^{1,\omega+1/2} + W_{g,i+1}^{1,\omega+1/2} \right) + \theta_{i+1/2}^\nu \Delta_i U_g^{\omega+1/2}; \\
 U_g^{\omega+1/2} &= 0,5 \left(U_{g,i}^{\omega+1/2} + U_{g,i+1}^{\omega+1/2} \right) + \delta_{i+1/2}^\nu \Delta_i W_g^{1,\omega+1/2}; \\
 U_{1,g}^{\omega+1/2} &= \gamma_i U_{g,i}^{\omega+1/2} + (1 - \gamma_i) U_{g,i+1}^{\omega+1/2} + \zeta_{i+1/2}^\nu \Delta_i W_g^{1,\omega+1/2}.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Система уравнений второго этапа (счет вдоль строки $i+1/2$ разностной сетки):

$$q_g^{0,\nu} U_g^{\omega+1} + \frac{1}{\Delta V} \Delta_j (r W_g^{2,\omega+1}) = -\frac{1}{\Delta V} \Delta_i (r W_g^{1,\omega+1/2}) + \frac{\rho}{c\tau} \left(\frac{U_g}{\rho} \right)^n + \alpha_{cg}^\nu B_g^{\nu+1};$$

$$\begin{aligned}
 q_g^{1,\nu} W_g^{2,\omega+1} + \frac{L_{j+1/2}}{\Delta S} \Delta_j U_g^{\omega+1} + N_2 U_{2,g}^{\omega+1} &= \frac{L_{i+1/2}}{\Delta S} \Delta_i U_g^{\omega+1} + \frac{\rho\beta}{\sigma T} \left(\frac{W_g^2}{\rho} \right)^n; \\
 W_g^{2,\omega+1} &= 0,5 \left(W_{g,j}^{2,\omega+1} + W_{g,j+1}^{2,\omega+1} \right) + \theta_{j+1/2}^\nu \Delta_j U_g^{\omega+1}; \\
 U_g^{\omega+1} &= 0,5 \left(U_{g,j}^{\omega+1} + U_{g,j+1}^{\omega+1} \right) + \delta_{j+1/2}^\nu \Delta_j W_g^{2,\omega+1}; \\
 U_{2,g}^{\omega+1} &= \gamma_j U_{g,j}^{\omega+1} + (1 - \gamma_j) U_{g,j+1}^{\omega+1} + \zeta_{j+1/2}^\nu \Delta_j W_g^{2,\omega+1}.
 \end{aligned} \tag{7}$$

В общем случае разность плотностей излучения в центре ячейки, взятых из обоих соотношений связи, имеет первый порядок малости, при $\gamma = 0,5$; $\delta = O(h)$; $\zeta = O(h)$ эта разность имеет второй порядок малости, а при $\gamma = 0,5$; $\delta = \zeta$ обращается в нуль. Хотя второе и третье уравнения (2) аппроксимируются в неконсервативной форме с различающимися соотношениями связи для U_g , это не нарушает консервативности схемы, так как в уравнении баланса участвует только первое уравнение с потоками на гранях.

Подставляя соотношения с итерационным индексом $\omega + 1/2$ в (6), получаем на первом этапе метода ADI уравнения, которые решаются методом встречной прогонки. После прогонок первого и второго этапов по вычисленным на ребрах значениям U, W^1, W^2 находим $U^{\omega+1}$ из первого уравнения системы (7) и полагаем $U^{\nu+1/2} = U^{\omega+1}$.

Для вычисления температуры применяем ВДМ-метод. Температуру определяем по формуле

$$T^{\lambda+1} = T^\lambda + \frac{\tau \sum_g \alpha_{cg}^\nu (U_g^\lambda - B_g^\lambda) \Delta \varepsilon_g + \rho [(E^n - E^\lambda) + \tau Q]}{\tau \sum_g \alpha_{cg}^\nu \left(1 - \widehat{b}_g^{\nu+1/2} \right) \left(\frac{\partial B_g}{\partial T} \right)^\lambda \Delta \varepsilon_g + \rho \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)^\lambda},$$

