УДК 530.145; 514.764.2; 530.145.7

ЕДИНСТВЕННОСТЬ И САМОСОПРЯЖЕННОСТЬ ДИРАКОВСКИХ ГАМИЛЬТОНИАНОВ В ПРОИЗВОЛЬНЫХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ПОЛЯХ

М. В. Горбатенко, В. П. Незнамов*

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Представлены доказательства двух утверждений: доказывается, что формализм псевдоэрмитовой квантовой механики позволяет описать движение дираковских частиц в произвольных стационарных гравитационных полях и что с помощью весового оператора Паркера и последующего перехода в η-представление уравнение Шредингера для нестационарной метрики может быть преобразовано к виду, при котором оператор эволюции становится самосопряженным. Скалярные произведения в η-представлении – плоские, что позволяет использовать стандартный аппарат для эрмитовой квантовой механики. По результатам данной работы авторы делают заключение о решении проблемы единственности и самосопряженности дираковских гамильтонианов в произвольных гравитационных полях, в том числе и зависящих от времени. Общий подход иллюстрируется на примере дираковских гамильтонианов для нескольких стационарных метрик, а также для пространственно-плоской и открытой моделей Фридмана.

Ключевые слова: Гравитационные поля, гамильтониан, дираковская частица, модель Фридмана.

Введение

В работе [1] мы рассмотрели вопрос о единственности и эрмитовости гамильтониана для дираковской частицы в слабом стационарном гравитационном поле. На примере поля, описываемого решением Керра, были проанализированы выражения для гамильтонианов в трех системах реперов: для системы реперов, использовавшейся в работах [2−4], киллинговой системы реперов и системы реперов в так называемой симметричной калибровке. Было показано, что все возникающие гамильтонианы могут быть рассмотрены методами псевдоэрмитовой квантовой механики, причем гамильтониан в так называемом η-представлении** имеет один и тот же вид H_η, совпадающий с гамильтонианом $\tilde{H}_\eta$, возникающим при выборе системы реперов из работ [2−4]. Обнаруженная в [1] независимость гамильтониана H_η в η-представлении от выбора любой из трех конкретных систем реперов не позволяет утверждать, что эта независимость сохранится и в общем случае. Тем не менее по результатам рассмотрения в работе [1] мы выдвинули гипотезу о том, что гамильтониан H_η в η-представлении вообще не зависит от выбора системы реперов. Дополнительное подтверждение правильности сделанного нами вывода было получено при анализе скалярного произведения Паркера [5, 6].

Оказалось, что при любом выборе системы реперов гамильтониан H_η выражается через весовой оператор

$$\rho = \eta^{+}\eta, \tag{1}$$

используемый в скалярном произведении Паркера.

При доказательстве эрмитовости гамильтониана и его единственности в работе [1] был использован ряд ограничений. Во-первых, гравитационные поля считались слабыми и стационарными. В силу этого из работы [1] не следует вывод об единственности гамильтониана в η-представлении на случай общих гравитационных полей. Во-вторых, не была прослежена связь оператора η с выбором системы реперов, используемых для описания динамики дираковских частиц.

В данной работе мы устраняем перечисленные пробелы. Здесь вопрос о единственности и самосопряженности дираковских гамильтонианов рассмотрен применительно к произвольным гравитационным полям, в том числе зависящим от времени.

1. Формализм псевдоэрмитовой квантовой механики

При изложении формализма псевдоэрмитовой квантовой механики мы следуем работам [7−9]. Условие псевдоэрмитовости гамильтонианов предполагает

---

*E-mail: neznamov@vniief.ru

**В данной работе используются обозначения из [1]; дополнительные пояснения по обозначениям приводятся в разделах 1, 2.

существование обратимого оператора ρ, удовлетворяющего соотношению

$$\rho H \rho^{-1} = H^{+}. \quad (2)$$

Если при этом существует оператор η, удовлетворяющий соотношению

$$\rho = \eta^{+}\eta, \quad (3)$$

то для гамильтонианов, не зависящих от времени, получаем в η-представлении гамильтониан

$$H_{\eta} = \eta H \eta^{-1} = H_{\eta}^{+}, \quad (4)$$

являющийся самосопряженным со спектром собственных значений, совпадающим со спектром исходного гамильтониана H.

Волновая функция ψ для исходного гамильтониана удовлетворяет уравнению

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi, \quad (5)$$

волновая функция ψ в η-представлении удовлетворяет уравнению

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = H_{\eta}\Psi = \eta H \eta^{-1}\Psi, \quad (6)$$

$$\Psi = \eta\psi. \quad (7)$$

В выражениях (5), (6) и ниже используется система единиц $\hbar = c = 1$.

