

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИЗОТОПИЧЕСКОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ФОЛДИ–ВАУТХАЙЗЕНА В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

1. Изотопическое представление Фолди–Ваутхайзена и киральная симметрия

В. П. Незнамов

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Вводится изотопическое представление Фолди–Ваутхайзена. В этом представлении получены уравнения для массивных взаимодействующих фермионных полей. В случае, когда гамильтониан взаимодействия коммутирует с матрицей γ^5 , эти уравнения обладают киральной инвариантностью независимо от наличия или отсутствия массы у фермионов. В изотопическом представлении Фолди–Ваутхайзена сохраняются векторный и аксиальный токи независимо от величины массы фермионов. В дираковском представлении аксиальный ток сохраняется лишь в случае безмассовых фермионов. В изотопическом представлении Фолди–Ваутхайзена основное состояние фермионов (вакуум) оказывается вырожденным, и в связи с этим существует возможность спонтанного нарушения четности (P -симметрии). В качестве примера рассмотрено построение кирально-симметричной квантовой электродинамики в изотопическом представлении Фолди–Ваутхайзена. В низайших порядках теории возмущений рассчитан ряд физических процессов. Конечные результаты расчетов совпадают с результатами стандартной теории квантовой электродинамики.

Ключевые слова: Представление Фолди–Ваутхайзена, киральная симметрия, уравнение Дирака, спонтанное нарушение симметрии, векторный и аксиальный токи, квантовая электродинамика, гамильтониан.

Введение

Как известно, в уравнении Дирака массовый член смешивает правые и левые компоненты дираковского биспинора и нарушает киральную симметрию. Киральная симметрия сохраняется лишь для безмассовых фермионов.

В данной работе показано, что для гамильтонианов взаимодействий фермионов с бозонными полями, коммутирующих с матрицей γ^5 , можно построить эквивалентные уравнению Дирака кирально-симметричные интегродифференциальное уравнение и уравнение второго порядка. Эти уравнения можно записать отдельно для левых и правых фермионов, независимо от наличия или отсутствия массы у фермионов.

Линейную форму кирально-симметричных уравнений для взаимодействующих фермионных полей относительно оператора $p_0 = i \frac{\partial}{\partial t}$ можно получить, используя преобразование Фолди–Ваутхайзена [1] в специально введенном изотопическом пространстве, в котором предварительно записывается уравнение Дирака. В этом случае киральная симметрия также сохраняется независимо от величины массы фермионов.

В дираковском представлении сохраняется векторный ток, а аксиальный ток сохраняется лишь для безмассовых фермионов.

Во введенном изотопическом представлении Фолди–Ваутхайзена векторный и аксиальный токи сохраняются независимо от наличия или отсутствия массы у фермионов.

Из трех эквивалентных друг другу уравнений Дирака, записанных по-разному в изотопическом пространстве, можно, применяя одно и то же изотопическое преобразование Фолди–Ваутхайзена, получить три кирально-симметричных уравнения Фолди–Ваутхайзена. По физическому содержанию из-за особенностей преобразования Фолди–Ваутхайзена, сужающего пространство возможных состояний дираковской частицы, эти уравнения отличаются друг от друга. Одно уравнение описывает правые и левые фермионы, а также правые и левые антифермионы. Два других уравнения описывают либо правые фермионы и левые антифермионы, либо левые фермионы и правые антифермионы.

Отсюда следует, что в изотопическом представлении Фолди–Ваутхайзена основное (вакуумное) состояние фермионов оказывается вырожденным. Наряду с кирально-симметричным «морем» фермионов с отрицательной энергией существуют кирально-симметричные вакуумы с нарушенной P -симметрией, а именно существует вакуум с «морем» правых фермионов и вакуум с «морем» левых фермионов. В связи с этим для фермионов возникают предпосылки спонтанного нарушения P -симметрии.

Вышеперечисленные вопросы рассмотрены в разделах 2–5 данной работы. В разделе 1 рассмотрены основные свойства представления Фолди–Ваутхайзена. В разделе 6 в качестве примера рассмотрено построение кирально-симметричной квантовой электродинамики в изотопическом представлении Фолди–Ваутхайзена.

В Приложении 1 приводится алгоритм получения фермионного гамильтониана со взаимодействием в изотопическом представлении Фолди–Ваутхайзена.

В Приложении 2 приведены расчеты некоторых процессов квантовой электродинамики в изотопическом представлении Фолди–Ваутхайзена. Конечные результаты расчетов совпадают с соответствующими результатами стандартной квантовой электродинамики.

1. Основные свойства представления Фолди–Ваутхайзена

Как известно, преобразование Фолди–Ваутхайзена (FW) осуществляется унитарным оператором U_{FW} [1].

При этом волновая функция (дираковский оператор поля) и гамильтониан уравнения Дирака преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned} p_0 \Psi &= H_D \Psi; \\ \Psi_{FW} &= U_{FW} \Psi; \\ H_{FW} &= U_{FW} H_D U_{FW}^\dagger - i U_{FW} \frac{\partial U_{FW}^\dagger}{\partial t}; \\ p_0 \Psi_{FW} &= H_{FW} \Psi_{FW}. \end{aligned} \quad (1)$$

В выражениях (1) и ниже используется система единиц $\hbar = c = 1$; метрика пространства Минковского берется в виде $g^{\mu\nu} = \text{diag}[1, -1, -1, -1]$; $p^\mu = i \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} \right)$; $\Psi(x)$, $\Psi_{FW}(x)$ – четырехкомпонентные волновые функции (операторы поля) в представлении Дирака и Фолди–Ваутхайзена.

В работе матрицы Дирака в гамильтонианах H_D , H_{FW} используются как в представлении Дирака–Паули, так и в киральном представлении, широко употребляемом в Стандартной модели:

– в представлении Дирака–Паули:

$$\beta = \gamma_0 = \rho_3; \quad \alpha^i = \beta \gamma^i = \rho_1 \sigma^i; \quad \gamma^i = i \rho_2 \sigma^i; \quad \gamma^5 = i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = \rho_1; \quad \Sigma^i = E_{4 \times 4} \sigma^i; \quad E_{N \times N} - \text{единичная матрица } N \times N;$$

$$\sigma^i - 2 \times 2 \text{ матрицы Паули}; \quad \rho_1 = \begin{pmatrix} 0 & E_{2 \times 2} \\ E_{2 \times 2} & 0 \end{pmatrix}; \quad \rho_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i E_{2 \times 2} \\ i E_{2 \times 2} & 0 \end{pmatrix}; \quad \rho_3 = \begin{pmatrix} E_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & -E_{2 \times 2} \end{pmatrix};$$

– в киральном представлении:

$$\beta = \gamma_0 = \rho_1; \quad \alpha^i = \beta \gamma^i = \rho_3 \sigma^i; \quad \gamma^i = \beta \alpha^i = -i \rho_2 \sigma^i; \quad \gamma^5 = i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = \rho_3; \quad \Sigma^i = E_{4 \times 4} \sigma^i.$$

Для свободного движения с матрицами α^i , β в представлении Дирака–Паули

$$\begin{aligned} (H_0)_D &= \boldsymbol{\alpha} \mathbf{p} + \beta m; \\ (H_0)_{FW} &= (U_0)_{FW} (H_0)_D (U_0)_{FW}^\dagger = \beta E; \\ (U_0)_{FW} &= R(1+L) = \sqrt{\frac{E+m}{2E}} \left(1 + \frac{\beta \boldsymbol{\alpha} \mathbf{p}}{E+m} \right); \\ E &= \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}, \quad R = \sqrt{\frac{E+m}{2E}}, \quad L = \frac{\beta \boldsymbol{\alpha} \mathbf{p}}{E+m}. \end{aligned} \quad (2)$$

После FW -преобразования уравнение Дирака

$$p_0 \Psi(x) = (\boldsymbol{\alpha} \mathbf{p} + \beta m) \Psi(x) \quad (3)$$

преобразуется в уравнение Фолди–Ваутхайзена

$$p_0 \Psi_{FW}(x) = (H_0)_{FW} \Psi_{FW}(x) = \beta E \Psi_{FW}(x). \quad (4)$$

В уравнении Фолди–Ваутхайзена видна явная несимметрия пространственных координат и времени, хотя само по себе оно лоренц-инвариантно.

Для кирального представления матриц Дирака выражения для оператора преобразования U_{FW}^{chir} и гамильтониана H_{FW}^{chir} получаются из выражений U_{FW} , H_{FW} с матрицами α^i , β , γ^5 в представлении Дирака–Паули с заменой $m \leftrightarrow \Sigma \mathbf{p}$, $\beta \leftrightarrow \gamma^5$ [2]. В частности, для свободного движения уравнение Фолди–Ваутхайзена в киральном представлении имеет вид

$$p_0 \Psi_{FW}(x) = \left(H_0^{chir} \right)_{FW} \Psi_{FW}(x) = \gamma^5 E \Psi_{FW}(x). \quad (5)$$

Решениями свободных уравнений (4), (5) являются плоские волны с положительной и отрицательной энергией

$$\begin{aligned} \Psi_{FW}^{(+)}(x, s) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} U_s e^{-ipx}; \\ \Psi_{FW}^{(-)}(x, s) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} V_s e^{ipx}; \\ U_s &= \begin{pmatrix} \chi_s \\ 0 \end{pmatrix}; \quad V_s = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi_s \end{pmatrix}; \quad p_0 \equiv E. \end{aligned} \quad (6)$$

В выражениях (6) x , p – четырехвекторы, χ_s – двухкомпонентные нормированные спиновые функции Паули.

При наличии общего бозонного поля замкнутого преобразования Фолди–Ваутхайзена не существует.

Для стационарных внешних полей общая форма точного FW -преобразования была найдена Eriksen (Эриксоном) [3].

Другой прямой способ получения преобразования Фолди–Ваутхайзена в случае взаимодействия фермионов с произвольными (в том числе зависящими от времени) бозонными полями получен в работе [4] (см. также обзор [5]). Матрица преобразования и релятивистский гамильтониан получены в виде ряда по степеням константы связи

$$\begin{aligned} U_{FW} &= (U_0)_{FW} (1 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \dots); \\ H_{FW} &= \beta E + K_1 + K_2 + K_3 + \dots \end{aligned} \quad (7)$$

В равенствах (7) $(U_0)_{FW}$ – матрица FW -преобразования для свободных дираковских частиц; $E = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$; $\delta_1, K_1 \sim q$; $\delta_2, K_2 \sim q^2$; $\delta_3, K_3 \sim q^3$; q – константа связи.

Кроме прямых методов перехода к представлению Фолди–Ваутхайзена существует много пошаговых способов получения FW -уравнений и их гамильтонианов. В частности, один из таких методов был использован в классической работе Фолди–Ваутхайзена [1] для получения гамильтониана дираковской частицы в присутствии внешнего электромагнитного поля в виде ряда по степеням $1/m$. Пошаговые методы, как правило, верны для первых двух итераций и полезны лишь в случае слабых бозонных полей и их пространственно-временных производных [6].

В работах [4, 5, 7] представление Фолди–Ваутхайзена использовалось для построения Стандартной модели и в частности квантовой электродинамики. Для учета взаимодействия реальных электрон-позитронных пар произведена модификация FW -представления и рассчитаны конкретные процессы квантовой теории поля.

Сформулируем основные особенности преобразования и представления Фолди–Ваутхайзена:

1. В представлении Фолди–Ваутхайзена гамильтониан H_{FW} является блок-диагональным относительно верхних и нижних компонент волновой функции (оператора поля).
2. Обязательным условием перехода к FW -представлению для свободного движения и движения фермионов в статических внешних бозонных полях является условие равенства нулю либо верхних, либо нижних компонент Ψ_{FW} (условие редукции дираковской волновой функции) [6].
3. Из-за вида базисных волновых функций (операторов поля) в FW -представлении с нулевыми либо верхними, либо нижними компонентами преобразование Фолди–Ваутхайзена при переходе от представления Дирака сужает пространство возможных состояний дираковской частицы. Необходимы специальные меры (модификация FW -преобразования) для возвращения в дираковское пространство состояний.

2. Изотопическое представление Фолди–Ваутхайзена и кирально-симметричные уравнения движения массивных фермионных полей

Рассмотрим плотность гамильтониана дираковской частицы с массой m , взаимодействующей с произвольным векторным бозонным полем $B^\mu(x)$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_D &= \psi^\dagger (\boldsymbol{\alpha} \mathbf{p} + \beta m + q \alpha_\mu B^\mu) \psi = \psi^\dagger (P_L + P_R) (\boldsymbol{\alpha} \mathbf{p} + \beta m + q \alpha_\mu B^\mu) (P_L + P_R) \psi = \\ &= \psi_L^\dagger (\boldsymbol{\alpha} \mathbf{p} + q \alpha_\mu B^\mu) \psi_L + \psi_R^\dagger (\boldsymbol{\alpha} \mathbf{p} + q \alpha_\mu B^\mu) \psi_R + \psi_L^\dagger \beta m \psi_R + \psi_R^\dagger \beta m \psi_L. \end{aligned} \quad (8)$$

В равенствах (8) q – константа взаимодействия; $\alpha^\mu = \begin{cases} 1, & \mu = 0; \\ \alpha^i, & \mu = i = 1, 2, 3; \end{cases}$ $P_L = \frac{1-\gamma_5}{2}$, $P_R = \frac{1+\gamma_5}{2}$ – левый и пра-

вый проекционные операторы; $\psi_L = P_L\psi$, $\psi_R = P_R\psi$ – левая и правая компоненты оператора дираковского поля ψ .

Абелев случай для поля $B^\mu(x)$ рассматривается для простоты. При рассмотрении общего случая дираковской частицы, взаимодействующей с неабелевым бозонным полем, выводы и результаты, полученные в настоящей работе, не изменяются.

Плотность гамильтониана \mathbf{H}_D позволяет получить уравнения для ψ_L и ψ_R

$$\begin{aligned} p_0\psi_L &= (\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p} + q\alpha_\mu B^\mu)\psi_L + \beta m\psi_R; \\ p_0\psi_R &= (\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p} + q\alpha_\mu B^\mu)\psi_R + \beta m\psi_L. \end{aligned} \quad (9)$$

Видно, что и плотность гамильтониана \mathbf{H}_D (8), и уравнения (9) имеют форму, при которой наличие массы у фермионов приводит к смешиванию правых и левых компонент оператора поля ψ , и поэтому киральная симметрия сохраняется лишь для безмассовых фермионов.

2.1. Кирально-симметричные уравнения для массивных фермионов в дираковском представлении

Теперь зададимся вопросом: можно ли записать кирально-симметричные уравнения движения и их гамильтонианы для массивных фермионов?

Из уравнений (9) следует, что

$$\begin{aligned} \psi_L &= (p_0 - \boldsymbol{\alpha}\mathbf{p} - q\alpha_\mu B^\mu)^{-1} \beta m\psi_R; \\ \psi_R &= (p_0 - \boldsymbol{\alpha}\mathbf{p} - q\alpha_\mu B^\mu)^{-1} \beta m\psi_L. \end{aligned} \quad (10)$$

Подставляя (10) в правые части уравнений (9), пропорциональные βm , получаем интегродифференциальные уравнения для ψ_R и ψ_L

$$\begin{aligned} \left[(p_0 - \boldsymbol{\alpha}\mathbf{p} - q(B^0 - \boldsymbol{\alpha}\mathbf{B})) - \beta m (p_0 - \boldsymbol{\alpha}\mathbf{p} - q(B^0 - \boldsymbol{\alpha}\mathbf{B}))^{-1} \beta m \right] \psi_L &= 0; \\ \left[(p_0 - \boldsymbol{\alpha}\mathbf{p} - q(B^0 - \boldsymbol{\alpha}\mathbf{B})) - \beta m (p_0 - \boldsymbol{\alpha}\mathbf{p} - q(B^0 - \boldsymbol{\alpha}\mathbf{B}))^{-1} \beta m \right] \psi_R &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Видно, что уравнения для ψ_R и ψ_L имеют одинаковый вид и в отличие от (9) наличие массы m не приводит к смешиванию правых и левых компонент ψ .