где

$$U_g^\lambda = \frac{\rho}{\sigma T q_g^{0,\nu}} \left(\frac{U_g}{\rho} \right)^n + \widehat{b}_g^{\nu+1/2} B_g^\lambda - \frac{1}{q_g^{0,\nu}} \left(\frac{f_i}{a_i \Delta V} + \frac{f_j}{a_j \Delta V} \right)^{\nu+1/2}, \quad \widehat{b}_g^{\nu+1/2} = \frac{\alpha_{cg}^\nu}{q_g^{0,\nu}} \left(1 - \frac{b_i}{a_i \Delta V} - \frac{b_j}{a_j \Delta V} \right)^{\nu+1/2};$$

a_i, a_j, b_i, b_j — коэффициенты, зависящие от прогонки и геометрических величин; они выбираются аналогично [12]. После сходимости ньютоновских итераций (им соответствует индекс λ) получаем температуру $T^{\nu+1} = T^{\lambda+1}$. По новой температуре находим в центре ячейки $B_g^{\nu+1}$, а затем — новое значение $U_g^{\nu+1}$ по формуле

$$U_g^{\nu+1} = U_g^{\nu+1/2} + \widehat{b}_g^{\nu+1/2} (B_g^{\nu+1} - B_g^\nu).$$

Внешние итерации ν заканчиваются по условию сходимости для $U_g^{\nu+1}$ или $T^{\nu+1}$.

Численные расчеты

В качестве тестов используются две задачи, сформулированные на основе работы [21]. Для численного моделирования задач из [21] в двумерной осесимметричной постановке плоский слой заменен на сферу с вырезанным центром ($0 \leq \vartheta \leq \pi$; $1 \text{ см} \leq r \leq 5 \text{ см}$, $r = \sqrt{r^2 + z^2}$), где ϑ — угол между радиусом-вектором \mathbf{r} и осью Z . На сфере $r = 1 \text{ см}$ задано излучение планковского источника с температурой 1 кэВ, на сфере $r = 5 \text{ см}$ — условие *свободной поверхности*. Полагалось $E = 0,81T$; $T^0 = 1 \text{ эВ}$; $\rho = 1 \text{ г/см}$; $\alpha_{sg} = 0$.

Коэффициент поглощения в задаче 1

$$\alpha_{cg} = \begin{cases} 27 \varepsilon_g^{-3} (1 - e^{-\varepsilon_g/T}), & 1 \text{ см} \leq r \leq 3 \text{ см (область 1)}; 3,4 \text{ см} \leq r \leq 5 \text{ см (область 3)}; \\ 10\,000 \varepsilon_g^{-3} (1 - e^{-\varepsilon_g/T}), & 3 \text{ см} \leq r \leq 3,4 \text{ см (область 2)}. \end{cases}$$

Кинетическое уравнение решалось методом дискретных ординат по схеме типа TVD повышенного порядка аппроксимации с ограничителем Ван Альбада [14, 15] и квадратурой ES_{16} . По энергии бралось 15 групп: $\varepsilon_g = 0,15; 0,45; 0,7; 1; 1,35; 1,65; 2,1; 2,55; 2,85; 3,5; 4,5; 6; 8; 10; 13$ кэВ. Задачи считались с постоянным временным шагом: $\tau = 2 \cdot 10^{-11}$ с для задачи 1; $\tau = 10^{-12}$ с для задачи 2. По направлению Z взято 30 ячеек. Сетка по радиусу неравномерная: $r_1 = 1; 1,004; 1,04; r_4 = 1,1; \dots; r_{22} = 2,9 (\Delta r = 0,1); r_{23} = 2,987; 2,999; 3; 3,001; 3,004; 3,013; r_{29} = 3,04; \dots; r_{37} = 3,36 (\Delta r = 0,04); r_{38} = 3,396; 3,4; 3,404; 3,44; r_{42} = 3,5; \dots; r_{57} = 5 (\Delta r = 0,1)$. Граничные условия взяты из [1]. Расчеты велись до момента времени $t = 1,2 \cdot 10^{-8}$ с, когда решение выходит на стационарный режим. Сходимость определялась условием $|T^{\nu+1} - T^\nu| \leq 10^{-5} (1 + T^{\nu+1})$.

На рис. 2 приведено пространственное распределение температуры в задаче 1, рассчитанное на момент $t = 5 \cdot 10^{-10}$ с по схеме ГРОМ. Видно, что лучевой эффект, свойственный дискретности пространства направлений, на температуру влияет слабо.