Скалярное произведение в исходном представлении по определению равно

$$\langle\varphi,\psi\rangle_{\rho} = \int d^3x\left(\varphi^{+}\rho\psi\right). \quad (8)$$

Для волновой функции в η-представлении скалярное произведение имеет стандартный для эрмитовой квантовой механики вид (плоское скалярное произведение):

$$\left(\Phi,\Psi\right) = \int d^3x\left(\Phi^{+}\Psi\right). \quad (9)$$

Очевидно, с учетом (3), (7) скалярные произведения (8) и (9) равны:

$$\langle\varphi,\psi\rangle_{\rho} = \left(\Phi,\Psi\right). \quad (10)$$

В работе [1] была исследована также связь скалярного произведения (8) со скалярным произведением Паркера, предложенным в работах [5, 6]. В результате установлено, что для трех гамильтонианов решения Керра с разным выбором систем реперных векторов оператор ρ в выражении (8) совпадает с весовым оператором в скалярном произведении Паркера (1). В настоящей работе в разделе 3 эта связь устанавливается в общем случае для дираковского гамильтониана в произвольном стационарном гравитационном поле с выполнением условия псевдоэрмитовости (2).

В общем случае гравитационных полей, зависящих от времени, условие (2) не выполняется. Однако и в этом случае возможен переход в η-представление с получением единственного и самосопряженного гамильтониана с соответствующим плоским скалярным произведением. Этим вопросам посвящен раздел 5 настоящей работы.

В разделе 7 алгоритм разделов 5, 6 применяется для получения самосопряженных дираковских гамильтонианов для нескольких стационарных метрик, а также для нестационарных пространственно-плоской и открытой моделей Фридмана.

В Заключении проводится обсуждение результатов работы.

2. Приведение уравнения Дирака к форме уравнения Шредингера

Напомним ход соответствующих рассуждений и введем обозначения. Реперные векторы определяются соотношениями

$$H_{\underline{\alpha}}^{\mu} H_{\underline{\beta}}^{\nu} g_{\mu\nu} = \eta_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}, \quad (11)$$

где

$$\eta_{\underline{\alpha}\underline{\beta}} = \mathrm{diag}\left[-1, 1, 1, 1\right]. \quad (12)$$

Наряду с системой реперов $H_{\underline{\alpha}}^{\mu}$ могут быть введены еще три системы реперных векторов $H_{\underline{\alpha}\mu}$, $H^{\underline{\alpha}\mu}$, $H_{\mu}^{\underline{\alpha}}$, отличающиеся от $H_{\underline{\alpha}}^{\mu}$ местом мирового и локального (подчеркнутого) индексов. Поднимание и опускание мировых индексов производится с помощью метрического тензора $g_{\mu\nu}$ и обратного к нему тензора $g^{\mu\nu}$, а локальных индексов – с помощью тензоров $\eta_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}$, $\eta^{\underline{\alpha}\underline{\beta}}$.

Предполагается, что движение частиц описывается уравнением Дирака, которое в системе единиц $\hbar = c = 1$ записывается как

$$\gamma^{\alpha}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x^{\alpha}} + \Phi_{\alpha}\psi\right) - m\psi = 0. \quad (13)$$

Здесь m − масса частицы, ψ − 4-компонентный «столбцовый» биспинор, γ^{α} − матрицы Дирака 4×4, удовлетворяющие соотношению

$$\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta} + \gamma^{\beta}\gamma^{\alpha} = 2g^{\alpha\beta}E. \quad (14)$$

Под E в (14) имеется в виду единичная 4×4 матрица.

В круглых скобках в (13) стоит ковариантная производная от биспинора $\nabla_{\alpha}\psi$,

$$\nabla_{\alpha}\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x^{\alpha}} + \Phi_{\alpha}\psi. \quad (15)$$

В конструкцию (15) для $\nabla_{\alpha}\psi$ входит биспинорная связность Φ_{α}, для нахождения которой необходимо фиксировать некоторую систему реперных векторов $H_{\underline{\alpha}}^{\mu}$, определяемых соотношением (11). После этого величина Φ_{α} может быть выражена через «кристоффельные» производные от реперов следующим образом («кристоффельные» производные обозначаются точкой с запятой):

$$\Phi_{\alpha} = -\frac{1}{4}H_{\mu}^{\underline{\varepsilon}} H_{\nu\underline{\varepsilon};\alpha} S^{\mu\nu}. \quad (16)$$

Выражение для $S^{\mu\nu}$ в (16) определено ниже – см. формулы (20). Биспинорная связность Φ_α вида (16) обеспечивает инвариантность ковариантной производной $\nabla_\alpha\psi$ относительно перехода от одной системы реперов к другой.