Уравнения (11) можно записать в виде

$$\left[(p_0 - \boldsymbol{\alpha}\mathbf{p} - q\alpha_\mu B^\mu) - (p_0 + \boldsymbol{\alpha}\mathbf{p} - q\bar{\alpha}_\mu B^\mu)^{-1} m^2 \right] \psi_{L,R} = 0. \quad (12)$$

В выражении (12) обозначение $\psi_{L,R}$ указывает на одинаковый вид уравнений для ψ_L и ψ_R ; $\bar{\alpha}_\mu = \begin{cases} 1 \\ -\alpha^i \end{cases}$.

Если умножить уравнение (12) слева на множитель $p_0 + \boldsymbol{\alpha}\mathbf{p} - q\bar{\alpha}_\mu B^\mu$, то получим уравнение второго порядка по p^μ

$$\left[(p_0 + \boldsymbol{\alpha}\mathbf{p} - q\bar{\alpha}_\mu B^\mu)(p_0 - \boldsymbol{\alpha}\mathbf{p} - q\alpha_\mu B^\mu) - m^2 \right] \psi_{L,R} = 0. \quad (13)$$

Для случая квантовой электродинамики ($q = e$, $B^\mu = A^\mu$) уравнение (13) имеет вид

$$\left[(p_0 - eA_0)^2 - (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 - m^2 + e\Sigma\mathbf{H} + ie\boldsymbol{\alpha}\mathbf{E} \right] \psi_{L,R} = 0. \quad (14)$$

В уравнении (14) $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$ – магнитное поле, $\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \nabla A_0$ – электрическое поле.

Уравнение (14) совпадает с уравнением второго порядка, полученным Дираком в 1920-е годы для биспинора ψ [8]. Однако в отличие от [8] (см. также [9]) уравнение (14) записано для левых и правых компонент биспинора ψ и не содержит «лишних» решений. Оператор γ_5 коммутирует с уравнениями (13), (14). Следовательно, $\gamma_5\psi = \delta\psi$ ($\delta^2 = 1$; $\delta = \pm 1$). Случай $\delta = -1$ соответствует решениям (13), (14) для ψ_L , а $\delta = +1$ соответствует решениям (13), (14) для ψ_R .

Таким образом, выражения (12), (13) показывают, что для изначально массивных фермионов, взаимодействующих с бозонными полями, уравнения движения могут быть записаны в кирально-симметричном виде.

2.2. Изотопическое представление Фолди–Ваутхайзена для массивных фермионов

Уравнения (12), (13) являются нелинейными относительно оператора $p_0 = i \frac{\partial}{\partial t}$. Линейную форму кирально-симметричных уравнений фермионных полей относительно p_0 можно получить, используя преобразование Фолди–Ваутхайзена [1] в специально введенном изотопическом пространстве.

Введем восьмикомпонентный оператор поля $\Phi_1 = \begin{pmatrix} \Psi_R \\ \Psi_L \end{pmatrix}$ и изотопические матрицы $\tau_3 = \begin{pmatrix} E_{4 \times 4} & 0 \\ 0 & -E_{4 \times 4} \end{pmatrix}$, $\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & E_{4 \times 4} \\ E_{4 \times 4} & 0 \end{pmatrix}$, действующие на четыре верхние и четыре нижние компоненты оператора Φ_1 . Теперь уравнения (9) можно записать в виде

$$p_0 \Phi_1 = (\boldsymbol{\alpha} \mathbf{p} + \tau_1 \beta m + g \alpha_\mu B^\mu) \Phi_1. \quad (15)$$

Поскольку τ_1 коммутирует с правой частью (15), то поле $\Phi_2 = \tau_1 \Phi_1 = \begin{pmatrix} \Psi_L \\ \Psi_R \end{pmatrix}$ также является решением уравнения (15):

$$p_0 \Phi_2 = (\boldsymbol{\alpha} \mathbf{p} + \tau_1 \beta m + g \alpha_\mu B^\mu) \Phi_2. \quad (16)$$

Наконец, введем шестнадцатикомпонентный спинор

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_R \\ \Psi_L \\ \Psi_L \\ \Psi_R \end{pmatrix} \quad (17)$$

и введем обобщение изотопических матриц τ_1, τ_3 :

$$E_{16 \times 16} \tau_1 = \Sigma_1^I; \quad E_{16 \times 16} \tau_3 = \Sigma_3^I; \quad \rho_1^I \tau_1 = \alpha_1^I; \quad (18)$$

$$\rho_1^I = \begin{pmatrix} 0 & E_{8 \times 8} \\ E_{8 \times 8} & 0 \end{pmatrix}; \quad \rho_3^I = \begin{pmatrix} E_{8 \times 8} & 0 \\ 0 & -E_{8 \times 8} \end{pmatrix}; \quad \rho_2^I = i \rho_3^I \rho_1^I.$$

В выражениях (18) значок «I» указывает, что введенные матрицы, так же как и матрицы τ_1, τ_3 , действуют в изотопическом пространстве, не затрагивая внутренней структуры полей Ψ_R, Ψ_L .

Уравнение Дирака для $\Phi(x)$ с учетом (18) можно записать в следующем виде:

$$p_0 \Phi(x) = \left(\boldsymbol{\alpha} \mathbf{p} + \Sigma_1^I \beta m + \frac{1}{2} (E_{16 \times 16} + \alpha_1^I) g \alpha_\mu B^\mu \right) \Phi(x). \quad (19)$$

С учетом спинорной структуры $\Phi(x)$ (см. (17)) в уравнении (19) содержатся уравнения (9) в удвоенном количестве.

Уравнения (15), (16), (19) в дираковском представлении по своим физическим следствиям эквивалентны друг другу, но, как будет показано ниже, каждое из них имеет свои особенности в изотопическом представлении Фолди–Ваутхайзена (IFW).

Рассмотрим далее уравнения (15), (16) без бозонных полей B^μ (свободное движение):

$$p_0 \Phi_{1,2} = (\boldsymbol{\alpha} \mathbf{p} + \tau_1 \beta m) \Phi_{1,2}. \quad (20)$$

Запись $\Phi_{1,2}$ показывает одинаковость уравнений (20) для полей Φ_1, Φ_2 .

Найдем преобразование Фолди–Ваутхайзена в изотопическом пространстве для уравнения (20), используя преобразование Эриксена [3]

$$(U_0)_{IFW} = U_{Er} = \frac{1}{2} (1 + \tau_3 \lambda) \left(\frac{1}{2} + \frac{\tau_3 \lambda + \lambda \tau_3}{4} \right)^{-1/2}. \quad (21)$$

В выражении (21) $\lambda = \frac{\boldsymbol{\alpha} \mathbf{p} + \tau_1 \beta m}{E}$; $E = (\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2}$. Поскольку $(\boldsymbol{\alpha} \mathbf{p} + \tau_1 \beta m)^2 = E^2$, то $\lambda^2 = 1$.

Выражение (21) можно преобразовать к виду

$$(U_0)_{IFW} = U_{Er} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\tau_3 \boldsymbol{\alpha} \mathbf{p} + \tau_3 \tau_1 \beta m}{E} \right) \left(\frac{1}{2} + \frac{\tau_3 \boldsymbol{\alpha} \mathbf{p}}{2E} \right)^{-1/2} = \sqrt{\frac{E + \tau_3 \boldsymbol{\alpha} \mathbf{p}}{2E}} \left(1 + \frac{1}{E + \tau_3 \boldsymbol{\alpha} \mathbf{p}} \tau_3 \tau_1 \beta m \right). \quad (22)$$

Преобразование (22) унитарно $\left((U_0)_{IFW} (U_0)_{IFW}^\dagger = 1 \right)$ и

$$(H_0)_{IFW} = (U_0)_{IFW} (\boldsymbol{\alpha} \mathbf{p} + \tau_1 \beta m) (U_0)_{IFW}^\dagger = \tau_3 E. \quad (23)$$

Таким образом, в изотопическом представлении Фолди–Ваутхайзена уравнение (20) имеет вид

$$p_0 (\Phi_{1,2})_{IFW} = \tau_3 E (\Phi_{1,2})_{IFW}. \quad (24)$$

Поскольку $(U_0)_{IFW} \tau_1 (U_0)_{IFW}^\dagger = \tau_3 E$, аналогом соотношения $\Phi_2 = \tau_1 \Phi_1$ в IFW -представлении является соотношение

$$(\Phi_2)_{IFW} = \tau_3 \beta (\Phi_1)_{IFW}. \quad (25)$$

При переходе к изотопическому представлению Фолди–Ваутхайзена кроме выполнения условия блок-диагональности гамильтониана в уравнении (24) обязательным является также условие равенства нулю верхних или нижних компонент Φ_1, Φ_2 (условие редукции полей Φ_1, Φ_2) [6].

Проверим, выполняется ли для нашего случая это условие. С учетом соотношений (9), (10) нормированные решения уравнения (20) для волновых функций Φ_1, Φ_2 можно записать в виде

$$\begin{aligned} \Phi_1^{(+)}(\mathbf{x}, t) &= e^{-iEt} \sqrt{\frac{E + \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{p}}{2E}} \begin{pmatrix} \psi_R^{(+)}(\mathbf{x}) \\ \frac{1}{E - \boldsymbol{\alpha} \mathbf{p}} \beta m \psi_R^{(+)}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}; & \Phi_1^{(-)}(\mathbf{x}, t) &= e^{iEt} \sqrt{\frac{E + \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{p}}{2E}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{E + \boldsymbol{\alpha} \mathbf{p}} \beta m \psi_L^{(-)}(\mathbf{x}) \\ \psi_L^{(-)}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}; \\ \Phi_2^{(+)}(\mathbf{x}, t) &= e^{-iEt} \sqrt{\frac{E - \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{p}}{2E}} \begin{pmatrix} \psi_L^{(+)}(\mathbf{x}) \\ \frac{1}{E - \boldsymbol{\alpha} \mathbf{p}} \beta m \psi_L^{(+)}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}; & \Phi_2^{(-)}(\mathbf{x}, t) &= e^{iEt} \sqrt{\frac{E - \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{p}}{2E}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{E + \boldsymbol{\alpha} \mathbf{p}} \beta m \psi_R^{(-)}(\mathbf{x}) \\ \psi_R^{(-)}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (26)$$

В (26) $\Phi_1^{(+)}, \Phi_2^{(+)}; \Phi_1^{(-)}, \Phi_2^{(-)}$ – соответственно решения уравнения (20) с положительной и отрицательной энергией.

При использовании матриц α^i, β в представлении Дирака–Паули правые и левые компоненты волновых функций для решений с положительной и отрицательной энергией равны

$$\begin{aligned} \psi_R^{(+)}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) \psi_D^{(+)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{E + m}{2E}} \begin{pmatrix} \left(1 + \frac{\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}}{E + m} \right) \varphi^{(+)}(\mathbf{x}) \\ \left(1 + \frac{\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}}{E + m} \right) \varphi^{(+)}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}; \\ \psi_R^{(-)}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) \psi_D^{(-)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{E + m}{2E}} \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}}{E + m} \right) \chi^{(-)}(\mathbf{x}) \\ \left(1 - \frac{\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}}{E + m} \right) \chi^{(-)}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}; \\ \psi_L^{(+)}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) \psi_D^{(+)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{E + m}{2E}} \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}}{E + m} \right) \varphi^{(+)}(\mathbf{x}) \\ -\left(1 - \frac{\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}}{E + m} \right) \varphi^{(+)}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}; \\ \psi_L^{(-)}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) \psi_D^{(-)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{E + m}{2E}} \begin{pmatrix} -\left(1 + \frac{\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}}{E + m} \right) \chi^{(-)}(\mathbf{x}) \\ \left(1 + \frac{\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}}{E + m} \right) \chi^{(-)}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (27)$$

В выражениях (27) $\varphi^{(+)}(\mathbf{x}), \chi^{(-)}(\mathbf{x})$ – нормированные двухкомпонентные решения уравнения Дирака с положительной и отрицательной энергией. В (26), (27) E и \mathbf{p} – операторы энергии и импульса дираковской частицы.

В соответствии с (27)

$$\begin{aligned}\alpha\mathbf{p}\psi_R^{(+)}(\mathbf{x}) &= \Sigma\mathbf{p}\psi_R^{(+)}(\mathbf{x}); & \alpha\mathbf{p}\psi_R^{(-)}(\mathbf{x}) &= \Sigma\mathbf{p}\psi_R^{(-)}(\mathbf{x}); \\ \alpha\mathbf{p}\psi_L^{(+)}(\mathbf{x}) &= -\Sigma\mathbf{p}\psi_L^{(+)}(\mathbf{x}); & \alpha\mathbf{p}\psi_L^{(-)}(\mathbf{x}) &= -\Sigma\mathbf{p}\psi_L^{(-)}(\mathbf{x}).\end{aligned}\quad (28)$$

Из выражений (27) следуют условия нормировки:

$$\begin{aligned}\psi_R^{(+)\dagger}(\mathbf{x})\psi_R^{(+)}(\mathbf{x}) &= \varphi^{(+)\dagger}(\mathbf{x})\frac{E+\sigma\mathbf{p}}{2E}\varphi^{(+)}(\mathbf{x}); \\ \psi_R^{(-)\dagger}(\mathbf{x})\psi_R^{(-)}(\mathbf{x}) &= \chi^{(-)\dagger}(\mathbf{x})\frac{E-\sigma\mathbf{p}}{2E}\chi^{(-)}(\mathbf{x}); \\ \psi_L^{(+)\dagger}(\mathbf{x})\psi_L^{(+)}(\mathbf{x}) &= \varphi^{(+)\dagger}(\mathbf{x})\frac{E-\sigma\mathbf{p}}{2E}\varphi^{(+)}(\mathbf{x}); \\ \psi_L^{(-)\dagger}(\mathbf{x})\psi_L^{(-)}(\mathbf{x}) &= \chi^{(-)\dagger}(\mathbf{x})\frac{E+\sigma\mathbf{p}}{2E}\chi^{(-)}(\mathbf{x}).\end{aligned}\quad (29)$$

Действуя на Φ_1, Φ_2 (см. (26)) матрицей преобразования $(U_0)_{IFW}$ (22), получаем

$$\begin{aligned}\Phi_{1IFW}^{(+)}(\mathbf{x}, t) &= (U_0)_{IFW} \Phi_1^{(+)}(\mathbf{x}, t) = e^{-iEt} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2E}{E+\Sigma\mathbf{p}}} \psi_R^{(+)}(\mathbf{x}) \\ 0 \end{pmatrix} = e^{-iEt} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \varphi^{(+)}(\mathbf{x}) \\ \varphi^{(+)}(\mathbf{x}) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \\ \Phi_{1IFW}^{(-)}(\mathbf{x}, t) &= (U_0)_{IFW} \Phi_1^{(-)}(\mathbf{x}, t) = e^{iEt} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{\frac{2E}{E+\Sigma\mathbf{p}}} \psi_L^{(-)}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = e^{iEt} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\chi^{(-)}(\mathbf{x}) \\ \chi^{(-)}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}; \\ \Phi_{2IFW}^{(+)}(\mathbf{x}, t) &= (U_0)_{IFW} \Phi_2^{(+)}(\mathbf{x}, t) = e^{-iEt} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2E}{E-\Sigma\mathbf{p}}} \psi_L^{(+)}(\mathbf{x}) \\ 0 \end{pmatrix} = e^{-iEt} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \varphi^{(+)}(\mathbf{x}) \\ -\varphi^{(+)}(\mathbf{x}) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \\ \Phi_{2IFW}^{(-)}(\mathbf{x}, t) &= (U_0)_{IFW} \Phi_2^{(-)}(\mathbf{x}, t) = e^{iEt} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{\frac{2E}{E-\Sigma\mathbf{p}}} \psi_R^{(-)}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = e^{iEt} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \chi^{(-)}(\mathbf{x}) \\ \chi^{(-)}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (30)$$

Из соотношений (30) видно, что условие редукции выполняется и действительно матрица $(U_0)_{IFW}$ является преобразованием Фолди–Вутхайзена для полей Φ_1, Φ_2 во введенном нами изотопическом пространстве.