На рис. 3 приведены распределения температуры вещества вдоль центрального столбца разностной сетки на моменты времени $t = 5 \cdot 10^{-10}$ с и $t = 1,2 \cdot 10^{-8}$ с, полученные в разных приближениях. Из рисунка видно, что в оптически прозрачной области 1 ($r \in [1, 3]$) на этапе прогрева квазидиффузионный метод дает решение, более близкое к кинетическому, чем P_1 -приближение. Наблюдается хорошее согласие квазидиффузионной и кинетической моделей.

Кинетический этап в методе квазидиффузии может рассчитываться по разным схемам. Более того, при использовании метода квазидиффузии можно решать упрощенную систему параболического типа. Соответствующие распределения температуры вещества на те же моменты времени, что и на рис. 3, представлены на рис. 4. Можно сделать вывод о том, что в данном расчете результаты, полученные по параболической и гиперболической моделям квазидиффузии, совпадают. Очевидно, что использование схемы первого порядка точности возможно, но решение несколько ухудшается в оптически прозрачной области $r \in [1, 3]$ на этапе прогрева системы, что заметно при сравнении с *точным* решением, полученным по кинетической модели в результате расчетов на сходимость. Отметим также хорошее согласование результатов с точным решением.

В таблице приведено среднее число итераций за один шаг при счете с постоянным шагом по времени до $t = 2 \cdot 10^{-9}$ с (завершается прогрев области 1 и происходит формирование волны в области 2) в зависимости от размера этого шага и сетки по пространству. После прогрева области 1 число итераций быстро уменьшается до 2. При исследовании сходимости итераций исходная сетка дробилась только по радиусу, в два и четыре раза.