Далее наряду с дираковскими матрицами с мировыми индексами γ^α будут использоваться дираковские матрицы с локальными индексами $\gamma^{\underline{\alpha}}$. Связь между γ^α и $\gamma^{\underline{\alpha}}$ определяется соотношением

$$\gamma^\alpha = H^\alpha_{\underline{\beta}}\gamma^{\underline{\beta}}. \tag{17}$$

Из (11), (14), (17) следует, что

$$\gamma^{\underline{\alpha}}\gamma^{\underline{\beta}} + \gamma^{\underline{\beta}}\gamma^{\underline{\alpha}} = 2\eta^{\underline{\alpha}\underline{\beta}}E. \tag{18}$$

В терминах матриц $\gamma^{\underline{\alpha}}$ уравнение Дирака (13) может быть записано следующим образом:

$$H^\alpha_{\underline{\mu}}\gamma^{\underline{\mu}}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x^\alpha} + \Phi_\alpha\psi\right) - m\psi = 0. \tag{19}$$

Величины $\gamma^{\underline{\alpha}}$ удобно выбирать так, чтобы они имели одинаковый вид во всех локальных системах отсчета. Как система $\gamma^{\underline{\alpha}}$, так и система γ^α могут быть использованы для построения полной системы матриц 4×4. Полной системой является, например, система

$$E,\ \gamma_\alpha, S_{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2}\left(\gamma_\alpha\gamma_\beta - \gamma_\beta\gamma_\alpha\right),\ \gamma_5 \equiv \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3,\ \gamma_5\gamma_\alpha. \tag{20}$$

Всякая система дираковских матриц допускает несколько дискретных автоморфизмов. Мы ограничимся автоморфизмом

$$\gamma_\alpha \to \gamma_\alpha^+ = -D\gamma_\alpha D^{-1}. \tag{21}$$

Матрицу D будем называть антиэрмитизирующей.

Из (5), (13) следует, что исходный гамильтониан имеет следующий вид:

$$H = -\frac{im}{\left(-g^{00}\right)}\gamma^0 + \frac{i}{\left(-g^{00}\right)}\gamma^0\gamma^k\frac{\partial}{\partial x^k} - \\ - i\Phi_0 + \frac{i}{\left(-g^{00}\right)}\gamma^0\gamma^k\Phi_k. \tag{22}$$

Оператор H (22) имеет смысл оператора эволюции волновой функции дираковской частицы в выбранной мировой системе отсчета.

Далее по тексту будут использоваться следующие соотношения (см., например, [1]):

$$\gamma^+_{\underline{\alpha}} = \gamma_{\underline{0}}\gamma_{\underline{\alpha}}\gamma_{\underline{0}},\ \ \gamma^+_\alpha = \gamma_{\underline{0}}\gamma_\alpha\gamma_{\underline{0}}, \tag{23}$$

$$\left(\Phi_\alpha\right)^+ = \gamma_{\underline{0}}\Phi_\alpha\gamma_{\underline{0}}, \tag{24}$$

$$\gamma^0\gamma^0 = g^{00},\ \ \gamma_{\underline{0}}\gamma_{\underline{0}} = -E. \tag{25}$$

Ковариантные производные от дираковских матриц равны нулю:

$$\nabla_\mu\gamma_\alpha = \gamma_{\alpha;\mu} + \left[\Phi_\mu, \gamma_\alpha\right]_- = 0. \tag{26}$$

3. Выполнение условия псевдоэрмитовости с весовым оператором Паркера

При произвольном выборе системы реперов и при произвольном внешнем гравитационном поле дираковский гамильтониан H записывается в виде (22). Покажем в общем виде, в каких случаях выполняется условие псевдоэрмитовости (2) с весовым оператором Паркера

$$\rho = \sqrt{-g}\ \gamma_{\underline{0}}\gamma^0. \tag{27}$$

Прямой проверкой убеждаемся в том, что обратный оператор ρ^{-1} имеет вид

$$\rho^{-1} = \frac{1}{\sqrt{-g}\left(-g^{00}\right)}\gamma^0\gamma_{\underline{0}}. \tag{28}$$

Легко убедиться в том, что оператор (27) является эрмитовым

$$\rho^+ = \sqrt{-g}\ \gamma^{0+}\gamma^+_{\underline{0}} = \sqrt{-g}\ \gamma_{\underline{0}}\gamma^0\gamma_{\underline{0}}\gamma_{\underline{0}}\gamma_{\underline{0}}\gamma_{\underline{0}} = \\ = \sqrt{-g}\ \gamma_{\underline{0}}\gamma^0 = \rho. \tag{29}$$

Проверим выполнение условия (2) для гамильтониана (22) с использованием операторов (27), (28). Будем определять разницу

$$\Delta \equiv H^+ - \rho H\rho^{-1} = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4, \tag{30}$$

где Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 определяются соответствующими слагаемыми гамильтониана (22)

$$\Delta_1 = \left(-\frac{im}{\left(-g^{00}\right)}\gamma^0\right)^+ - \\ - \sqrt{-g}\gamma_{\underline{0}}\gamma^0\left(-\frac{im}{\left(-g^{00}\right)}\right)\frac{1}{\sqrt{-g}}\gamma^0\frac{1}{\left(-g^{00}\right)}\gamma_{\underline{0}} = \\ = im\gamma_{\underline{0}}\gamma^0\frac{1}{\left(-g^{00}\right)}\gamma_{\underline{0}} - im\gamma_{\underline{0}}\gamma^0\frac{1}{\left(-g^{00}\right)}\gamma_{\underline{0}} = 0; \tag{31}$$