Для матриц Дирака в киральном представлении, следуя соотношениям (27)–(30), можно получить следующий вид базисных функций в IFW -представлении:

$$\begin{aligned}\Phi_{1IFW}^{(+)}(\mathbf{x}, t) &= e^{-iEt} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2E}{E+\Sigma\mathbf{p}}} \psi_R^{(+)}(\mathbf{x}) \\ 0 \end{pmatrix} = e^{-iEt} \begin{pmatrix} \varphi^{(+)}(\mathbf{x}) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; & \Phi_{1IFW}^{(-)}(\mathbf{x}, t) &= e^{iEt} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2E}{E+\Sigma\mathbf{p}}} \psi_R^{(+)}(\mathbf{x}) \\ 0 \end{pmatrix} = e^{iEt} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \chi^{(-)}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}; \\ \Phi_{2IFW}^{(+)}(\mathbf{x}, t) &= e^{-iEt} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2E}{E+\Sigma\mathbf{p}}} \psi_R^{(+)}(\mathbf{x}) \\ 0 \end{pmatrix} = e^{-iEt} \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi^{(+)}(\mathbf{x}) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; & \Phi_{2IFW}^{(-)}(\mathbf{x}, t) &= e^{iEt} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2E}{E+\Sigma\mathbf{p}}} \psi_R^{(+)}(\mathbf{x}) \\ 0 \end{pmatrix} = e^{-iEt} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\chi^{(-)}(\mathbf{x}) \\ 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (31)$$

Естественно, в киральном представлении по-прежнему выполняется соотношение (25) для взаимосвязи функций $\Phi_{1IFW}(x)$ с $\Phi_{2IFW}(x)$.

Базисные функции (30), (31) являются также решениями свободного уравнения (19), преобразованного в IFW -представление. Действительно, с учетом определений (17), (18) для свободного движения уравнение (19) имеет вид

$$P_0 \begin{pmatrix} \Phi_1(x) \\ \Phi_2(x) \end{pmatrix} = (\alpha \mathbf{p} + E_{16 \times 16} \tau_1 \beta m) \begin{pmatrix} \Phi_1(x) \\ \Phi_2(x) \end{pmatrix}. \quad (32)$$

Применяя матрицу преобразования (22) к верхним и нижним компонентам уравнения (32), получаем

$$P_0 \begin{pmatrix} \Phi_{1IFW}(x) \\ \Phi_{2IFW}(x) \end{pmatrix} = E_{16 \times 16} \tau_3 E \begin{pmatrix} \Phi_{1IFW}(x) \\ \Phi_{2IFW}(x) \end{pmatrix}. \quad (33)$$

Базисные функции (30), (31) ортонормированны и полны. Условия полноты совместно включают в себя функции $\Phi_{1IFW}^{(\pm)}$ и $\Phi_{2IFW}^{(\pm)}$.

$$\sum_{\pm s} \Phi_{1IFW}^{(+)}(\mathbf{x}, t)_\alpha \Phi_{1IFW}^{(+)\dagger}(\mathbf{x}', t)_\beta = \left[\frac{1}{2}(1 + \tau_3) \frac{1}{2}(1 + \gamma^5) \right]_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'); \quad (34)$$

$$\sum_{\pm s} \Phi_{2IFW}^{(+)}(\mathbf{x}, t)_\alpha \Phi_{2IFW}^{(+)\dagger}(\mathbf{x}', t)_\beta = \left[\frac{1}{2}(1 + \tau_3) \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) \right]_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'); \quad (35)$$

$$\sum_{\pm s} \Phi_{1IFW}^{(-)}(\mathbf{x}, t)_\alpha \Phi_{1IFW}^{(-)\dagger}(\mathbf{x}', t)_\beta = \left[\frac{1}{2}(1 - \tau_3) \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) \right]_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'); \quad (36)$$

$$\sum_{\pm s} \Phi_{2IFW}^{(-)}(\mathbf{x}, t)_\alpha \Phi_{2IFW}^{(-)\dagger}(\mathbf{x}', t)_\beta = \left[\frac{1}{2}(1 - \tau_3) \frac{1}{2}(1 + \gamma^5) \right]_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'); \quad (37)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{\pm s} \left(\Phi_{1IFW}^{(+)}(\mathbf{x}, t)_\alpha \Phi_{1IFW}^{(+)}(\mathbf{x}', t)_\beta + \Phi_{1IFW}^{(-)}(\mathbf{x}, t)_\alpha \Phi_{1IFW}^{(-)}(\mathbf{x}', t)_\beta + \right. \\ & \left. + \Phi_{2IFW}^{(+)}(\mathbf{x}, t)_\alpha \Phi_{2IFW}^{(+)\dagger}(\mathbf{x}', t)_\beta + \Phi_{2IFW}^{(-)}(\mathbf{x}, t)_\alpha \Phi_{2IFW}^{(-)\dagger}(\mathbf{x}', t)_\beta \right) = \delta_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \end{aligned} \quad (38)$$

Отметим также следующие полезные соотношения: выражения $\sum_{\pm s} \Phi_{1IFW}^{(+)}(\mathbf{x}, t)_\alpha \Phi_{2IFW}^{(+)}(\mathbf{x}', t)_\beta$ и $\sum_{\pm s} \Phi_{2IFW}^{(+)}(\mathbf{x}, t)_\alpha \Phi_{1IFW}^{(+)}(\mathbf{x}', t)_\beta$ отличаются соответственно от (34) и (35) наличием матрицы β после квадратной скобки; выражения $\sum_{\pm s} \Phi_{1IFW}^{(-)}(\mathbf{x}, t)_\alpha \Phi_{2IFW}^{(-)}(\mathbf{x}', t)_\beta$ и $\sum_{\pm s} \Phi_{2IFW}^{(-)}(\mathbf{x}, t)_\alpha \Phi_{1IFW}^{(-)}(\mathbf{x}', t)_\beta$ отличаются соответственно от (36) и (37) наличием матрицы $(-\beta)$ после квадратной скобки.

При наличии бозонных полей $B^\mu(x)$, взаимодействующих с фермионными полями $\Phi_1(x), \Phi_2(x)$, изотопическое преобразование Фолди–Ваутхайзена и вид гамильтонианов уравнений (15), (16), (19) в IFW -представлении можно получить в виде ряда по степеням константы связи, используя алгоритм, описанный в [4, 5].

В результате в обозначениях [4, 5] получаем

$$(\Phi_{1,2})_{IFW} = U_{IFW} \Phi_{1,2}; \quad (39)$$

$$U_{IFW} = (1 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \dots)(U_0)_{IFW};$$

$$(\Phi)_{IFW} = U_{IFW}^\Phi \Phi; \quad (40)$$

$$U_{IFW}^\Phi = (1 + \delta_1^\Phi + \delta_2^\Phi + \delta_3^\Phi + \dots)(U_0^\Phi)_{IFW}.$$

Действуя одним и тем же преобразованием (39) на каждое из уравнений (15), (16), получаем следующие уравнения и плотности гамильтонианов в изотопическом представлении Фолди–Ваутхайзена:

$$P_0 (\Phi_1)_{IFW} = (\tau_3 E + K_1 + K_2 + K_3 + \dots) (\Phi_1)_{IFW}; \quad (41)$$

$$\mathbf{H}^I_{IFW} = I (\Phi_1)_{IFW}^\dagger (\tau_3 E + K_1 + K_2 + K_3 + \dots) (\Phi_1)_{IFW}; \quad (42)$$

$$P_0 (\Phi_2)_{IFW} = (\tau_3 E + K_1 + K_2 + K_3 + \dots) (\Phi_2)_{IFW}; \quad (43)$$

$$\mathbf{H}^II_{IFW} = (\Phi_2)_{IFW}^\dagger (\tau_3 E + K_1 + K_2 + K_3 + \dots) (\Phi_2)_{IFW}. \quad (44)$$

Аналогично, действуя преобразованиями (40) на уравнение (19), получаем

$$p_0 \Phi_{IFW} = (E_{16 \times 16} \tau_3 E + K_1^\Phi + K_2^\Phi + K_3^\Phi + \dots) \Phi_{IFW}; \quad (45)$$

$$\mathbf{H}_{IFW}^{III} = (\Phi)_{IFW}^\dagger (E_{16 \times 16} \tau_3 E + K_1^\Phi + K_2^\Phi + K_3^\Phi + \dots) (\Phi)_{IFW}. \quad (46)$$

Для иллюстрации явные выражения в импульсном представлении для восьмимерных операторов K_1 , K_2 , K_3 в (41)–(44) приведены в Приложении 1. Шестнадцатимерные операторы K_n^Φ в (45), (46) являются обобщением выражений K_n с заменой

$$\tau_1 \rightarrow E_{16 \times 16} \tau_1, \quad \tau_3 \rightarrow E_{16 \times 16} \tau_3, \quad q \rightarrow q^\Phi = \frac{1}{2} (E_{16 \times 16} + \alpha_1') q. \quad (47)$$

Выражения для операторов C , N , C^Φ , N^Φ , составляющих согласно [4, 5] основу при записи гамильтониана взаимодействия в FW -представлении, для изотопического представления Фолди–Ваутхайзена записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} C &= \left[(U_0)_{IFW} q \alpha_\mu B_\mu (U_0)_{IFW}^\dagger \right]^{even} = R (q B^0 - L q B^0 L) R - R (q \alpha \mathbf{B} - L q \alpha \mathbf{B} L) R; \\ N &= \left[(U_0)_{IFW} q \alpha_\mu B_\mu (U_0)_{IFW}^\dagger \right]^{odd} = R (L q B^0 - q B^0 L) R - R (L q \alpha \mathbf{B} - q \alpha \mathbf{B} L) R; \\ R &= \sqrt{\frac{E + \tau_3 \alpha \mathbf{p}}{2E}}; \quad L = \frac{1}{E + \tau_3 \alpha \mathbf{p}} \tau_3 \tau_1 \beta m. \end{aligned} \quad (48)$$

Выражения для шестнадцатимерных операторов C^Φ , N^Φ в (45), (46) получаются из выражений (48) с заменой (47):

$$\begin{aligned} C^\Phi &= R^\Phi (q^\Phi B^0 - L^\Phi q^\Phi B^0 L^\Phi) R^\Phi - R^\Phi (q^\Phi \alpha \mathbf{B} - L^\Phi q^\Phi \alpha \mathbf{B} L^\Phi) R^\Phi; \\ N^\Phi &= R^\Phi (L^\Phi q^\Phi B^0 - q^\Phi B^0 L^\Phi) R^\Phi - R^\Phi (L^\Phi q^\Phi \alpha \mathbf{B} - q^\Phi \alpha \mathbf{B} L^\Phi) R^\Phi; \\ R^\Phi &= \sqrt{\frac{E + E_{16 \times 16} \tau_3 \alpha \mathbf{p}}{2E}}; \quad L^\Phi = \frac{1}{E + E_{16 \times 16} \tau_3 \alpha \mathbf{p}} E_{16 \times 16} \tau_3 E_{16 \times 16} \tau_1 \beta m. \end{aligned} \quad (49)$$

В выражениях (48) значки *even*, *odd* обозначают четную и нечетную части операторов, соответственно не связывающую и связывающую верхние и нижние изотопические компоненты $(\Phi_1)_{IFW}$ и $(\Phi_2)_{IFW}$.

Заметим, что при решении практических задач в квантовой теории поля с использованием теории возмущений фермионные поля разлагаются по решениям уравнений Дирака для свободного движения или для движения в статических внешних полях. В нашем случае в изотопическом представлении Фолди–Ваутхайзена мы также можем разложить соответствующие фермионные поля по базису решений (30), (31) или по схожему в изотопическом пространстве базису решений изотопических уравнений Фолди–Ваутхайзена в статических внешних полях и выразить через них гамильтонианы (42), (44), (46).

По определению восьмимерные операторы K_n в гамильтонианах (42), (44) являются четными относительно верхних и нижних изотопических компонент и по этой причине содержат четное число нечетных операторов N . Шестнадцатимерные операторы K^Φ содержат четные и нечетные части из-за вида q^Φ в (47). По своей структуре операторы K_n^Φ подобны операторам K_n , поэтому они содержат также четное число операторов N^Φ . Нечетные части операторов K^Φ позволяют осуществлять связь между полями Φ_{1FW} , Φ_{2FW} и с учетом их структуры осуществлять взаимодействие лишь между левыми частицами и левыми античастицами, а также лишь между правыми частицами и правыми античастицами.

Таким образом, проведенное рассмотрение показывает, что в изотопическом представлении Фолди–Ваутхайзена в случае рассмотренного взаимодействия уравнения фермионных полей (41), (43), (45) и их гамильтонианы фактически записаны в кирально-симметричном виде независимо от наличия или отсутствия массы у фермионов.

2.3. Киральная инвариантность в изотопическом представлении Фолди–Ваутхайзена

В изотопическом представлении Фолди–Ваутхайзена для свободного движения гамильтониан (23) и уравнение (24) инвариантны относительно кирального преобразования

$$(\Phi_{1,2})_{IFW} \rightarrow e^{i\alpha \gamma^5} (\Phi_{1,2})_{IFW}. \quad (50)$$

Данная инвариантность не зависит от наличия или отсутствия массы у фермионов.

Заметим, что если использовать в показателях экспонент в выражении (50) оператор

$$(\gamma^5)_{IFW} = (U_0)_{IFW} \gamma^5 (U_0)_{IFW}^\dagger = \gamma^5 \left(\frac{\tau_3 \alpha \mathbf{p}}{E} - \frac{\tau_3 \tau_1 \beta m}{E} \right), \quad (51)$$

то при ненулевой массе фермиона гамильтониан (23) и уравнение (24) не инвариантны относительно преобразования в IFW -представлении

$$(\Phi_{1,2})_{IFW} \rightarrow e^{i\alpha(\gamma^5)_{IFW}} (\Phi_{1,2})_{IFW}, \quad (52)$$

подобно аналогичному преобразованию с оператором γ^5 в дираковском представлении для массивных фермионов

$$(\Phi_{1,2}) \rightarrow e^{i\alpha(\gamma^5)} (\Phi_{1,2}). \quad (53)$$

Оператор $(\gamma^5)_{IFW}$ связан со спиральностью фермионов в изотопическом представлении Фолди–Ваутхайзена.

Поскольку базисные функции свободного движения (30), (31) в IFW -представлении сохранили вид правых и левых компонент операторов поля, используемых в дираковском представлении $(\psi_{R,L} = 1/2(1 \pm \gamma^5)\psi)$, выбор кирального преобразования (50) вполне оправдан.