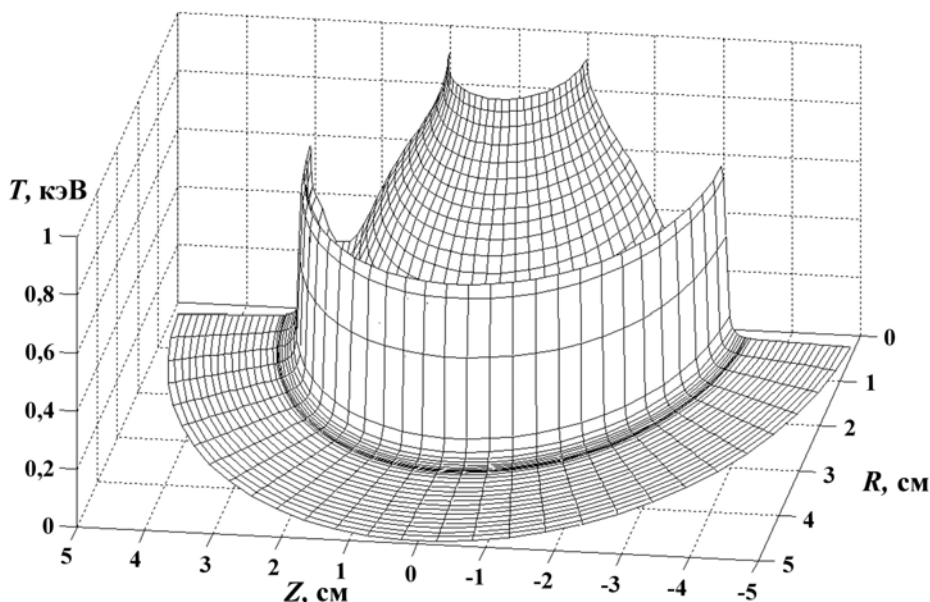


Рис. 2. Задача 1. Распределение температуры вещества, рассчитанное по схеме ГРОМ

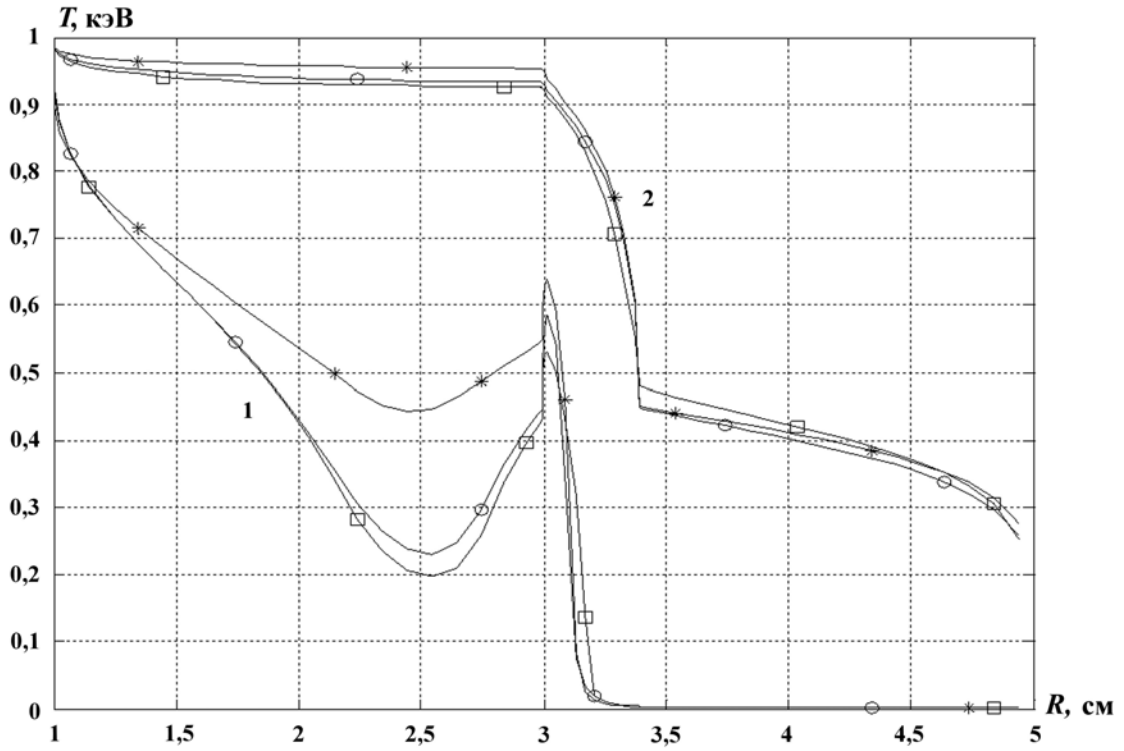


Рис. 3. Задача 1. Температура вещества вдоль центрального столбца сетки на моменты времени $t = 5 \cdot 10^{-10}$ с (1) и $t = 1,2 \cdot 10^{-8}$ с (2): \circ — квазидиффузионный метод; \square — кинетическая модель; $*$ — P_1 -приближение