$$\Delta_2 = \left(\frac{i}{\left(-g^{00}\right)}\gamma^0\gamma^k\frac{\partial}{\partial x^k}\right)^+ - \\ - \sqrt{-g}\gamma_{\underline{0}}\gamma^0\left(\frac{i}{\left(-g^{00}\right)}\gamma^0\gamma^k\frac{\partial}{\partial x^k}\right)\frac{1}{\sqrt{-g}}\gamma^0\frac{1}{\left(-g^{00}\right)}\gamma_{\underline{0}} = \\ = -i\gamma_{\underline{0}}\left(\frac{\partial\gamma^k}{\partial x^k}\right)\gamma^0\frac{1}{\left(-g^{00}\right)}\gamma_{\underline{0}} - \\ - i\gamma_{\underline{0}}\gamma^k\frac{1}{2(-g)}\frac{\partial(-g)}{\partial x^k}\gamma^0\frac{1}{\left(-g^{00}\right)}\gamma_{\underline{0}}; \tag{32}$$

$$\Delta_3 = \left(-i\Phi_0\right)^+ - \sqrt{-g}\gamma_{\underline{0}}\gamma^0(-i)\Phi_0\frac{1}{\sqrt{-g}}\gamma^0\frac{1}{\left(-g^{00}\right)}\gamma_{\underline{0}} = \\ = i\gamma_{\underline{0}}\gamma^0_{;0}\gamma^0\frac{1}{\left(-g^{00}\right)}\gamma_{\underline{0}}; \tag{33}$$

$$\Delta_4 = \left(\frac{i}{\left(-g^{00}\right)} \gamma^0 \gamma^k \Phi_k \right)^+ -$$

$$- \sqrt{-g}\gamma_{\underline{0}}\gamma^0 \left(\frac{i}{\left(-g^{00}\right)} \gamma^0 \gamma^k \Phi_k \right) \frac{1}{\sqrt{-g}} \gamma^0 \frac{1}{\left(-g^{00}\right)} \gamma_{\underline{0}} =$$

$$= i\gamma_{\underline{0}} \gamma^k_{;k} \gamma^0 \frac{1}{\left(-g^{00}\right)} \gamma_{\underline{0}}. \qquad (34)$$

Подставляя найденные выражения (31)−(34) для Δ_1−Δ_4 в (30), получаем:

$$\Delta = H^+ - \rho H \rho^{-1} =$$

$$= i\gamma_{\underline{0}} \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \mu\ \varepsilon \end{pmatrix} \gamma^\mu \gamma^0 \frac{1}{\left(-g^{00}\right)} \gamma_{\underline{0}} + i\gamma_{\underline{0}} \frac{\partial \gamma^0}{\partial t} \gamma^0 \frac{1}{\left(-g^{00}\right)} \gamma_{\underline{0}} -$$

$$- i\gamma_{\underline{0}} \frac{1}{2(-g)} \gamma^k \frac{\partial(-g)}{\partial x^k} \gamma^0 \frac{1}{\left(-g^{00}\right)} \gamma_{\underline{0}} =$$

$$= i\gamma_{\underline{0}} \left(\frac{1}{\left(-g^{00}\right)} \frac{\partial \gamma^0}{\partial t} \gamma^0 - \frac{1}{2(-g)} \frac{\partial(-g)}{\partial t} \right) \gamma_{\underline{0}}. \qquad (35)$$

При получении окончательного выражения в (35) использовалось соотношение

$$\begin{pmatrix} \varepsilon \\ \mu\ \varepsilon \end{pmatrix} = \frac{1}{2(-g)} \frac{\partial(-g)}{\partial x^\mu}. \qquad (36)$$

Равенство (35), как следует из его вывода, справедливо в общем виде, поскольку при его получении не делалось никаких предположений частного характера о метрике и системе реперов.

В правую часть соотношения (35) входят производные по времени от детерминанта метрики и от дираковских матриц γ^0. Поэтому, если эти два класса величин не зависят от времени, т. е. в случае стационарных гравитационных полей, для гамильтониана (22) автоматически выполняется условие псевдоэрмитовости (2). Утверждение аналогичного характера было доказано и в [1], но теперь это утверждение относится к любому выбору системы реперов и к любому стационарному гравитационному полю, а не только к тем трем системам реперов и к слабым полям решений Шварцшильда и Керра, которые рассматривались в [1].

В последующем нам понадобится записать соотношение (35) в системе реперов в калибровке Швингера (см. раздел 4). При переходе к указанной системе соотношение (35) меняется – матрицу $\gamma^0(x)$ необходимо заменить на $\tilde{\gamma}^0(x)$ согласно равенству $\tilde{\gamma}^0(x) = \sqrt{-g^{00}}\ \gamma^{\underline{0}}$. Таким образом,

$$\Delta = i \frac{\partial \ln\sqrt{-g}}{\partial t} + i \frac{\partial \ln\sqrt{-g^{00}}}{\partial t}. \qquad (37)$$

Отметим, что условие (2) может также выполняться в некоторых специальных случаях, когда

$$\frac{1}{\left(-g^{00}\right)} \frac{\partial \gamma^0}{\partial t} \gamma^0 = \frac{1}{2(-g)} \frac{\partial(-g)}{\partial t}. \qquad (38)$$

При выполнении условия псевдоэрмитовости (2) в соответствии с (3)−(10), переход в η-представление позволяет получить самосопряженный гамильтониан (4) с плоским скалярным произведением (9) и со спектром собственных значений, совпадающим со спектром исходного гамильтониана H.