Для случая выбранного нами в дираковском представлении взаимодействия $q\alpha_\mu B^\mu(x)$ с матрицами α_μ , коммутирующими с γ^5 , киральная симметрия уравнений и гамильтонианов (41)–(46) также сохраняется. Действительно, в выражениях (41)–(46) единственными из операторов, не коммутирующих с γ^5 , являются операторы L , L^Φ (см. (48), (49)). Однако в выражениях для C и C^Φ (см. (48), (49)) операторы L , L^Φ содержатся в четном виде. Также в четном виде выражения N и N^Φ содержатся соответственно в операторах K_n и K_n^Φ . Следовательно, оператор γ^5 коммутирует с гамильтонианами уравнений (41), (43), (45).

Проведенное рассмотрение показывает, что в изотопическом представлении Фолди–Ваутхайзена уравнения массивных фермионных полей (41), (43), (45) и их гамильтонианы инвариантны относительно кирального преобразования (50).

Из-за унитарности IFW -преобразования эквивалентные уравнения Дирака (15), (16), (19) с взаимодействием $q\alpha_\mu B^\mu(x)$ соответственно инвариантны относительно преобразований

$$\Phi_{1,2} \rightarrow e^{i\alpha(\gamma^5)_D} \Phi_{1,2}; \quad (54)$$

$$(\gamma^5)_D = U_{IFW}^\dagger \gamma^5 U_{IFW}. \quad (55)$$

Для свободного случая выражение (55) равно

$$(\gamma^5)_D = (U_0)_{FW}^\dagger \gamma^5 (U_0)_{FW} = \gamma^5 \left(\frac{\tau_3 \alpha \mathbf{p}}{E} + \frac{\tau_3 \tau_1 \beta m}{E} \right). \quad (56)$$

В равенстве (56) оператор $E = (m^2 + \mathbf{p}^2)^{1/2}$ является нелокальным с бесконечным числом операторов дифференцирования $p^i = -i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $i = 1, 2, 3$.

В случае взаимодействия оператор (55) представляет собой сложное выражение, зависящее от бозонных полей $B^\mu(x)$.

Насколько известно автору, инвариантность уравнения Дирака относительно преобразования (54) ранее в литературе не рассматривалась.

2.4. Физическое содержание кирально-симметричных уравнений и их гамильтонианов в изотопическом представлении Фолди–Ваутхайзена

Далее рассмотрим физическое содержание гамильтонианов и уравнений (41)–(46) с помощью символических картин на рис. 1–3.

Первоначально рассмотрим уравнение (45) и гамильтониан \mathbf{H}_{IFW}^{III} (46). Символически соответствующая физическая картина изображена на рис. 1.

$$\begin{array}{ccc}
E > 0 & & E < 0 \\
T_3 = +\frac{1}{2} & & T_3 = -\frac{1}{2} \\
\Phi_{IFW}^{(+)}(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} \Phi_{1IFW}^{(+)}(\mathbf{x}, t) \\ \Phi_{2IFW}^{(+)}(\mathbf{x}, t) \end{pmatrix} = e^{-iEt} \begin{pmatrix} A\Psi_R^{(+)}(\mathbf{x}) \\ 0 \\ A_1\Psi_L^{(+)}(\mathbf{x}) \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \mathbf{H}^{III}_{IFW} \\ \leftarrow \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \rightarrow \\ \leftarrow \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \rightarrow \end{array} & \Phi_{IFW}^{(-)}(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} \Phi_{1IFW}^{(-)}(\mathbf{x}, t) \\ \Phi_{2IFW}^{(-)}(\mathbf{x}, t) \end{pmatrix} = e^{iEt} \begin{pmatrix} 0 \\ A_1\Psi_L^{(-)}(\mathbf{x}) \\ 0 \\ A\Psi_R^{(-)}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}
\end{array}$$

Рис. 1. P -симметричный набор частиц и античастиц

Левая полуплоскость рис. 1 представляет собой состояния базисных функций (30) с изотопическим спином $T_3 = +\frac{1}{2}$ и с положительной энергией $E > 0$; на правой полуплоскости изображены состояния с $T_3 = -\frac{1}{2}$ и с отрицательной энергией $E < 0$. Гамильтониан содержит состояния левых и правых фермионов и левых и правых антифермионов; частицы и античастицы взаимодействуют между собой реальным (сплошная стрелка на рис. 1) и виртуальным (прерывистая стрелка на рис. 1) образом. Физическая картина рис. 1 соответствует миру, который непосредственно окружает нас.

Перейдем к рассмотрению гамильтонианов \mathbf{H}^{I}_{IFW} (42) и \mathbf{H}^{II}_{IFW} (44) с соответствующими уравнениями (41) и (43). Символическая картина приведена на рис. 2, 3.

$$\begin{array}{ccc}
E > 0 & & E < 0 \\
T_3 = +\frac{1}{2} & & T_3 = -\frac{1}{2} \\
\Phi_{IFW}^{(+)}(\mathbf{x}, t) = e^{-iEt} \begin{pmatrix} A\Psi_R^{(+)}(\mathbf{x}) \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \mathbf{H}^{I}_{IFW} \\ \leftarrow \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \rightarrow \end{array} & \Phi_{IFW}^{(-)}(\mathbf{x}, t) = e^{iEt} \begin{pmatrix} 0 \\ A_1\Psi_L^{(-)}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}
\end{array}$$

Рис. 2. Набор состояний частиц и античастиц с нарушенной P -симметрией

$$\begin{array}{ccc}
E > 0 & & E < 0 \\
T_3 = +\frac{1}{2} & & T_3 = -\frac{1}{2} \\
\Phi_{2IFW}^{(+)}(\mathbf{x}, t) = e^{-iEt} \begin{pmatrix} A_1\Psi_L^{(+)}(\mathbf{x}) \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \mathbf{H}^{II}_{IFW} \\ \leftarrow \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \rightarrow \end{array} & \Phi_{2IFW}^{(-)}(\mathbf{x}, t) = e^{-iEt} \begin{pmatrix} 0 \\ A\Psi_R^{(-)}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}
\end{array}$$

Рис. 3. Набор состояний частиц и античастиц с нарушенной P -симметрией

Из рис. 2, 3 следует, что гамильтонианы \mathbf{H}^{I}_{IFW} , \mathbf{H}^{II}_{IFW} обеспечивают существование либо правых фермионов и левых антифермионов (\mathbf{H}^{I}_{IFW}), либо левых фермионов и правых антифермионов (\mathbf{H}^{II}_{IFW}). В обоих случаях отсутствуют взаимодействия реальных частиц и античастиц.

Плотности гамильтонианов (42), (44), (46) и уравнения фермионных полей (41), (43), (45) по аналогии с [4, 5] позволяют сформулировать правила Фейнмана для расчета методами теории возмущений конкретных физических процессов квантовой теории взаимодействующих полей.

3. Уравнение непрерывности. Сохранение векторного и аксиального токов массивных фермионов в изотопическом представлении Фолди–Ваутхайзена

Уравнение непрерывности для свободного движения можно получить, используя уравнения (24), (33) и эрмитово сопряженные им.

Ниже рассмотрение будет проведено для уравнения (24) с восьмикомпонентными спинорами $(\Phi_{1,2})_{IFW}$. Рассмотрение для уравнения (33) с шестнадцатикомпонентными спинорами Φ_{IFW} приводит к аналогичным результатам и выводам.

$$\begin{aligned} i \frac{\partial (\Phi_{1,2})_{IFW}}{\partial t} &= \tau_3 E (\Phi_{1,2})_{IFW}; \\ -i \frac{\partial (\Phi_{1,2})_{IFW}^\dagger}{\partial t} &= \left(E (\Phi_{1,2})_{IFW}^\dagger \right) \tau_3; \end{aligned} \quad (57)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left((\Phi_{1,2})_{IFW}^\dagger (\Phi_{1,2})_{IFW} \right) = -i \left((\Phi_{1,2})_{IFW}^\dagger \tau_3 E (\Phi_{1,2})_{IFW} - \left(E (\Phi_{1,2})_{IFW}^\dagger \right) \tau_3 (\Phi_{1,2})_{IFW} \right) = -\text{div } \mathbf{j}; \quad (58)$$

$$\begin{aligned} j^i &= \frac{1}{2m} \left((\Phi_{1,2})_{IFW}^\dagger p^i \tau_3 (\Phi_{1,2})_{IFW} - \left(p^i (\Phi_{1,2})_{IFW}^\dagger \right) \tau_3 (\Phi_{1,2})_{IFW} \right) - \\ &- \frac{1}{8m^3} \mathbf{p}^2 \left((\Phi_{1,2})_{IFW}^\dagger p^i \tau_3 (\Phi_{1,2})_{IFW} - \left(p^i (\Phi_{1,2})_{IFW}^\dagger \right) \tau_3 (\Phi_{1,2})_{IFW} \right) + \\ &+ \frac{1}{16m^3} 5\mathbf{p}^2 \left((\Phi_{1,2})_{IFW}^\dagger p^i \mathbf{p}^2 \tau_3 (\Phi_{1,2})_{IFW} - \left(p^i \mathbf{p}^2 (\Phi_{1,2})_{IFW}^\dagger \right) \tau_3 (\Phi_{1,2})_{IFW} \right) - \dots \end{aligned} \quad (59)$$

Выражение (59) для тока j^i получено разложением оператора $E = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ в правой части (58) по степеням $\frac{\mathbf{p}^2}{m^2}$.

Первое слагаемое в (59) по виду соответствует току уравнения Шредингера.

В выражениях (58), (59) операторы являются диагональными относительно верхних и нижних изотопических компонент $(\Phi_{1,2})_{IFW}$ и, следовательно, учитывая вид базисных функций (30), ток j^i и уравнение непрерывности можно записать в кирально-симметричном виде.

Аналогично (58), (59) можно получить уравнения сохранения аксиального тока с матрицей γ^5 между восьмикомпонентными спинорами $(\Phi_{1,2})_{IFW}^\dagger, (\Phi_{1,2})_{IFW}$.

$$\frac{\partial}{\partial t} \left((\Phi_{1,2})_{IFW}^\dagger \gamma^5 (\Phi_{1,2})_{IFW} \right) = -i \left((\Phi_{1,2})_{IFW}^\dagger \gamma^5 \tau_3 E (\Phi_{1,2})_{IFW} - \left(E (\Phi_{1,2})_{IFW}^\dagger \right) \gamma^5 \tau_3 (\Phi_{1,2})_{IFW} \right) = -\text{div } \mathbf{j}_A. \quad (60)$$

Аксиальный ток в изотопическом представлении Фолди–Ваутхайзена сохраняется независимо от наличия или отсутствия массы у фермионов.

Напомним, что в дираковском представлении аксиальный ток сохраняется лишь для безмассовых фермионов

$$\partial_\mu j^{\mu 5} = 2im \psi^\dagger \beta \gamma^5 \psi; \quad j^{\mu 5}(x) = \psi^\dagger(x) \alpha^\mu \gamma^5 \psi(x). \quad (61)$$

4. Возможность спонтанного нарушения четности в изотопическом представлении Фолди–Ваутхайзена

В предыдущем разделе было показано, что уравнения (41), (43), (45) и их гамильтонианы инвариантны относительно преобразований киральной симметрии (50).

Плотность гамильтониана (46) без взаимодействия фактически записывается отдельно для левых и правых частиц, а также для левых и правых античастиц.

Гамильтониан (42) без взаимодействия содержит только правые фермионы и только левые антифермионы (см. рис. 2).

Гамильтониан (44) без взаимодействия содержит только левые фермионы и только правые антифермионы (рис. 3).

Вакуум или основное состояние свободного гамильтониана (46) содержит дираковское море отрицательных энергетических состояний левых и правых антифермионов.

Вакуум гамильтониана (42) представляет собой дираковское море левых антифермионов, а вакуум гамильтониана (44) – дираковское море правых антифермионов.

Поскольку уравнения (41), (43), (45) получены унитарными *IFW*-преобразованиями из эквивалентных друг другу уравнений (15), (16), (19), налицо существование вырожденного вакуума и предпосылок для спонтанного нарушения *P*-симметрии.

Обсуждение возможной связи спонтанного нарушения четности в *IFW*-представлении с составом элементарных частиц «темной материи» производится в части II (см. наст. вып., с. 27).

5. Квантовая электродинамика как пример кирально-симметричной теории с массивными фермионами в изотопическом представлении Фолди–Ваутхайзена

Для построения квантовой электродинамики в *IFW*-представлении используем уравнение шестнадцатикомпонентного поля $\Phi_{IFW}(x)$ (45) и плотность гамильтониана (46).

5.1. Правила Фейнмана в *IFW*-представлении

Фейнмановский пропагатор уравнения Дирака в изотопическом представлении Фолди–Ваутхайзена равен

$$S_{IFW}^{\Phi}(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p \frac{e^{-ip(x-y)}}{p_0 - E_{16 \times 16} \tau_3 E} = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p e^{-ip(x-y)} \frac{p_0 + E_{16 \times 16} \tau_3 E}{p^2 - m^2 + i\epsilon} =$$

$$= -i\theta(x_0 - y_0) \int d\mathbf{p} \sum_s \Phi_{IFW}^{(+)}(x, s) (\Phi_{IFW}^{(+)}(y, s))^{\dagger} + i\theta(y_0 - x_0) \int d\mathbf{p} \sum_s \Phi_{IFW}^{(-)}(x, s) (\Phi_{IFW}^{(-)}(y, s))^{\dagger}. \quad (62)$$

В (62) подразумевается фейнмановское правило обхода полюсов; $\theta = (x_0) \begin{cases} 1, x_0 > 0 \\ 0, x_0 < 0 \end{cases}$, функции $\Phi_{IFW}^{(+)}(x, s)$,

$\Phi_{IFW}^{(-)}(x, s)$ определяются формулами (30), (33).

Интегральные уравнения для $\Phi_{IFW}(x)$ в соответствии с (45), (62) имеют вид

$$\Phi_{IFW}(x) = (\Phi_0(x))_{IFW} + \int d^4 y S_{IFW}^{\Phi}(x-y) \left[(K_1^{\Phi} + K_2^{\Phi} + K_3^{\Phi} + \dots) \Phi_{IFW}(y) \right]. \quad (63)$$

В выражении (63) $(\Phi_0(x))_{IFW}$ – решения свободных уравнений Дирака в *IFW*-представлении (см. (30), (33)).

Выражения (62), (63) позволяют сформулировать правила Фейнмана для записи элементов матрицы рассеяния S_{fi} и расчетов процессов квантовой электродинамики (КЭД) [10]. В отличие от дираковского представления в *IFW*-представлении существует бесконечное множество типов вершин взаимодействия с фотоном в зависимости от порядка теории возмущений: вершине взаимодействия с одним фотоном соответствуют факторы $-iK_{1\mu}^{\Phi}$, вершине взаимодействия с двумя фотонами соответствуют факторы $-iK_{2\mu\nu}^{\Phi}$ и т. д. Для удобства величинами $K_{1\mu}^{\Phi}$, $K_{2\mu}^{\Phi}$... обозначены соответствующие части членов гамильтониана взаимодействия K_1^{Φ} , K_2^{Φ} ... без электромагнитных потенциалов A^{μ} , $A^{\mu} A^{\nu}$, ...

Каждой внешней фермионной линии соответствует одна из функций (33). Как обычно, решения с положительной энергией соответствуют частицам, решения с отрицательной энергией – античастицам. Остальные правила Фейнмана остаются такими же, как в спинорной электродинамике в дираковском представлении.

5.2. Постановка расчетов процессов КЭД в *FW*-представлении

Со сформулированными правилами Фейнмана рассмотрены некоторые процессы КЭД в первом и во втором порядках теории возмущений. Вычислены сечения кулоновского рассеяния электронов, мёллеровского рассеяния, комптон-эффекта, аннигиляции электрон-позитронной пары; собственная энергия электрона, поляризация вакуума, аномальный магнитный момент электрона, лэмбовский сдвиг атомарных энергетических уровней. Ниже приведены диаграммы Фейнмана рассмотренных процессов. Краткие детали расчетов содержатся в Приложении 2.