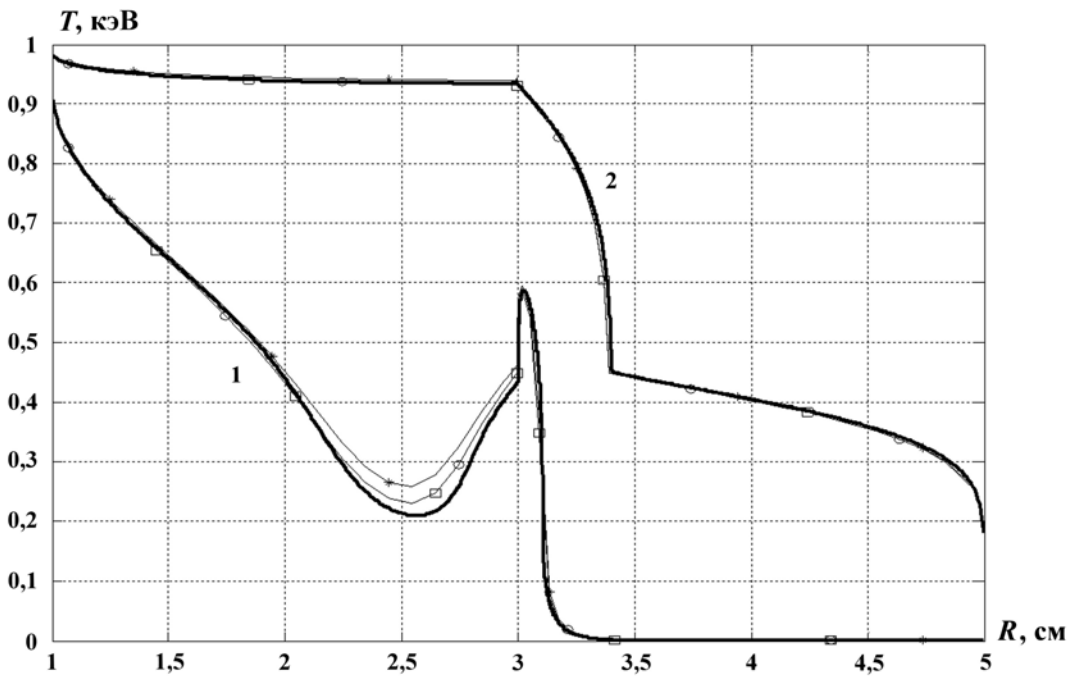


Рис. 4. Задача 1. Температура вещества на моменты времени $t = 5 \cdot 10^{-10}$ с (1) и $t = 1,2 \cdot 10^{-8}$ с (2) при расчетах квазидиффузионным методом: \circ — кинетический этап по схеме типа TVD, система гиперболическая; \square — кинетический этап по схеме типа TVD, система параболическая; $*$ — кинетический этап по схеме первого порядка, система гиперболическая; — — точное решение

Задача 1. Среднее число итераций за один шаг

Число ячеек сетки по оси R	$\tau = 2 \cdot 10^{-10}$ с	$\tau = 2 \cdot 10^{-11}$ с	$\tau = 2 \cdot 10^{-12}$ с
56	58	14	6
112	93	21	8
224	100	35	10

Из таблицы видно, что количество итераций прямо пропорционально шагу по времени и обратно пропорционально шагу пространственной сетки.

Задача 2 представляет собой модификацию предыдущей задачи посредством введения в плотную область 2 щели из оптически прозрачной области. Щель ограничена прямыми, выходящими из начала координат под углами $\pi/3$, $2\pi/3$ к оси OZ . В этом случае решение становится существенно двумерным и более сложным для моделирования.

На рис. 5, 6 приведены распределения температуры вещества, полученные по схемам РОМБ и ГРОМ на момент времени $t = 2,8 \cdot 10^{-11}$ с. По схеме РОМБ задачу 2 удалось рассчитать только до этого момента, так как начиная с $t = 2,8 \cdot 10^{-11}$ с возникают неограниченно возрастающие осцилляции расчетных величин.

Из рис. 5, 6 следует, что для решения двумерной квазидиффузионной системы необходимо применять линейную схему ГРОМ и итерационный ВДМ-метод.

Заключение

Для численного решения системы квазидиффузионных уравнений в двумерной осесимметричной геометрии используется неявная конечно-разностная схема ГРОМ с улучшенными монотонными свойствами по сравнению со схемой РОМБ, являющаяся обобщением одномерной схемы [12]. Схема ГРОМ — параметрическая и имеет первый порядок точности по времени и второй порядок по пространству. Параметры схемы выбираются с учетом свойств среды, и в этом смысле она является линейной. Предусмотрена возможность расчетов по гиперболической и параболической моделям квазидиффузии.