Далее покажем единственность гамильтониана H_η, определяемого выражением (4).

4. Единственность гамильтониана H_η

4.1. Система реперов в калибровке Швингера

В работе [10] Швингером была введена система реперов $\left\{\tilde{H}^\mu_{\underline{\alpha}}(x)\right\}$, в которой вектор $\tilde{H}^0_{\underline{\alpha}}$ имеет следующие компоненты:

$$\tilde{H}^0_{\underline{0}} \neq 0;\ \tilde{H}^0_{\underline{k}} = 0. \qquad (39)$$

Из-за особой значимости этой системы опишем систематическим образом процедуры и следствия, связанные с введением (39).

Предположим, что в рассматриваемом 4-мерном римановом пространстве с сигнатурой (− + + +) выбрана мировая система координат $\left\{x^\alpha\right\}$ и в этой системе задано поле метрического тензора $g_{\alpha\beta}(x)$. Предположим далее, что в каждой точке пространства введены касательное пространство Минковского, система реперных векторов $\left\{H^\mu_{\underline{\alpha}}(x)\right\}$ и постоянная по всему пространству система реперных дираковских матриц $\left\{\gamma^{\underline{\alpha}}\right\}$. Мировая система дираковских матриц $\left\{\gamma^\alpha(x)\right\}$ связана с системой $\left\{\gamma^{\underline{\alpha}}\right\}$ посредством соотношения (17).

В трехмерном подпространстве, натянутом на координаты $\left\{x^k\right\}$, введем тензор

$$f^{mn} \equiv g^{mn} - \frac{g^{0m} g^{0n}}{g^{00}}. \qquad (40)$$

С помощью равенств, вытекающих из соотношений $g_{\alpha\varepsilon} g^{\varepsilon\beta} = \delta^\beta_\alpha$, можно показать, что тензор f^{mn} является обратным к тензору g_{mn} в 3-мерном подпространстве, т. е. удовлетворяет соотношениям

$$g_{mp} f^{pn} = \delta^n_m, \quad \det\left(f^{mn}\right) \neq 0. \qquad (41)$$

В 3-мерном подпространстве введем ортонормированную систему реперов $\left\{\tilde{H}^n_{\underline{m}}\right\}$ таких, которые удовлетворяют соотношениям

$$\tilde{H}^m_{\underline{p}}(x) \tilde{H}^n_{\underline{q}}(x) \eta^{\underline{pq}} \equiv \tilde{H}^m_{\underline{p}}(x) \tilde{H}^n_{\underline{p}}(x) = f^{mn}(x). \qquad (42)$$

Введем вектор $\tilde{H}^{\alpha}_{\underline{0}} = \left(\tilde{H}^{0}_{\underline{0}}, \tilde{H}^{k}_{\underline{0}}\right)$ с компонентами

$$\tilde{H}^{0}_{\underline{0}} = \sqrt{-g^{00}}; \quad \tilde{H}^{k}_{\underline{0}} = -\frac{g^{0k}}{\sqrt{-g^{00}}} \tag{43}$$

и три 4-мерных вектора $\tilde{H}^{\mu}_{\underline{k}}(x)$ с компонентами

$$\tilde{H}^{0}_{\underline{k}}(x) = 0, \ \tilde{H}^{m}_{\underline{k}}(x). \tag{44}$$

Под $\tilde{H}^{m}_{\underline{k}}(x)$ имеются в виду те векторы, которые удовлетворяют соотношениям (42). Тогда система четырех векторов $\tilde{H}^{\mu}_{\underline{\alpha}}(x) = \left\{\tilde{H}^{\mu}_{\underline{0}}(x), \tilde{H}^{\mu}_{\underline{k}}(x)\right\}$ представляет собой систему реперов в калибровке Швингера.

Покажем прежде всего, что введенные векторы образуют систему реперов в 4-мерном пространстве, т. е. удовлетворяют базовым соотношениям

$$\tilde{H}^{\mu}_{\underline{\alpha}}(x)\tilde{H}^{\nu}_{\underline{\beta}}(x)\eta^{\underline{\alpha\beta}} = g^{\mu\nu}(x). \tag{45}$$