Конечные результаты расчетов процессов КЭД, диаграммы которых приведены на рис. 4–8, совпадают с аналогичными величинами, вычисленными в представлении Дирака. Радиационные поправки к рассеянию электронов во внешнем поле (рис. 9) при проведении перенормировки массы и заряда дают правильное значение аномального магнитного электрона и лэмбовского сдвига энергетических уровней. В Приложении 2 представлены также результаты расчетов аннигиляции электрон-позитронной пары, совпадающие с аналогичными результатами, вычисленными в стандартной КЭД.

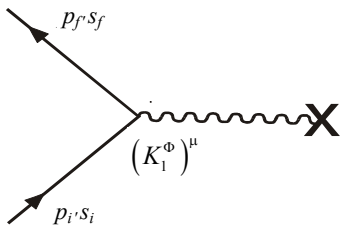


Рис. 4. Рассеяние электронов в кулоновском поле

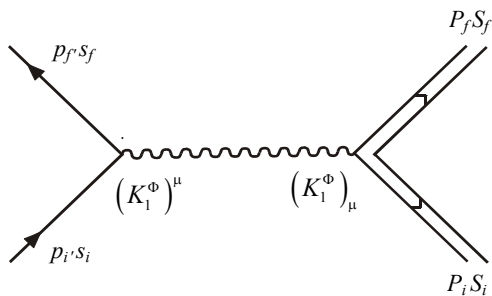
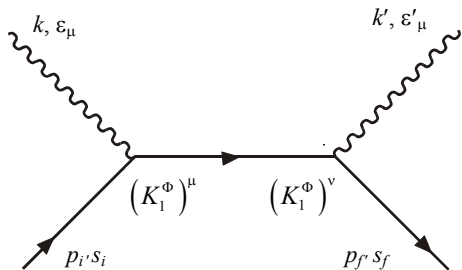
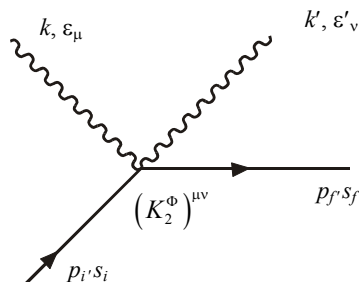


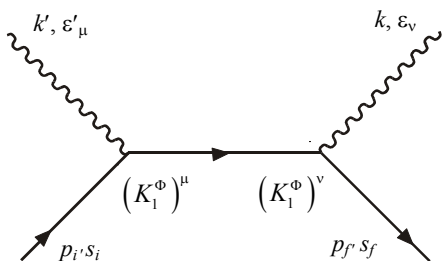
Рис. 5. Рассеяние электрона на дираковском протоне (рассеяние Мёллера)



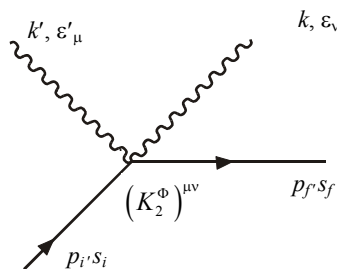
а



б

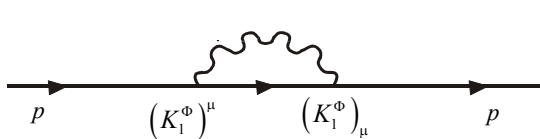


в

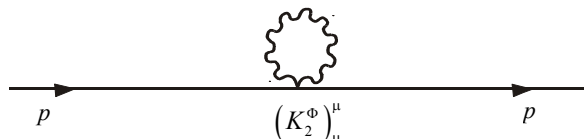


г

Рис. 6. Комптоновское рассеяние электронов

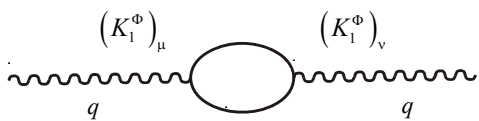


а

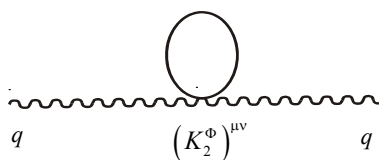


б

Рис. 7. Собственная энергия электрона



а



б

Рис. 8. Поляризация вакуума

Важной особенностью теории в случае, когда импульсы внешних фермионных линий лежат на массовой поверхности ($p^2 = m^2$), является компенсация вклада диаграмм с фермионными пропагаторами с вкладом соответствующих членов в диаграммах с вершинами высшего порядка разложения по e . Так на рис. 6 вклад диаграмм а) и в) компенсируется с соответствующими частями вклада диаграмм б) и г); вклад диаграммы а) на рис. 7 сокращается с вкладом соответствующей части диаграммы б); на рис. 9 вклад диаграмм а)–в) сокращается с вкладом соответствующей части диаграммы г), аналогичная компенсация происходит соответственно для диаграмм д)–ж); и), к)–м). При этом в рассматриваемом случае реальных внешних фермионов вершинные операторы K_n^Φ из-за закона сохранения энергии-импульса значительно упрощаются (см. [4, 5] и, например, Приложение 1 (П6)–(П12)).

Аналогичная компенсация происходит в диаграммах а) и б) рис. 8 и в диаграммах н) и о) рис. 9 из-за диагонального матричного суммирования и одинаковых значений импульсных переменных в начале и конце итогового подынтегрального выражения (см. Приложение 2, п. 5, 6).

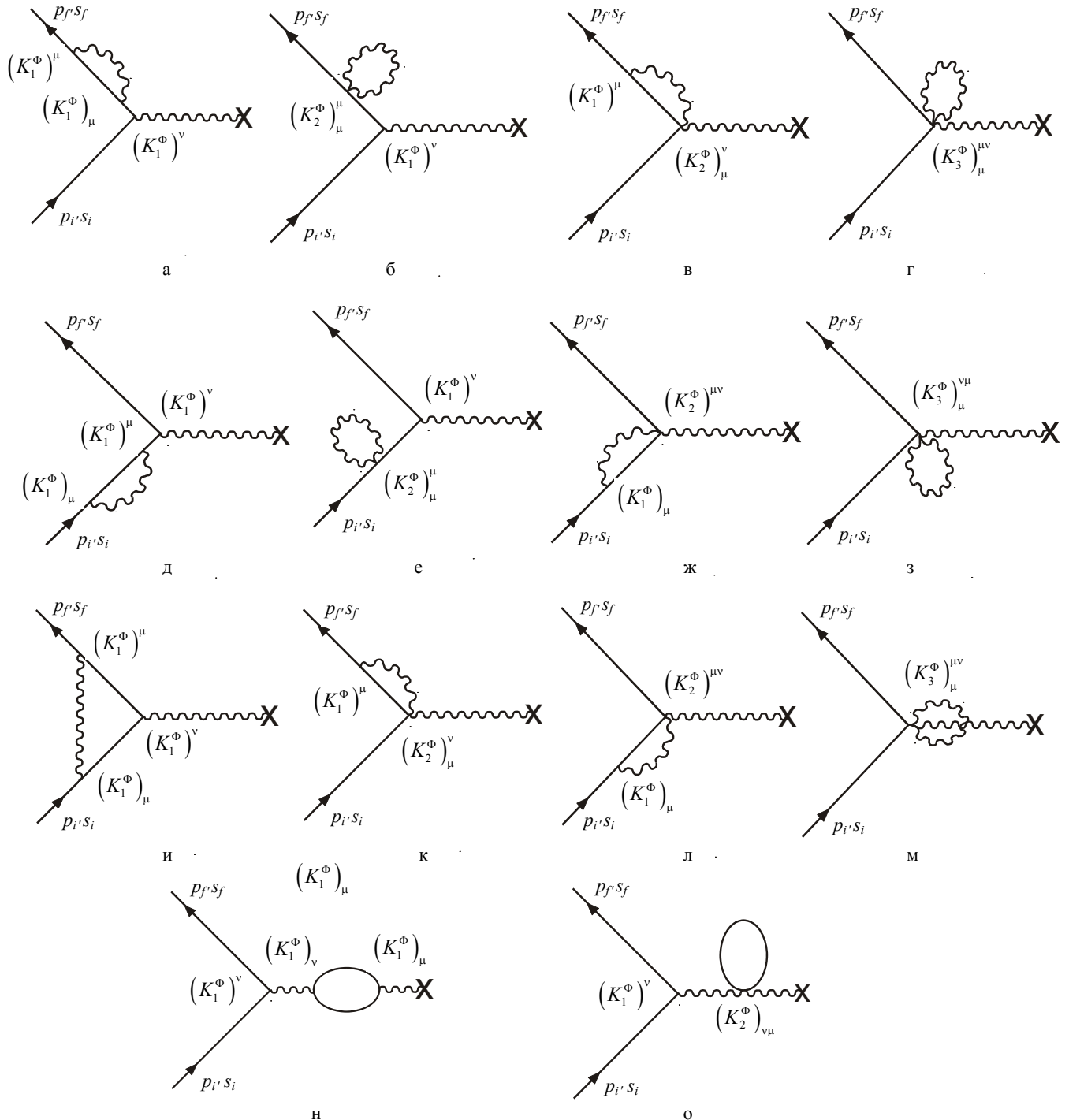


Рис. 9. Радиационные поправки к рассеянию электронов во внешнем поле

Учитывая вышесказанное, можно осуществить такое разложение матрицы рассеяния по степеням e , в котором элементы матрицы S_{β} не будут содержать членов с электрон-позитронными пропагаторами. При этом в импульсном представлении (см. Приложение 1) матричные элементы вершинных операторов видоизменяются следующим образом:

$$\langle \mathbf{p}' | K_1^{\Phi} | \mathbf{p}'' \rangle \rightarrow \langle \mathbf{p}' | C^{\Phi} | \mathbf{p}'' \rangle; \quad (64)$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}' | K_2^{\Phi} | \mathbf{p}'' \rangle \rightarrow & \sum_{v_1, v_2 = \pm 1} \int d\mathbf{p}''' \frac{1}{R' + R''} \times \\ & \times \left\{ \frac{1}{E_{16 \times 16} \tau_3 E'' - E_{16 \times 16} \tau_3 E''' - v_2 k_2^0} \langle \mathbf{p}' | RC^{\Phi} | \mathbf{p}''' \rangle \langle \mathbf{p}''' | C^{\Phi} | \mathbf{p}'' \rangle + \right. \\ & + \frac{1}{E_{16 \times 16} \tau_3 E' - E_{16 \times 16} \tau_3 E''' + v_1 k_1^0} \langle \mathbf{p}' | C^{\Phi} | \mathbf{p}''' \rangle \langle \mathbf{p}''' | C^{\Phi} R | \mathbf{p}'' \rangle + \\ & + \frac{1}{E_{16 \times 16} \tau_3 E'' + E_{16 \times 16} \tau_3 E''' - v_2 k_2^0} \langle \mathbf{p}' | RN^{\Phi} | \mathbf{p}''' \rangle \langle \mathbf{p}''' | N^{\Phi} | \mathbf{p}'' \rangle + \\ & \left. + \frac{1}{E_{16 \times 16} \tau_3 E' + E_{16 \times 16} \tau_3 E''' + v_1 k_1^0} \langle \mathbf{p}' | N^{\Phi} | \mathbf{p}''' \rangle \langle \alpha \mathbf{p}''' | N^{\Phi} R | \mathbf{p}'' \rangle \right\}; \end{aligned} \quad (65)$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}' | K_3^{\Phi} | \mathbf{p}'' \rangle \rightarrow & \sum_{v_1, v_2, v_3 = \pm 1} \int d\mathbf{p}''' d\mathbf{p}^{IV} \frac{1}{R' + R''} \times \\ & \times \left[\frac{1}{(E_{16 \times 16} \tau_3 E^{IV} - E_{16 \times 16} \tau_3 E' - v_1 k_1^0 - v_2 k_2^0)(E_{16 \times 16} \tau_3 E''' - E_{16 \times 16} \tau_3 E' - v_1 k_1^0)} \langle \mathbf{p}' | C^{\Phi} | \mathbf{p}''' \rangle \langle \mathbf{p}''' | C^{\Phi} | \mathbf{p}^{IV} \rangle \langle \mathbf{p}^{IV} | C^{\Phi} R | \mathbf{p}'' \rangle + \right. \\ & + \frac{1}{(E_{16 \times 16} \tau_3 E^{III} - E_{16 \times 16} \tau_3 E'' + v_2 k_2^0 + v_3 k_3^0)(E_{16 \times 16} \tau_3 E^{IV} - E_{16 \times 16} \tau_3 E'' + v_3 k_3^0)} \langle \mathbf{p}' | RC^{\Phi} | \mathbf{p}''' \rangle \langle \mathbf{p}''' | C^{\Phi} | \mathbf{p}^{IV} \rangle \langle \mathbf{p}^{IV} | C^{\Phi} | \mathbf{p}'' \rangle - \\ & - \frac{1}{(E_{16 \times 16} \tau_3 E^{IV} + E_{16 \times 16} \tau_3 E' + v_1 k_1^0 + v_2 k_2^0)(E_{16 \times 16} \tau_3 E''' - E_{16 \times 16} \tau_3 E' - v_1 k_1^0)} \langle \mathbf{p}' | C^{\Phi} | \mathbf{p}''' \rangle \langle \mathbf{p}''' | N^{\Phi} | \mathbf{p}^{IV} \rangle \langle \mathbf{p}^{IV} | N^{\Phi} R | \mathbf{p}'' \rangle - \\ & - \frac{1}{(E_{16 \times 16} \tau_3 E'' + E_{16 \times 16} \tau_3 E''' - v_2 k_2^0 - v_3 k_3^0)(E_{16 \times 16} \tau_3 E^{IV} - E_{16 \times 16} \tau_3 E'' + v_3 k_3^0)} \langle \mathbf{p}' | RN^{\Phi} | \mathbf{p}''' \rangle \langle \mathbf{p}''' | N^{\Phi} | \mathbf{p}^{IV} \rangle \langle \mathbf{p}^{IV} | C^{\Phi} | \mathbf{p}'' \rangle + \\ & + \frac{1}{(E_{16 \times 16} \tau_3 E^{IV} + E_{16 \times 16} \tau_3 E' + v_1 k_1^0 + v_2 k_2^0)(E_{16 \times 16} \tau_3 E''' + E_{16 \times 16} \tau_3 E' + v_1 k_1^0)} \langle \mathbf{p}' | N^{\Phi} | \mathbf{p}''' \rangle \langle \mathbf{p}''' | C^{\Phi} | \mathbf{p}^{IV} \rangle \langle \mathbf{p}^{IV} | N^{\Phi} R | \mathbf{p}'' \rangle + \\ & + \frac{1}{(E_{16 \times 16} \tau_3 E'' + E_{16 \times 16} \tau_3 E''' - v_2 k_2^0 - v_3 k_3^0)(E_{16 \times 16} \tau_3 E^{IV} + E_{16 \times 16} \tau_3 E'' - v_3 k_3^0)} \langle \mathbf{p}' | RN^{\Phi} | \mathbf{p}''' \rangle \langle \mathbf{p}''' | C^{\Phi} | \mathbf{p}^{IV} \rangle \langle \mathbf{p}^{IV} | N^{\Phi} | \mathbf{p}'' \rangle - \\ & - \frac{1}{(E_{16 \times 16} \tau_3 E^{IV} - E_{16 \times 16} \tau_3 E' - v_1 k_1^0 - v_2 k_2^0)(E_{16 \times 16} \tau_3 E''' + E_{16 \times 16} \tau_3 E' + v_1 k_1^0)} \langle \mathbf{p}' | N^{\Phi} | \mathbf{p}''' \rangle \langle \mathbf{p}''' | N^{\Phi} | \mathbf{p}^{IV} \rangle \langle \mathbf{p}^{IV} | C^{\Phi} R | \mathbf{p}'' \rangle - \\ & \left. - \frac{1}{(E_{16 \times 16} \tau_3 E''' + E_{16 \times 16} \tau_3 E'' + v_2 k_2^0 + v_3 k_3^0)(E_{16 \times 16} \tau_3 E^{IV} + E_{16 \times 16} \tau_3 E'' - v_3 k_3^0)} \langle \mathbf{p}' | RC^{\Phi} | \mathbf{p}''' \rangle \langle \mathbf{p}''' | N^{\Phi} | \mathbf{p}^{IV} \rangle \langle \mathbf{p}^{IV} | N^{\Phi} | \mathbf{p}'' \rangle \right]. \end{aligned} \quad (66)$$

В (64)–(66) операторы C^{Φ} и N^{Φ} определяются формулами (49).