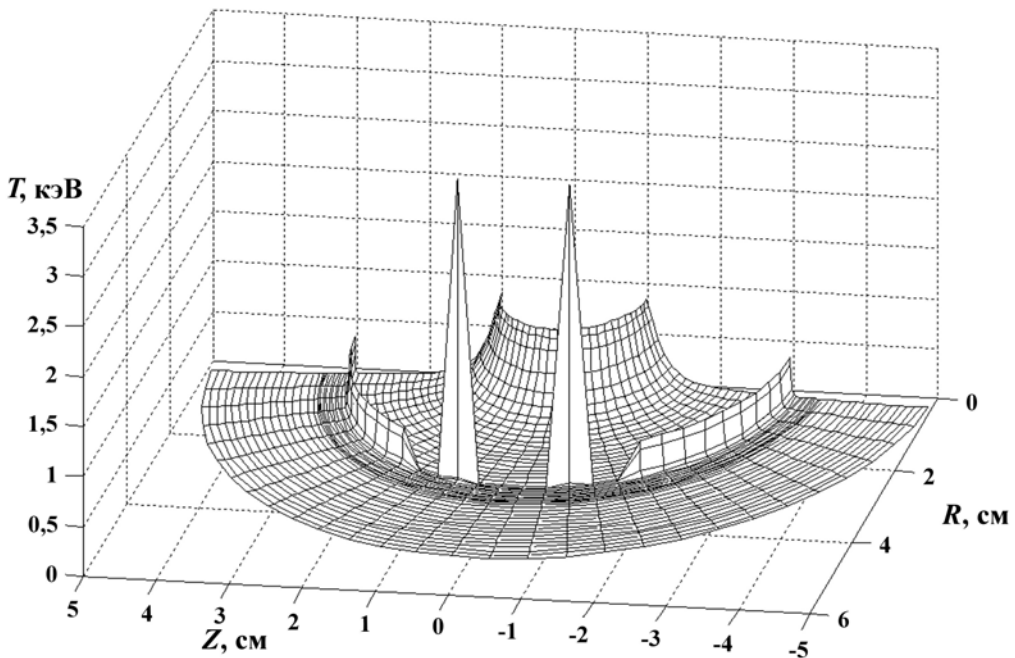


Рис. 5. Задача 2. Температура вещества, полученная по схеме РОМБ

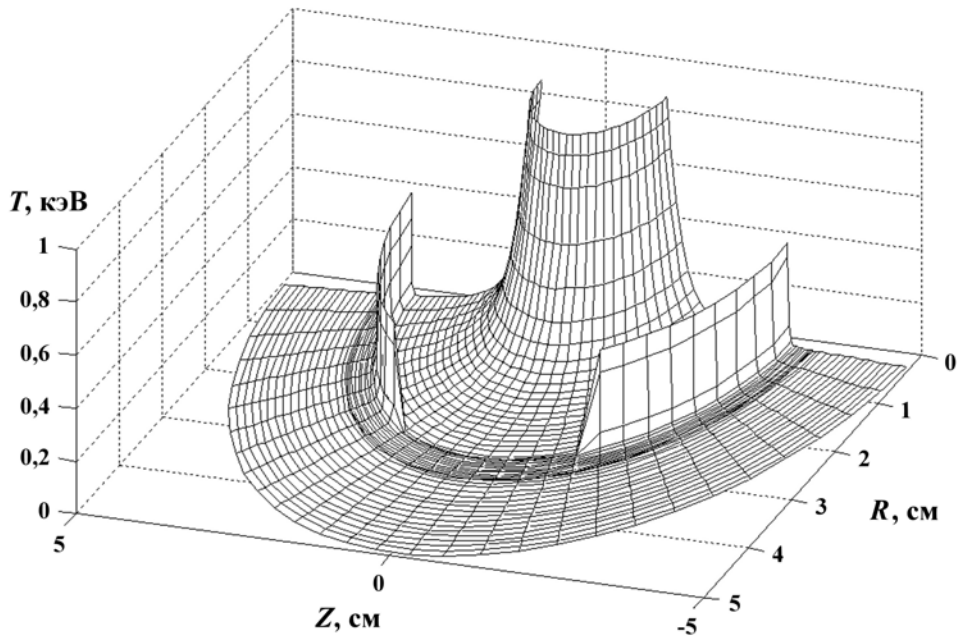


Рис. 6. Задача 2. Температура вещества, полученная по схеме ГРОМ

Особенностью рассматриваемой аппроксимации является недивергентная форма уравнений для компонент потока и различные соотношения связи для плотности излучения в разных уравнениях системы. Это позволяет улучшить качества схемы, сохраняя ее консервативность. При расчете величин для системы квазидиффузии на этапе решения кинетического уравнения применяется схема типа TVD повышенного порядка аппроксимации [14, 15], что также улучшает решение по сравнению со схемой первого порядка. Для итерационного решения нелинейной системы квазидиффузионных уравнений применяется ВДМ-метод, использовавшийся ранее в кинетических и диффузионных моделях [18–20].