Для доказательства запишем в компонентах соотношения (45)

$$\left.\begin{aligned} -\tilde{H}^{0}_{\underline{0}}\tilde{H}^{0}_{\underline{0}} + \tilde{H}^{0}_{\underline{k}}\tilde{H}^{0}_{\underline{k}} &= g^{00}, \\ -\tilde{H}^{0}_{\underline{0}}\tilde{H}^{m}_{\underline{0}} + \tilde{H}^{0}_{\underline{k}}\tilde{H}^{m}_{\underline{k}} &= g^{0m}, \\ -\tilde{H}^{m}_{\underline{0}}\tilde{H}^{n}_{\underline{0}} + \tilde{H}^{m}_{\underline{k}}\tilde{H}^{n}_{\underline{k}} &= g^{mn}. \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

Соотношения в первой и второй строчках в (46) удовлетворяются очевидным образом после того, как в них будут подставлены значения компонент (43), (44). После подстановки (43) в третью строчку (46) получаем

$$\tilde{H}^{m}_{\underline{k}}\tilde{H}^{n}_{\underline{k}} = g^{mn} - \frac{g^{0m}g^{0n}}{g^{00}}. \tag{47}$$

В правой части (47) стоит введенный выше тензор f^{mn}. Поскольку по построению векторы $\left\{\tilde{H}^{n}_{\underline{m}}\right\}$ подбирались так, чтобы они удовлетворяли (42), то, следовательно, равенство (47) выполняется, а вместе с ним выполняются и все соотношения (46).

Из способа построения ясно, что системы реперов в калибровке Швингера определяются с точностью до локальных пространственных вращений в 3-мерных подпространствах, не затрагивающих вектор $\tilde{H}^{\alpha}_{\underline{0}}$ с компонентами (43). В то же время выражение для вектора $\tilde{H}^{0}_{\underline{\alpha}}$ единственно.

Система реперных векторов в представлении Швингера может быть использована как и любая другая система для построения мировых дираковских матриц. Если дираковские матрицы, соответствующие $\left\{\tilde{H}^{\mu}_{\underline{\alpha}}(x)\right\}$, обозначить через $\left\{\tilde{\gamma}^{\alpha}(x)\right\}$, то согласно общему соотношению (17) получим

$$\tilde{\gamma}^{\alpha}(x) = \tilde{H}^{\alpha}_{\underline{\mu}}(x)\gamma^{\underline{\mu}}. \tag{48}$$

Воспользовавшись (43), (44), из (48) получаем:

$$\left.\begin{aligned} \tilde{\gamma}^{0}(x) &= \tilde{H}^{0}_{\underline{\mu}}(x)\gamma^{\underline{\mu}} = \tilde{H}^{0}_{\underline{0}}(x)\gamma^{\underline{0}} = \sqrt{-g^{00}}\ \gamma^{\underline{0}}, \\ \tilde{\gamma}^{k}(x) &= \tilde{H}^{k}_{\underline{0}}(x)\gamma^{\underline{0}} + \tilde{H}^{k}_{\underline{m}}(x)\gamma^{\underline{m}}. \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

Из верхней строчки следует, что матрица $\tilde{\gamma}^{0}(x)$ с точностью до множителя совпадает с $\gamma^{\underline{0}}$. Это свойство выделяет систему реперов в калибровке Швингера среди других систем.

Заметим, что при построении системы реперов в калибровке Швингера не все векторы, входящие в систему реперов $\left\{\tilde{H}^{\mu}_{\underline{\alpha}}(x)\right\}$, определяются однозначно. Соотношения (42) однозначно определяют вектор $\tilde{H}^{\alpha}_{\underline{0}} = \left(\tilde{H}^{0}_{\underline{0}}, \tilde{H}^{k}_{\underline{0}}\right)$. Что касается векторов $\left\{\tilde{H}^{n}_{\underline{m}}\right\}$, то соотношения (42) определяют их с точностью до пространственных вращений в пространстве с метрическим тензором g_{mn} и обратным метрическим тензором f^{mn}. Поскольку эти вращения не влияют на вектор $\tilde{H}^{\alpha}_{\underline{0}}$, то генераторы пространственных вращений коммутируют с $\tilde{\gamma}^{0}$ и, следовательно, являются комбинациями матриц $\gamma_{\underline{2}}\gamma_{\underline{3}}$, $\gamma_{\underline{3}}\gamma_{\underline{1}}$, $\gamma_{\underline{1}}\gamma_{\underline{2}}$.

4.2. Связь между произвольной системой реперов $\left\{H^{\mu}_{\underline{\alpha}}(x)\right\}$ и системой реперов в калибровке Швингера $\left\{\tilde{H}^{\mu}_{\underline{\alpha}}(x)\right\}$

Любые две системы реперов в одном и том же пространстве связаны между собой лоренцевым преобразованием. В нашем случае связь между системами $\left\{H^{\mu}_{\underline{\alpha}}(x)\right\}$ и $\left\{\tilde{H}^{\mu}_{\underline{\alpha}}(x)\right\}$ запишем в виде

$$\tilde{H}^{\mu}_{\underline{\alpha}}(x) = \Lambda_{\underline{\alpha}}{}^{\underline{\beta}}(x)H^{\mu}_{\underline{\beta}}(x). \tag{50}$$