Заключение

Наличие массового члена в линейном по p^0 уравнении Дирака (9) не позволяет записать его в кирально-симметричном виде.

Одним из результатов настоящей работы является демонстрация возможности написания кирально-симметричных уравнений (отдельно для левых и отдельно для правых фермионов) для массивных фермионных полей. В дираковском представлении – это интегродифференциальные уравнения (11) и уравнение второго порядка по четырех-импульсу p^{μ} (13).

Для того чтобы получить линейные по p^0 кирально-симметричные уравнения для массивных фермионов, взаимодействующих с векторными бозонными полями, в работе определены изотопическое представление и изотопическое преобразование Фолди–Ваутхайзена.

В работе введено специальное изотопическое пространство с изотопическими матрицами τ_i . В дираковском представлении во введенном изотопическом пространстве получены эквивалентные по физическим следствиям уравнения Дирака (15), (16), (19) для восьмикомпонентных полей Φ_1, Φ_2 и шестнадцатикомпонентного поля Φ . После применения к каждому уравнению одного и того же изотопического преобразования Фолди–Ваутхайзена получены искомые кирально-симметричные уравнения (41), (43), (45) для массивных фермионов.

В IFW -представлении полученные уравнения и гамильтонианы (41)–(46) инвариантны относительно кирального преобразования $(\Phi_{1,2})_{IFW} \rightarrow e^{i\alpha\tau^5} (\Phi_{1,2})_{IFW}$.

Данная инвариантность не зависит от наличия или отсутствия массы у фермионов.

В изотопическом представлении Фолди–Ваутхайзена для массивных фермионов сохраняются векторный и аксиальный токи. В дираковском представлении аксиальный ток сохраняется лишь для безмассовых фермионов.

Физическое содержание уравнений (41), (43), (45) отличается друг от друга из-за особенности преобразования Фолди–Ваутхайзена (в том числе и IFW -преобразования), сужающего пространство возможных состояний дираковской частицы.

Уравнение (45) и гамильтониан (46) описывают правые и левые фермионы, а также правые и левые антифермионы.

Уравнение (41) и гамильтониан (42) описывают правые фермионы и левые антифермионы, а уравнение (43) с гамильтонианом (44) наоборот описывают левые фермионы и правые антифермионы.

Отсюда следует вырожденность вакуума в изотопическом представлении Фолди–Ваутхайзена и возможность спонтанного нарушения P -симметрии.

Из-за унитарности изотопического преобразования Фолди–Ваутхайзена результаты расчетов некоторых физических процессов, проведенных в низайших порядках теории возмущений в рамках кирально-симметричной квантовой электродинамики в IFW -представлении, совпадают с соответствующими результатами стандартной КЭД.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Определение гамильтониана H_{IFW}^I в изотопическом представлении Фолди–Ваутхайзена

В обозначениях [4, 5] для IFW -представления

$$H_{IFW}^I = U_{IFW} H_D U_{IFW}^\dagger - i U_{IFW} \frac{\partial}{\partial t} (U_{IFW}^\dagger) = \tau_3 E + K_1 + K_2 + K_3 + \dots \quad (\text{П1})$$

$$U_{IFW} = (1 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \dots) (U_0)_{IFW}.$$

В равенствах (П1) $K_1, \delta_1 \sim q$; $K_2, \delta_2 \sim q^2$; $K_3, \delta_3 \sim q^3$; q – константа связи;

$$(U_0)_{IFW} = R(1 + L), \quad R = \sqrt{\frac{E + \tau_3 \alpha \mathbf{p}}{2E}}, \quad L = \frac{1}{E + \tau_3 \alpha \mathbf{p}} \tau_3 \tau_1 \beta m.$$

$(U_0)_{IFW}$ – оператор IFW -преобразования при отсутствии взаимодействия $((U_0)_{IFW} (\alpha \mathbf{p} + \tau_1 \beta m) (U_0)_{IFW}^\dagger = \tau_3 E)$.

Из условия унитарности $U_{IFW}^\dagger U_{IFW} = 1$ следует

$$\delta_1^\dagger = -\delta_1;$$

$$\delta_2^\dagger = -\delta_2 + \delta_1 \delta_1; \quad (\text{П2})$$

$$\delta_3^\dagger = -\delta_3 + \delta_2 \delta_1 + \delta_1 \delta_2 - \delta_1 \delta_1 \delta_1;$$

.....

С учетом (П2)

$$\begin{aligned}
 K_1 &= \delta_1 \tau_3 E - \tau_3 E \delta_1 + i \frac{\partial \delta_1}{\partial t} + C + N; \\
 K_2 &= \delta_2 \tau_3 E - \tau_3 E \delta_2 + i \frac{\partial \delta_2}{\partial t} - K_1 \delta_1 + \delta_1 (C + N); \\
 K_3 &= \delta_3 \tau_3 E - \tau_3 E \delta_3 + i \frac{\partial \delta_3}{\partial t} - K_1 \delta_2 - K_2 \delta_1 + \delta_2 (C + N).
 \end{aligned}
 \tag{П3}$$

В работах [4, 5] установлена следующая связь между четными (со значком e) и нечетными (со значком o) операторами δ_i , соответственно не связывающими и связывающими верхние и нижние изотопические компоненты волновой функции:

$$\begin{aligned}
 \delta_1^e R + R \delta_1^e &= RL \delta_1^o - \delta_1^o LR; \\
 \delta_2^e R + R \delta_2^e &= RL \delta_2^o - \delta_2^o LR - RL (\delta_1 \delta_1)^o + R (\delta_1 \delta_1)^e; \\
 \delta_3^e R + R \delta_3^e &= RL \delta_3^o - \delta_3^o LR - RL (\delta_2 \delta_1 + \delta_1 \delta_2 - \delta_1 \delta_1 \delta_1)^o + R (\delta_2 \delta_1 + \delta_1 \delta_2 - \delta_1 \delta_1 \delta_1)^e;
 \end{aligned}
 \tag{П4}$$

Поскольку по определению K_1, K_2, K_3, \dots четные операторы, необходимо в (П3) приравнять нулю нечетные члены

$$\begin{aligned}
 \delta_1^o \tau_3 E - \tau_3 E \delta_1^o + i \frac{\partial \delta_1^o}{\partial t} + N &= 0; \\
 \delta_2^o \tau_3 E - \tau_3 E \delta_2^o + i \frac{\partial \delta_2^o}{\partial t} - K_1 \delta_1^o + \delta_1^o C + \delta_1^e N &= 0; \\
 \delta_3^o \tau_3 E - \tau_3 E \delta_3^o + i \frac{\partial \delta_3^o}{\partial t} - K_1 \delta_2^o - K_2 \delta_1^o + \delta_2^o C + \delta_2^e N &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{П5}$$

После этого члены разложения гамильтониана K_1, K_2, K_3, \dots определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}
 K_1 &= \delta_1^e \tau_3 E - \tau_3 E \delta_1^e + i \frac{\partial \delta_1^e}{\partial t} + C; \\
 K_2 &= \delta_2^e \tau_3 E - \tau_3 E \delta_2^e + i \frac{\partial \delta_2^e}{\partial t} - K_1 \delta_1^e + \delta_1^e C + \delta_1^o N; \\
 K_3 &= \delta_3^e \tau_3 E - \tau_3 E \delta_3^e + i \frac{\partial \delta_3^e}{\partial t} - K_1 \delta_2^e - K_2 \delta_1^e + \delta_2^e C + \delta_2^o N.
 \end{aligned}
 \tag{П6}$$

Операторные равенства (П6) вместе с (П4), (П5) позволяют определить гамильтониан $H_{I\Gamma W}$ в виде ряда по степеням константы связи q .

В импульсном представлении с разложением векторных бозонных полей в интеграл Фурье с обозначениями [4, 5] получаем

$$\begin{aligned}
 B_\mu(\mathbf{x}, t) &= \sum_{\nu=\pm 1} \int B_{\mu k}^{(\nu)} e^{i\nu k_0 t} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} d\mathbf{k}; \\
 B_{\mu k}^{(\nu)} &= \begin{cases} B_{\mu k}, & \nu = 1; \\ \bar{B}_{\mu(-k)}, & \nu = -1; \end{cases}
 \end{aligned}
 \tag{П7}$$

$$\langle \mathbf{p}' | e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} | \mathbf{p}'' \rangle = \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p}'' - \mathbf{k});
 \tag{П8}$$

$$\langle \mathbf{p}' | B_\mu | \mathbf{p}'' \rangle = \sum_{\nu=\pm 1} \int B_{\mu(\mathbf{p}''-\mathbf{p}')}^{(\nu)} e^{i\nu k_0 t};
 \tag{П9}$$

$$\langle \mathbf{p}' | B_\mu B_\alpha | \mathbf{p}'' \rangle = \sum_{\nu, \nu'=\pm 1} \int d\mathbf{p}''' B_{\mu(\mathbf{p}''-\mathbf{p}')}^{(\nu)} B_{\alpha(\mathbf{p}'''-\mathbf{p}')}^{(\nu')} e^{i(\nu k_0 + \nu' k'_0) t}.
 \tag{П10}$$

С учетом (П7)–(П10) из равенств (П5) получаем

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{p}' | \delta_1^0 | \mathbf{p}'' \rangle &= \sum_{v=\pm 1} \frac{1}{\tau_3 E' + \tau_3 E'' + vk_0} \langle \mathbf{p}' | N | \mathbf{p}'' \rangle; \\ \langle \mathbf{p}' | \delta_2^0 | \mathbf{p}'' \rangle &= \sum_{v, v'=\pm 1} \frac{1}{\tau_3 E' + \tau_3 E'' + vk_0 + v'k'_0} \langle \mathbf{p}' | -K_1 \delta_1^0 + \delta_1^0 C + \delta_1^e N | \mathbf{p}'' \rangle; \\ \langle \mathbf{p}' | \delta_3^0 | \mathbf{p}'' \rangle &= \sum_{v, v', v''=\pm 1} \frac{1}{\tau_3 E' + \tau_3 E'' + vk_0 + v'k'_0 + v''k''_0} \langle \mathbf{p}' | -K_1 \delta_2^0 - K_2 \delta_1^0 + \delta_2^0 C + \delta_2^e N | \mathbf{p}'' \rangle.\end{aligned}\quad (П11)$$

С помощью (П11) и равенств (П4), (П6) можно получить искомые члены разложения K_n в импульсном представлении. Например,

$$\langle \mathbf{p}' | K_1 | \mathbf{p}'' \rangle = \sum_{v=\pm 1} \frac{\tau_3 E'' - \tau_3 E' - vk_0}{R' + R''} \left(-\frac{1}{\tau_3 E' + \tau_3 E'' - vk_0} \langle \mathbf{p}' | RLN | \mathbf{p}'' \rangle - \frac{1}{\tau_3 E' + \tau_3 E'' + vk_0} \langle \mathbf{p}' | NLR | \mathbf{p}'' \rangle \right) + \langle \mathbf{p}' | C | \mathbf{p}'' \rangle. \quad (П12)$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Расчеты некоторых процессов квантовой электродинамики в изотопическом представлении Фолди–Ваутхайзена

1. Рассеяние электронов в кулоновском поле $A_0(x) = -\frac{Ze}{4\pi|x|}$

$$\begin{aligned}S_{fi} &= -i \int d^4x \Phi_{IFW}^{(+)\dagger}(x, p_f, s_f) (K_1^\Phi)^0 A_0 \Phi_{IFW}^{(+)}(x, p_i, s_i) = -\frac{i\delta(E_f - E_i)}{(2\pi)^2} \Phi_{IFW}^{(+)\dagger}(p_f, s_f) \langle \mathbf{p}' | (C^\Phi)^0 A_0 | \mathbf{p}_i \rangle \Phi_{IFW}^{(+)}(p_i, s_i) = \\ &= i \frac{Ze^2}{2q^2} \frac{\delta(E_f - E_i)}{(2\pi)^2} \left[\Phi_{IFW}^{(+)\dagger}(p_f, s_f) \sqrt{\frac{E_f + \tau_3 \alpha \mathbf{p}_f}{2E_f}} \left(1 + \frac{m^2}{(E_f + \tau_3 \alpha \mathbf{p}_f)(E_i + \tau_3 \alpha \mathbf{p}_i)} \right) \right] \sqrt{\frac{E_i + \tau_3 \alpha \mathbf{p}_i}{2E_i}} \Phi_{IFW}^{(+)}(p_i, s_i) + \\ &+ \Phi_{2IFW}^{(+)\dagger}(p_f, s_f) \sqrt{\frac{E_f + \tau_3 \alpha \mathbf{p}_f}{2E_f}} \left(1 + \frac{m^2}{(E_f + \tau_3 \alpha \mathbf{p}_f)(E_i + \tau_3 \alpha \mathbf{p}_i)} \right) \sqrt{\frac{E_i + \tau_3 \alpha \mathbf{p}_i}{2E_i}} \Phi_{2IFW}^{(+)}(p_i, s_i) \Big], \\ \mathbf{q} &= \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i; \quad q^\Phi \rightarrow \frac{e}{2} E_{16 \times 16}.\end{aligned}$$

Запись $(K_1^\Phi)^0 A_0$, выполненная для удобства, фактически означает: $(K_1^\Phi)^0 A_0 \equiv K_1^\Phi$ при $\mathbf{A}(x) = 0$. То есть $A_0(x)$ становится на места, определяемые выражением для K_1 в Приложении 1. Это же относится и к записи $(C^\Phi)^0 A_0$. Переход от $(K_1^\Phi)^0 A_0$ к $(C^\Phi)^0 A_0$ осуществлен в соответствии с (64).

Далее обычными методами с помощью матричного элемента S_{fi} можно получить дифференциальное сечение рассеяния Мотта, переходящее в нерелятивистском случае в резерфордское.

2. Рассеяние электрона на дираковском протоне (рассеяние Мёллера)

$$\begin{aligned}S_{fi} &= -i \int d^4x d^4y \Phi_{IFW}^{(+)\dagger}(x, p_f, s_f) (K_1^\Phi)^\alpha \Phi_{IFW}^{(+)}(x, p_i, s_i) D_F(x-y) \Phi_{IFW}^{(+)\dagger}(y, p_f, s_f) (-K_1^\Phi)_\alpha \Phi_{IFW}^{(+)}(y, p_i, s_i) = \\ &= -\frac{i\delta^4(P_f - P_i + p_f - p_i)}{4(p_f - p_i)^2} 2\pi \left[\Phi_{IFW}^{(+)\dagger}(p_f, s_f) \langle \mathbf{p}' | (C^\Phi)^\alpha | \mathbf{p}_i \rangle \Phi_{IFW}^{(+)}(p_i, s_i) + \Phi_{2IFW}^{(+)\dagger}(p_f, s_f) \langle \mathbf{p}' | (C^\Phi)^\alpha | \mathbf{p}_i \rangle \Phi_{2IFW}^{(+)}(p_i, s_i) \right] \times \\ &\times \left[\Phi_{IFW}^{(+)\dagger}(p_f, s_f) \langle \mathbf{p}' | C_\alpha^\Phi | \mathbf{p}_i \rangle \Phi_{IFW}^{(+)}(p_i, s_i) + \Phi_{2IFW}^{(+)\dagger}(p_f, s_f) \langle \mathbf{p}' | C_\alpha^\Phi | \mathbf{p}_i \rangle \Phi_{2IFW}^{(+)}(p_i, s_i) \right];\end{aligned}$$

$D_F(x-y)$ – стандартный фотонный пропагатор; $q^\Phi \rightarrow \frac{e}{2} E_{16 \times 16}$.