Список литературы

1. Гольдин В. Я. Квазидиффузионный метод решения кинетического уравнения // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1964. Т. 4, № 6. С. 1078–1087.
2. Троцкий В. Е. Решение кинетического уравнения и уравнения квазидиффузии по согласованным разностным схемам // Численные методы решения задач математической физики. М.: Наука, 1966. С. 177–185.
3. Четверушкин Б. Н. Математическое моделирование задач динамики излучающего газа. М.: Наука, 1985.
4. Немчинов И. В., Светцов В. В., Шувалов В. В. Решение задачи о распространении сильных интенсивно излучающих ударных волн в воздухе методом осреднения уравнений переноса излучения. М.: ВАГО, 1977. С. 47–89.
5. Антоненко Э. М., Долголёва Г. В., Крупина С. Н. Программа расчета одномерных задач лазерного термоядерного синтеза (SND) // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1994. Вып. 3. С. 3–9.
6. Зуев А. И., Карлыханов Н. Г. Метод решения уравнений радиационно-кондуктивного теплопереноса // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1983. Т. 23, № 4. С. 910–921.
7. Аристова Е. Н., Гольдин В. Я., Колпаков А. В. Перенос излучения через кольцевую щель в теле вращения // Математическое моделирование. 1997. Т. 9, № 4. С. 1–10.

8. Гаджиев А. Д., Селезнёв В. Н., Романова Е. М., Шестаков А. А. Методика ТОМ4-КД для математического моделирования двумерных уравнений переноса излучения в многогрупповом квазидиффузионном приближении // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2001. Вып. 4. С. 48–59.
9. Карлыханов Н. Г. Применение метода квазидиффузии для решения задач переноса излучения // Там же. 2010. Вып. 1. С. 32–38.
10. Карлыханов Н. Г., Уракова А. В., Шнитко С. А. Применение метода квазидиффузии для решения задач переноса излучения в спектральной кинетической постановке в двумерном осесимметричном случае на квадратной сетке // Там же. 2011. Вып. 2. С. 33–43.
11. Исакова А. С., Карлыханов Н. Г. Сравнительный анализ квазидиффузионного подхода и метода усредненных косинусов для решения кинетического уравнения переноса излучения // Там же. 2013. Вып. 3. С. 16–29.
12. Грабовенская С. А., Шестаков А. А. Анализ некоторых схем для решения уравнения переноса излучения квазидиффузионным методом // Там же. 2011. Вып. 4. С. 3–15.
13. Гаджиев А. Д., Грабовенская С. А., Завьялов В. В., Шестаков А. А. Применение TVD-подхода к решению уравнения переноса теплового излучения квазидиффузионным методом // Там же. 2010. Вып. 3. С. 3–14.
14. Гаджиев А. Д., Завьялов В. В., Шестаков А. А. Применение TVD-подхода к DS_n -методу решения уравнения переноса теплового излучения // Там же. 2009. Вып. 2. С. 37–48.
15. Гаджиев А. Д., Завьялов В. В., Шестаков А. А. Применение TVD-подхода к DS_n -методу решения уравнения переноса теплового излучения в осесимметричной RZ -геометрии // Там же. 2010. Вып. 2. С. 30–39.
16. Гаджиев А. Д., Писарев В. Н. Неявный конечно-разностный метод "Ромб" для численного решения уравнений газовой динамики с теплопроводностью // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1979. Т. 19, № 5. С. 1288–1303.
17. Писарев В. Н. О параметрическом семействе схем РОМБ для нелинейного уравнения теплопроводности // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики. 1986. Вып. 3. С. 44–52.
18. Гусев В. Ю., Козманов М. Ю., Рачилов Е. Б. Метод решения неявных разностных уравнений, аппроксимирующих системы уравнений переноса и диффузии излучения // Журнал вычисл. мат. и мат. физ. 1984. Т. 24, № 12. С. 1842–1849.
19. Гаджиев А. Д., Селезнёв В. Н., Шестаков А. А. DS_n -метод с искусственной диссипацией и ВДМ-метод ускорения итераций для численного решения двумерного уравнения переноса теплового излучения в кинетической модели // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2003. Вып. 2. С. 33–46.
20. Гаджиев А. Д., Шестаков А. А. Метод выделения диагональной матрицы для численного решения уравнения переноса излучения в P_1 -приближении по схеме РОМБ // Там же. 2006. Вып. 1. С. 3–13.
21. Fleck J. A., Cummings J. D. An implicit Monte Carlo scheme for calculating time and frequency dependent nonlinear radiation transport // J. Comp. Phys. 1971. Vol. 8(3). P. 313–342.

Статья поступила в редакцию 12.11.13.