Величины $\Lambda^{\underline{\beta}}_{\underline{\alpha}}(x)$, входящие в (50), удовлетворяют соотношениям

$$\left.\begin{aligned} \Lambda_{\underline{\alpha}}{}^{\underline{\mu}}(x)\Lambda_{\underline{\beta}}{}^{\underline{\nu}}(x)\eta^{\underline{\alpha\beta}} &= \eta^{\underline{\mu\nu}}, \\ \Lambda_{\underline{\alpha}}{}^{\underline{\mu}}(x)\Lambda_{\underline{\beta}}{}^{\underline{\nu}}(x)\eta_{\underline{\mu\nu}} &= \eta_{\underline{\alpha\beta}}. \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

Произведем лоренцево преобразование реперов $\left\{H^{\mu}_{\underline{\alpha}}(x)\right\}$ так, чтобы они совпали с $\left\{\tilde{H}^{\mu}_{\underline{\alpha}}(x)\right\}$, т. е. произведем преобразование (50). При преобразовании (50) дираковские матрицы $\gamma^{\alpha}(x)$ и $\gamma^{\underline{\alpha}}$ преобразуются по правилу

$$\tilde{\gamma}^{\alpha}(x) = L(x)\gamma^{\alpha}(x)L^{-1}(x), \tag{52}$$

$$\gamma^{\underline{\alpha}} = \left[L(x)\gamma^{\underline{\beta}}L^{-1}(x)\right]\Lambda_{\underline{\beta}}{}^{\underline{\alpha}}(x). \tag{53}$$

Матрицы $L,\ L^{-1}$, входящие в (52), (53), определяются из условия неизменности дираковских матриц $\gamma^{\underline{\alpha}}$ при преобразованиях (53), т. е. из условия

$$L(x)\gamma^{\underline{\alpha}}L^{-1}(x)=\gamma^{\underline{\beta}}\Lambda_{\underline{\beta}}{}^{\underline{\alpha}}(x). \tag{54}$$

Поскольку мы производим лоренцево преобразование, совмещающее систему $\left\{H^{\mu}_{\underline{\alpha}}(x)\right\}$ с системой $\left\{\tilde{H}^{\mu}_{\underline{\alpha}}(x)\right\}$, то величины $\Lambda_{\underline{\beta}}{}^{\underline{\alpha}}(x)$ в (54) необходимо положить равными соответствующим величинам, входящим в (50). Отметим, что матрицы $L,\ L^{-1}$ в нашем случае удовлетворяют соотношению

$$L(x)\gamma^{0}(x)L^{-1}(x)=\sqrt{-g^{00}}\ \gamma^{\underline{0}}, \tag{55}$$

которое следует из равенств (49) и (52).

Связь между гамильтонианами (22) уравнения Шредингера в произвольном гравитационном поле с системами реперов $\left\{H^{\mu}_{\underline{\alpha}}(x)\right\}$ и $\left\{\tilde{H}^{\mu}_{\underline{\alpha}}(x)\right\}$ в соответствии с (49)−(53) записывается в стандартном виде

$$\tilde{H}=LHL^{-1}+i\frac{\partial L}{\partial t}L^{-1}. \tag{56}$$

Для стационарных гравитационных полей гамильтониан H и матрица L не зависят от времени, и гамильтониан в калибровке Швингера записывается в виде

$$\tilde{H}=LHL^{-1}. \tag{57}$$

Приведем явный вид матрицы $L(x)$, удовлетворяющей соотношению (55).

Известно, что преобразования Лоренца можно однозначным образом представить в виде произведения либо преобразования буста (эрмитов множитель) на пространственное вращение (унитарный множитель), либо наоборот, в виде произведения пространственного вращения (унитарный множитель) на преобразование буста (эрмитов множитель). Факторизация такого типа однозначна. Воспользуемся такой факторизацией, для чего подставим (17) и (48) в выражение (52) для $\tilde{\gamma}^{0}(x)$. В результате оказывается, что матрица $L(x)$ записывается следующим образом:

$$L(x)=R\exp\left\{\frac{\theta}{2}\,\frac{\left(\tilde{H}^{\mu}_{\underline{0}}H^{\nu}_{\underline{0}}S_{\mu\nu}\right)}{\sqrt{\left(\tilde{H}^{\varepsilon}_{\underline{0}}H_{\underline{0}\varepsilon}\right)^{2}-1}}\right\}=$$

$$=R\left\{\operatorname{ch}\frac{\theta}{2}+\frac{\left(\tilde{H}^{\mu}_{\underline{0}}H^{\nu}_{\underline{0}}S_{\mu\nu}\right)}{\sqrt{\left(\tilde{H}^{\varepsilon}_{\underline{0}}H_{\underline{0}\varepsilon}\right)^{2}-1}}\operatorname{sh}\frac{\theta}{2}\right\}. \tag{58}$$