Матричный элемент S_{fi} позволяет определить мёллеровское сечение рассеяния электрона.

3. Комптоновское рассеяние электронов

$$\begin{aligned}
 S_{fi} = & -i\Phi_{IFW}^{(+)\dagger}(p_f, s_f) \left\{ \int \frac{d^4 z d^4 y d^4 p_1}{(2\pi)^7 \sqrt{2k_0' 2k_0}} \left(e^{ip_f y} K_{1\mu}^\Phi \varepsilon'^\mu e^{iky} \frac{e^{-ip_1 y}}{p_1^0 - E_{16 \times 16} \tau_3 E(\mathbf{p}_1)} e^{ip_1 z} \times \right. \right. \\
 & \times K_{1\nu}^\Phi \varepsilon^\nu e^{-ikz} e^{-ip_1 z} + e^{ip_f y} K_{1\mu}^\Phi \varepsilon^\mu e^{-iky} \frac{e^{-ip_1 y}}{p_1^0 - E_{16 \times 16} \tau_3 E(\mathbf{p}_1)} e^{ip_1 z} K_{1\nu}^\Phi \varepsilon'^\nu e^{ik' z} e^{-ip_1 z} \left. \right) + \\
 & \left. + \int d^4 y \frac{1}{(2\pi)^3 \sqrt{2k_0' 2k_0}} \left(e^{ip_f y} K_{2\mu\nu}^\Phi \varepsilon'^\mu e^{ik' y} \varepsilon^\nu e^{-iky} e^{-ip_1 y} + e^{ip_f y} K_{2\mu\nu}^\Phi \varepsilon^\mu e^{-iky} \varepsilon'^\nu e^{ik' y} e^{-ip_1 y} \right) \right\} \Phi_{IFW}^{(+)}(p_i, s_i).
 \end{aligned}$$

В первый интеграл объединен вклад диаграмм рис. 6: а) и в), во второй – вклад диаграмм рис. 6: б) и г).

Запись $K_{1\mu}^\Phi \varepsilon^\mu e^{-iky}$, $K_{2\mu\nu}^\Phi \varepsilon^\mu e^{-iky} \varepsilon'^\nu e^{ik' y}$ и т. д. понимается в том же смысле, как это указано в п. 1.

Как уже отмечалось в 6.2, вклад в матричный элемент S_{fi} дают лишь слагаемые в выражении (65) для K_2^Φ . С учетом вышесказанного

$$S_{fi} = \frac{-i(2\pi)^4 \delta^4(p_i + k - p_f - k')}{(2\pi)^3 \sqrt{2k_0' 2k_0}} \left[\Phi_{1IFW}^{(+)\dagger}(p_f, s_f) A \Phi_{IFW}^{(+)}(p_i, s_i) + \Phi_{2IFW}^{(+)\dagger}(p_f, s_f) A \Phi_{2IFW}^{(+)}(p_i, s_i) \right],$$

где

$$\begin{aligned}
 A = & \left[C_\mu(\mathbf{p}_f; \mathbf{p}_i + \mathbf{k}) \varepsilon'^\mu \frac{\frac{1}{2}(1 + \tau_3)}{\tau_3 E(\mathbf{p}_i) + k_0 - \tau_3 E(\mathbf{p}_i + \mathbf{k})} C_\mu(\mathbf{p}_i + \mathbf{k}; \mathbf{p}_i) \varepsilon^\mu + \right. \\
 & + N_\mu(\mathbf{p}_f; \mathbf{p}_i + \mathbf{k}) \varepsilon'^\mu \frac{\frac{1}{2}(1 - \tau_3)}{-\tau_3 E(\mathbf{p}_i) + k_0 + \tau_3 E(\mathbf{p}_i + \mathbf{k})} N_\mu(\mathbf{p}_i + \mathbf{k}; \mathbf{p}_i) \varepsilon^\mu + \\
 & + C_\mu(\mathbf{p}_f; \mathbf{p}_i - \mathbf{k}') \varepsilon'^\mu \frac{\frac{1}{2}(1 + \tau_3)}{\tau_3 E(\mathbf{p}_i) - k_0' - \tau_3 E(\mathbf{p}_i - \mathbf{k}')} C_\mu(\mathbf{p}_i - \mathbf{k}'; \mathbf{p}_i) \varepsilon'^\mu + \\
 & \left. + N_\mu(\mathbf{p}_f; \mathbf{p}_i - \mathbf{k}') \varepsilon'^\mu \frac{\frac{1}{2}(1 - \tau_3)}{-\tau_3 E(\mathbf{p}_i) - k_0' + \tau_3 E(\mathbf{p}_i - \mathbf{k}')} N_\mu(\mathbf{p}_i - \mathbf{k}'; \mathbf{p}_i) \varepsilon'^\mu \right] + \\
 & + \left[C_\mu(\mathbf{p}_f; \tau_1; \mathbf{p}_i + \mathbf{k}) \varepsilon'^\mu \frac{\frac{1}{2}(1 + \tau_3)}{\tau_3 E(\mathbf{p}_i) + k_0 - \tau_3 E(\mathbf{p}_i + \mathbf{k})} C_\mu(\mathbf{p}_i + \mathbf{k}; \tau_1; \mathbf{p}_i) \varepsilon'^\mu + \right. \\
 & + N_\mu(\mathbf{p}_f; \tau_1; \mathbf{p}_i + \mathbf{k}) \varepsilon'^\mu \frac{\frac{1}{2}(1 - \tau_3)}{-\tau_3 E(\mathbf{p}_i) + k_0 + \tau_3 E(\mathbf{p}_i + \mathbf{k})} N_\mu(\mathbf{p}_i + \mathbf{k}; \tau_1; \mathbf{p}_i) \varepsilon'^\mu + \\
 & + C_\mu(\mathbf{p}_f; \tau_1; \mathbf{p}_i - \mathbf{k}') \varepsilon'^\mu \frac{\frac{1}{2}(1 + \tau_3)}{\tau_3 E(\mathbf{p}_i) - k_0' - \tau_3 E(\mathbf{p}_i - \mathbf{k}')} C_\mu(\mathbf{p}_i - \mathbf{k}'; \tau_1; \mathbf{p}_i) \varepsilon'^\mu + \\
 & \left. + N_\mu(\mathbf{p}_f; \tau_1; \mathbf{p}_i - \mathbf{k}') \varepsilon'^\mu \frac{\frac{1}{2}(1 - \tau_3)}{-\tau_3 E(\mathbf{p}_i) - k_0' + \tau_3 E(\mathbf{p}_i - \mathbf{k}')} N_\mu(\mathbf{p}_i - \mathbf{k}'; \tau_1; \mathbf{p}_i) \varepsilon'^\mu \right];
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C^\mu(\mathbf{p}_f; \mathbf{p}_i + \mathbf{k}) &= \begin{cases} \frac{1}{2} eR_f \left(1 - \frac{1}{E(\mathbf{p}_f) + \tau_3 \boldsymbol{\alpha} \mathbf{p}_f} \tau_3 \tau_1 \beta m \frac{1}{E(\mathbf{p}_i + \mathbf{k}) + \tau_3 \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{p}_i + \mathbf{k})} \tau_3 \tau_1 \beta m \right) R_1; & \mu = 0; \\ -\frac{1}{2} eR_f \left(\alpha^k - \frac{1}{E(\mathbf{p}_f) + \tau_3 \boldsymbol{\alpha} \mathbf{p}_f} \tau_3 \tau_1 \beta m \alpha^k \frac{1}{E(\mathbf{p}_i + \mathbf{k}) + \tau_3 \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{p}_i + \mathbf{k})} \tau_3 \tau_1 \beta m \right) R_1; & \mu = k; \quad k = 1, 2, 3; \end{cases} \\
N^\mu(\mathbf{p}_f; \mathbf{p}_i + \mathbf{k}) &= \begin{cases} \frac{1}{2} eR_f \left(\frac{1}{E(\mathbf{p}_f) + \tau_3 \boldsymbol{\alpha} \mathbf{p}_f} \tau_3 \tau_1 \beta m - \frac{1}{E(\mathbf{p}_i + \mathbf{k}) + \tau_3 \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{p}_i + \mathbf{k})} \tau_3 \tau_1 \beta m \right) R_1; & \mu = 0; \\ -\frac{1}{2} eR_f \left(\frac{1}{E(\mathbf{p}_f) + \tau_3 \boldsymbol{\alpha} \mathbf{p}_f} \tau_3 \tau_1 \beta m \alpha^k - \alpha^k \frac{1}{E(\mathbf{p}_i + \mathbf{k}) + \tau_3 \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{p}_i + \mathbf{k})} \tau_3 \tau_1 \beta m \right) R_1; & \mu = k; \quad k = 1, 2, 3; \end{cases} \\
C^\mu(\mathbf{p}_f; \tau_1; \mathbf{p}_i + \mathbf{k}) &= \begin{cases} \frac{1}{2} eR_f \left(\tau_1 - \frac{1}{E(\mathbf{p}_f) + \tau_3 \boldsymbol{\alpha} \mathbf{p}_f} \tau_3 \tau_1 \beta m \tau_1 \frac{1}{E(\mathbf{p}_i + \mathbf{k}) + \tau_3 \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{p}_i + \mathbf{k})} \tau_3 \tau_1 \beta m \right) R_1; & \mu = 0; \\ -\frac{1}{2} eR_f \left(\tau_1 \alpha^k - \frac{1}{E(\mathbf{p}_f) + \tau_3 \boldsymbol{\alpha} \mathbf{p}_f} \tau_3 \tau_1 \beta m \tau_1 \alpha^k \frac{1}{E(\mathbf{p}_i + \mathbf{k}) + \tau_3 \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{p}_i + \mathbf{k})} \tau_3 \tau_1 \beta m \right) R_1; & \mu = k; \quad k = 1; \end{cases} \\
N^\mu(\mathbf{p}_f; \tau_1; \mathbf{p}_i + \mathbf{k}) &= \begin{cases} \frac{1}{2} eR_f \left(\frac{1}{E(\mathbf{p}_f) + \tau_3 \boldsymbol{\alpha} \mathbf{p}_f} \tau_3 \tau_1 \beta m \tau_1 - \tau_1 \frac{1}{E(\mathbf{p}_i + \mathbf{k}) + \tau_3 \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{p}_i + \mathbf{k})} \tau_3 \tau_1 \beta m \right) R_1; & \mu = 0; \\ -\frac{1}{2} eR_f \left(\frac{1}{E(\mathbf{p}_f) + \tau_3 \boldsymbol{\alpha} \mathbf{p}_f} \tau_3 \tau_1 \beta m \alpha^k \tau_1 - \tau_1 \alpha^k \frac{1}{E(\mathbf{p}_i + \mathbf{k}) + \tau_3 \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{p}_i + \mathbf{k})} \tau_3 \tau_1 \beta m \right) R_1; & \mu = k; \quad k = 1; \end{cases} \\
R_f \equiv R_{p_f} = \sqrt{\frac{E(\mathbf{p}_f) + \tau_3 \boldsymbol{\alpha} \mathbf{p}_f}{2E(\mathbf{p}_f)}}, \quad R_1 \equiv R_{p_i + k} = \sqrt{\frac{E(\mathbf{p}_i + \mathbf{k}) + \tau_3 \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{p}_i + \mathbf{k})}{2E(\mathbf{p}_i + \mathbf{k})}} \text{ и т. д.}
\end{aligned}$$

Вычисления показывают, что в выражении для A сумма слагаемых в первой квадратной скобке совпадает с аналогичной суммой во второй квадратной скобке.

Если выбрать специальную калибровку, в которой начальный и конечный фотоны поперечно поляризованы в лабораторной системе отсчета ($\mathbf{p}_i = 0$; $\boldsymbol{\varepsilon}^0 = \boldsymbol{\varepsilon}'^0 = 0$; $\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{k} = \boldsymbol{\varepsilon}' \mathbf{k}' = 0$), то выражение для A упрощается:

$$A = \frac{e^2}{2} \sqrt{\frac{E(\mathbf{p}_f) + \tau_3 \boldsymbol{\alpha} \mathbf{p}_f}{4E(\mathbf{p}_f)}} \left[-\frac{E(\mathbf{p}_f) + \tau_3 \boldsymbol{\alpha} \mathbf{p}_f - m}{2m^2} \left(\frac{\boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\varepsilon}' \boldsymbol{\alpha} \mathbf{k} \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\varepsilon}}{k_0} + \frac{\boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\alpha} \mathbf{k}' \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\varepsilon}'}{k'_0} \right) + \frac{E(\mathbf{p}_f) - \tau_3 \boldsymbol{\alpha} \mathbf{p}_f + m}{m^2} \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}' \right].$$

Далее обычными методами можно получить формулу Клейна–Нишины–Тамма для дифференциального сечения комптоновского рассеяния.

4. Собственная энергия электрона

$$\begin{aligned}
-i \sum^{(2)}(p) &= -\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 k^2} \left[C^\mu(\mathbf{p}; \mathbf{p} - \mathbf{k}) \frac{\frac{1}{2}(1 + \tau_3)}{\tau_3 E(\mathbf{p}) - k_0 - \tau_3 E(\mathbf{p} - \mathbf{k})} C_\mu(\mathbf{p} - \mathbf{k}; \mathbf{p}) + C^\mu(\mathbf{p}; \tau_1; \mathbf{p} - \mathbf{k}) \times \right. \\
&\times \frac{\frac{1}{2}(1 + \tau_3)}{\tau_3 E(\mathbf{p}) - k_0 - \tau_3 E(\mathbf{p} - \mathbf{k})} C_\mu(\mathbf{p} - \mathbf{k}; \tau_1; \mathbf{p}) + N^\mu(\mathbf{p}; \mathbf{p} - \mathbf{k}) \frac{\frac{1}{2}(1 - \tau_3)}{-\tau_3 E(\mathbf{p}) - k_0 + \tau_3 E(\mathbf{p} - \mathbf{k})} \times \\
&\times \left. N_\mu(\mathbf{p} - \mathbf{k}; \mathbf{p}) + N^\mu(\mathbf{p}; \tau_1; \mathbf{p} - \mathbf{k}) \frac{\frac{1}{2}(1 - \tau_3)}{-\tau_3 E(\mathbf{p}) - k_0 + \tau_3 E(\mathbf{p} - \mathbf{k})} N_\mu(\mathbf{p} - \mathbf{k}; \tau_1; \mathbf{p}) \right].
\end{aligned}$$

Для случая $p^2 = m^2$ и, принимая во внимание, что оператор $-i\sum^2(p)$ находится в обкладках волновых функций $\Phi_{1FW}^{(+)\dagger}$ и $\Phi_{1FW}^{(+)}$, т. е. в соответствии с (33) и (45) фактически в обкладках функций для правых ($\Phi_{1FW}^{(+)\dagger}$ и $\Phi_{1FW}^{(+)}$) и левых ($\Phi_{2FW}^{(+)\dagger}$ и $\Phi_{2FW}^{(+)}$) электронов, получаем $-i\sum^{(2)}(p) = -\frac{2e^2}{E(\mathbf{p})} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4 k^2} \frac{pk + m^2}{[(p-k)^2 - m^2]}$, что совпадает с учетом нормировки спиноров во внешних электронных линиях с выражением для массового оператора в дираковском представлении.

5. Поляризация вакуума

Диаграммам рис. 8 соответствует в итоге следующее выражение для поляризованного оператора:

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu}(q) = & -\frac{1}{2} \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \left\{ Sp \frac{1}{E(\mathbf{p}) - q^0 + E(\mathbf{p}-\mathbf{q})} N^\mu(\mathbf{p}; \mathbf{p}-\mathbf{q}) \frac{1-\tau_3}{2} N^\nu(\mathbf{p}-\mathbf{q}; \mathbf{p}) + Sp \frac{1}{E(\mathbf{p}) + q^0 + E(\mathbf{p}-\mathbf{q})} \right. \\ & \times N^\mu(\mathbf{p}-\mathbf{q}; \mathbf{p}) \frac{1-\tau_3}{2} N^\nu(\mathbf{p}; \mathbf{p}-\mathbf{q}) + Sp \frac{1}{E(\mathbf{p}) - q^0 + E(\mathbf{p}-\mathbf{q})} C^\mu(\mathbf{p}; \tau_1; \mathbf{p}-\mathbf{q}) \frac{1-\tau_3}{2} C^\nu(\mathbf{p}-\mathbf{q}; \tau_1; \mathbf{p}) + \\ & \left. + Sp \frac{1}{E(\mathbf{p}) + q^0 + E(\mathbf{p}-\mathbf{q})} C^\mu(\mathbf{p}-\mathbf{q}; \tau_1; \mathbf{p}) \frac{1-\tau_3}{2} C^\nu(\mathbf{p}; \tau_1; \mathbf{p}-\mathbf{q}) \right\}. \end{aligned}$$

После вычисления шпуров выражение для $\Pi^{\mu\nu}$ совпадает с гайтлеровским тензором индукции $-L^{\mu\nu}$ [11], который, в свою очередь, совпадает с поляризованным оператором стандартной КЭД.

6. Радиационные поправки к рассеянию электронов во внешнем поле

При вычислении радиационных поправок по диаграммам рис. 9, как и в предыдущих случаях, матричные элементы $S_{\bar{f}i}$, соответствующие диаграммам с электрон-позитронными пропагаторами, сокращаются с частями матричных элементов, соответствующих беспропагаторным диаграммам рис. 9, г, з, м. В итоге с учетом предельного процесса Гайтлера для сингулярных знаменателей [11] матричный элемент для искомым радиационных поправок имеет вид

$$\begin{aligned} S_{\bar{f}i} &= S_{1\bar{f}i} + S_{2\bar{f}i}; \\ S_{1\bar{f}i} &= S_{1\bar{f}i}^{(1)} + S_{1\bar{f}i}^{(2)} + S_{1\bar{f}i}^{(3)} + S_{1\bar{f}i}^{(4)} + S_{1\bar{f}i}^{(5)}; \\ S_{2\bar{f}i} &= S_{2\bar{f}i}^{(1)} + S_{2\bar{f}i}^{(2)} + S_{2\bar{f}i}^{(3)} + S_{2\bar{f}i}^{(4)} + S_{2\bar{f}i}^{(5)}; \\ S_{1\bar{f}i}^{(1)} &= \frac{1}{(2\pi)^3} \Phi_{1FW}^{(+)\dagger}(p_f, s_f) \left\{ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4 k^2} \int \frac{d\varepsilon \delta(\varepsilon)}{p_f^2 \varepsilon (2+\varepsilon)} \left[C_\mu(p_f; p_f(1+\varepsilon) - \mathbf{k}) \frac{\tau_3 E(\mathbf{p}_f) + \tau_3 E(\mathbf{p}_f(1+\varepsilon))}{\tau_3 E(\mathbf{p}_f) - k^0 - \tau_3 E(\mathbf{p}_f(1+\varepsilon) - \mathbf{k})} \right. \right. \\ & \times C^\mu(\mathbf{p}_f(1+\varepsilon) - \mathbf{k}; \mathbf{p}_f(1+\varepsilon)) + N_\mu(\mathbf{p}_f; \mathbf{p}_f(1+\varepsilon) - \mathbf{k}) \times \\ & \left. \times \frac{\tau_3 E(\mathbf{p}_f) + \tau_3 E(\mathbf{p}_f(1+\varepsilon))}{\tau_3 E(\mathbf{p}_f) - k^0 - \tau_3 E(\mathbf{p}_f(1+\varepsilon) - \mathbf{k})} N^\mu(\mathbf{p}_f(1+\varepsilon) - \mathbf{k}; \mathbf{p}_f(1+\varepsilon)) \right] C^\nu(\mathbf{p}_f; \mathbf{p}_i) A_\nu(q) + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4 k^2} \int \frac{d\varepsilon \delta(\varepsilon)}{p_i^2 \varepsilon (2+\varepsilon)} \times \\ & \times \left[C_\mu(\mathbf{p}_i(1+\varepsilon); \mathbf{p}_i(1+\varepsilon) - \mathbf{k}) \frac{\tau_3 E(\mathbf{p}_i) + \tau_3 E(\mathbf{p}_i(1+\varepsilon))}{\tau_3 E(\mathbf{p}_i) - k^0 - \tau_3 E(\mathbf{p}_i(1+\varepsilon) - \mathbf{k})} C^\mu(\mathbf{p}_i(1+\varepsilon) - \mathbf{k}; \mathbf{p}_i) + \right. \\ & \left. + N_\mu(\mathbf{p}_i(1+\varepsilon); \mathbf{p}_i(1+\varepsilon) - \mathbf{k}) \frac{\tau_3 E(\mathbf{p}_i) + \tau_3 E(\mathbf{p}_i(1+\varepsilon))}{\tau_3 E(\mathbf{p}_i) - k^0 - \tau_3 E(\mathbf{p}_i(1+\varepsilon) - \mathbf{k})} N^\mu(\mathbf{p}_i(1+\varepsilon) - \mathbf{k}; \mathbf{p}_i) \right] \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times C^v(\mathbf{p}_f; p_i) A_v(q) - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 k^2} \frac{1}{2\tau_3 E(\mathbf{p}_f)} \left[\frac{1}{\tau_3 E(\mathbf{p}_f) - k^0 + \tau_3 E(\mathbf{p}_f - \mathbf{k})} N_\mu(\mathbf{p}_f; \mathbf{p}_f - \mathbf{k}) C^\mu(\mathbf{p}_f - \mathbf{k}; \mathbf{p}_f) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{\tau_3 E(\mathbf{p}_f) - k^0 - \tau_3 E(\mathbf{p}_f) - \mathbf{k}} C_\mu(\mathbf{p}_f; \mathbf{p}_f - \mathbf{k}) N^\mu(\mathbf{p}_f - \mathbf{k}; \mathbf{p}_f) \right] N^v(\mathbf{p}_f; \mathbf{p}_i) A_v(q) - \\
& \quad - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 k^2} \frac{1}{2\tau_3 E(\mathbf{p}_i)} N^v(\mathbf{p}_f; \mathbf{p}_i) A_v(q) \left[\frac{1}{\tau_3 E(\mathbf{p}_i) - k^0 - \tau_3 E(\mathbf{p}_i - \mathbf{k})} \times \right. \\
& \quad \left. \times N_\mu(\mathbf{p}_i; \mathbf{p}_i - \mathbf{k}) C^\mu(\mathbf{p}_i - \mathbf{k}; \mathbf{p}_i) + \frac{1}{\tau_3 E(\mathbf{p}_i) - k^0 + \tau_3 E(\mathbf{p}_i - \mathbf{k})} C_\mu(\mathbf{p}_i; \mathbf{p}_i - \mathbf{k}) N^\mu(\mathbf{p}_i - \mathbf{k}; \mathbf{p}_i) \right] - \\
& \quad - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 k^2} \left[C^\mu(\mathbf{p}_f; \mathbf{p}_f - \mathbf{k}) \frac{1}{\tau_3 E(\mathbf{p}_f) - k^0 - \tau_3 E(\mathbf{p}_f - \mathbf{k})} C^v(\mathbf{p}_f - \mathbf{k}; \mathbf{p}_i - \mathbf{k}) A_v(q) \times \right. \\
& \quad \times \frac{1}{\tau_3 E(\mathbf{p}_i) - k^0 - \tau_3 E(\mathbf{p}_i - \mathbf{k})} C_\mu(\mathbf{p}_i - \mathbf{k}; \mathbf{p}_i) + N^v(\mathbf{p}_f; \mathbf{p}_f - \mathbf{k}) \frac{1}{\tau_3 E(\mathbf{p}_f) - k^0 + \tau_3 E(\mathbf{p}_f - \mathbf{k})} C^v(\mathbf{p}_f - \mathbf{k}; \mathbf{p}_i - \mathbf{k}) A_v(q) \times \\
& \quad \times \frac{1}{\tau_3 E(\mathbf{p}_i) - k^0 + \tau_3 E(\mathbf{p}_i - \mathbf{k})} N_\mu(\mathbf{p}_i - \mathbf{k}; \mathbf{p}_i) + N^\mu(\mathbf{p}_f; \mathbf{p}_f - \mathbf{k}) \frac{1}{\tau_3 E(\mathbf{p}_f) - k^0 + \tau_3 E(\mathbf{p}_f - \mathbf{k})} N^v(\mathbf{p}_f - \mathbf{k}; \mathbf{p}_i - \mathbf{k}) A_v(q) \times \\
& \quad \times \frac{1}{\tau_3 E(\mathbf{p}_i) - k^0 - \tau_3 E(\mathbf{p}_i - \mathbf{k})} C_\mu(\mathbf{p}_i - \mathbf{k}; \mathbf{p}_i) + C^\mu(\mathbf{p}_f; \mathbf{p}_i - \mathbf{k}) \frac{1}{\tau_3 E(\mathbf{p}_f) - k^0 - \tau_3 E(\mathbf{p}_f - \mathbf{k})} N^v(\mathbf{p}_f - \mathbf{k}; \mathbf{p}_i - \mathbf{k}) A_v(q) \times \\
& \quad \left. \left. \times \frac{1}{\tau_3 E(\mathbf{p}_i) - k^0 + \tau_3 E(\mathbf{p}_i - \mathbf{k})} N_\mu(\mathbf{p}_i - \mathbf{k}; \mathbf{p}_i) \right] \right\} \Phi_{1fW}^{(+)}(p_i, s_i).
\end{aligned}$$

Как показывают вычисления, выражения $S_{1f}^{(2)}$, $S_{1f}^{(3)}$, $S_{1f}^{(4)}$ равны $S_{1f}^{(1)}$ и отличаются по написанию наличием в каждом слагаемом $S_{1f}^{(1)}$ двух операторов ... C ... C ... либо ... C ... N ..., либо ... N ... C ..., либо ... N ... N ... с матрицей τ_1 в каждом из них.

Выражение $S_{1f}^{(5)}$ равно

$$S_{1f}^{(5)} = -\frac{1}{(2\pi)^3} \Phi_{1fW}^{(+)}(p_f, s_f) C_\mu(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}_i) \frac{\Pi^{\mu\nu}(q)}{q^2} A_v(q) \Phi_{1fW}^{(+)}(p_i, s_i).$$

Выражение S_{2fi} равно S_{1fi} и отличается по написанию волновыми функциями: вместо функций $\Phi_{1fW}^{(+)}$ для правых электронов используются функции $\Phi_{2fW}^{(+)}$ для левых электронов.

После перенормировки массы и заряда электрона итоговый матричный элемент S_{fi} позволяет вычислить аномальный магнитный момент электрона и лэмбовский сдвиг энергетических атомных уровней. Конечные результаты вычислений совпадают с аналогичными величинами в дираковском представлении.

7. Аннигиляция электрон-позитронной пары

Процессу аннигиляции электрон-позитронной пары во втором порядке теории возмущений соответствуют диаграммы рис. 6 для комптоновского рассеяния электронов с заменой $\varepsilon, k \rightarrow \varepsilon_1, -k_1$; $\varepsilon', k' \rightarrow \varepsilon_2, k_2$; $p_i, s_i \rightarrow p_-, s_-$; $p_f, s_f \rightarrow -p_+, s_+$.

С учетом этой замены матричный элемент процесса S_\pm равен

$$S_\pm = \frac{-i(2\pi)^4 \delta^4(p_- + p_+ - k_1 - k_2)}{(2\pi)^3 \sqrt{2k_1^0 2k_2^0}} \left(\Phi_{2fW}^{(-)\dagger}(-p_+, s_+) A_1 \Phi_{1fW}^{(-)}(p_-, s_-) \times \Phi_{1fW}^{(-)\dagger}(-p_+, s_+) A_1 \Phi_{2fW}^{(-)}(p_-, s_-) \right).$$

Оператор A_1 по своей структуре с учетом указанной выше замены совпадает с оператором A в выражении S_{fi} для комптоновского рассеяния электронов за исключением расположения матриц τ_1 в операторах C^μ , N^μ .

В выражении S_{fi} первые четыре слагаемых не содержат матрицу τ_1 , остальные четыре слагаемых содержат τ_1 в каждом операторе C^μ , N^μ .

В нашем случае в выражении S_\pm для обеспечения связи правого электрона и правого позитрона либо левого электрона и левого позитрона в каждом из восьми слагаемых содержится лишь по одной матрице τ_1 , которые расположены в операторах C^μ , N^μ во всех возможных сочетаниях.

Итоговое выражение для S_\pm позволяет получить дифференциальное сечение аннигиляции электрон-позитронной пары, которое совпадает с сечением этого процесса, вычисленным в представлении Дирака.

Список литературы

1. Foldy L. L., Wouthuysen S. A. // Phys. Rev. 1950. Vol. 78. P. 29.
2. Незнамов В. П. // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2010. Вып. 1–2, 3; arxiv: 0605215 [hep-th].
3. Eriksen E. // Phys. Rev. 1958. Vol. 111. P. 1011.
4. Незнамов В. П. // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 1988. Вып. 2. С. 21.
5. Незнамов В. П. // Физика элементарных частиц и атомного ядра. 2006. Т. 37 (1). С. 152 [Physics of Particles and Nuclei 37 (1), 86; Pleadas Publishing, Inc. (2006)].
6. Neznamov V. P., Silenko A. J. // J. Math. Phys. 2009. Vol. 50. P. 122302.
7. Незнамов В. П. arxiv: 0412047 [hep-th].
8. Дирак Р. А. М. Принципы квантовой механики. М.: Наука, 1979 [P. A. M. Dirac. The principles of quantum mechanics. Fourth edition. Oxford, at the Clarendon press, 1958].
9. Швевбер С. С. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. М.: Изд-во иностр. лит., 1963 [S. S. Schweber. An introduction to relativistic quantum field theory. Row, Peterson and Co Eyantson, Ill., Elmsford, N. Y., 1961].
10. Бьеркен Д. Д., Дрелл С. Д. Релятивистская квантовая теория. М.: Наука, 1978. Т. 1. [J. D. Bjorken, S. D. Drell. Relativistic quantum mechanics. McGraw – Hill Book Company, 1964].
11. Гайтлер В. Квантовая теория излучения. М.: Изд-во иностр. лит., 1956 [W. Heitler. The quantum theory of radiation. Third edition, Oxford, at the Clarendon press, 1954].

Статья поступила в редакцию 07.02.2011