Здесь R − матрица пространственного вращения, коммутирующая с матрицей γ^{0}. Другой множитель в (58) представляет собой преобразование гиперболического поворота (т. е. буст) на угол θ, определяемый из соотношения

$$\operatorname{th}\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{\left(\tilde{H}^{\varepsilon}_{\underline{0}}H_{\underline{0}\varepsilon}\right)+1}{\sqrt{\left(\tilde{H}^{\varepsilon}_{\underline{0}}H_{\underline{0}\varepsilon}\right)-1}}}. \tag{59}$$

Соотношение

$$\gamma^{0}(x)=L^{-1}(x)\tilde{\gamma}^{0}(x)L(x) \tag{60}$$

с учетом (49) записывается как

$$\gamma^{0}(x)=\left\{\operatorname{ch}\frac{\theta}{2}-\frac{\left(\tilde{H}^{\mu}_{\underline{0}}H^{\nu}_{\underline{0}}S_{\mu\nu}\right)}{\sqrt{\left(\tilde{H}^{\varepsilon}_{\underline{0}}H_{\underline{0}\varepsilon}\right)^{2}-1}}\operatorname{sh}\frac{\theta}{2}\right\}\times$$

$$\times\sqrt{-g^{00}}\ \gamma^{\underline{0}}(x)\exp\left\{\frac{\theta}{2}\,\frac{\left(\tilde{H}^{\mu}_{\underline{0}}H^{\nu}_{\underline{0}}S_{\mu\nu}\right)}{\sqrt{\left(\tilde{H}^{\varepsilon}_{\underline{0}}H_{\underline{0}\varepsilon}\right)^{2}-1}}\right\}. \tag{61}$$

Из (61) следует, что $L(x)$ является матрицей, преобразующей $\gamma^{0}(x)$ в $\sqrt{-g^{00}}\ \gamma^{\underline{0}}$

$$L\gamma^{0}L^{-1}=\sqrt{-g^{00}}\ \gamma^{\underline{0}}. \tag{62}$$

4.3. *Смысл оператора* η *при использовании весового оператора Паркера*

Подстановка в (27) выражения (62) с учетом таких свойств матриц L, как

$$L^{-1}=-\gamma_{\underline{0}}L^{+}\gamma_{\underline{0}},\quad L^{+}=-\gamma_{\underline{0}}L^{-1}\gamma_{\underline{0}}, \tag{63}$$

дает:

$$\rho=\sqrt{-g}\ \gamma_{\underline{0}}\gamma^{0}=\sqrt{-g}\ \sqrt{-g^{00}}\ L^{+}L. \tag{64}$$

Унитарная матрица R, входящая в конструкцию матрицы L согласно (58), сокращается в произведении $L^{+}L$ и не влияет на величину ρ.

Мы видим, что оператор ρ можно записать в виде (1), т. е. как

$$\rho=\eta^{+}\eta, \tag{65}$$

причем оператор η пропорционален лоренцевой матрице L, преобразующей согласно (62) $\gamma^{0}(x)$ в $\sqrt{-g^{00}}\gamma^{\underline{0}}$,

$$\eta=\left(-g\right)^{1/4}\left(-g^{00}\right)^{1/4}\ L. \tag{66}$$

В случае использования системы реперов в калибровке Швингера оператор η, определяемый соотношением (66), оказывается равным

$$\tilde{\eta}=\left(-g\right)^{1/4}\left(-g^{00}\right)^{1/4}\ E. \tag{67}$$

4.4. *Единственность гамильтониана* H_{η} *в случае стационарных гравитационных полей*

Согласно (4), (66) гамильтониан в η-представлении можно записать в виде

$$H_{\eta}=\eta H\eta^{-1}=\tilde{\eta}LHL^{-1}\tilde{\eta}^{-1}. \tag{68}$$

Выберем матрицу $L(x)$ такую, чтобы $\gamma^0(x) \to \to \sqrt{-g^{00}}\gamma^{\underline{0}}$ (см. (60)–(62)). Тогда согласно (57) $LHL^{-1} = \tilde{H}$ и выражение (68) становится равным

$$H_\eta = \tilde{\eta}\tilde{H}\tilde{\eta}^{-1} = \tilde{H}_\eta. \tag{69}$$

Для любой системы реперов после указанных операций в η-представлении будет получаться один и тот же самосопряженный гамильтониан (69). Этим доказывается единственность гамильтониана (69). Данный результат подтверждает результаты работы [1], в которой для трех систем реперов после перехода в η-представление получен самосопряженный гамильтониан, совпадающий с гамильтонианом $\tilde{H}_\eta$ для системы реперов в калибровке Швингера.

5. Самосопряженность и единственность дираковских гамильтонианов в гравитационных полях, зависящих от времени

Гравитационные поля, зависящие от времени, нарушают условия псевдоэрмитовости гамильтонианов (2), (35).

Однако переход от исходного представления дираковского гамильтониана H в η-представление позволяет и в общем случае гравитационного поля, зависящего от времени, получить самосопряженный и единственный гамильтониан $H_\eta = H_\eta^+$ с соответствующим плоским скалярным произведением (Φ, Ψ).

Действительно, в общем случае гамильтониан H в уравнении (5) зависит от времени

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = H(t)\psi. \tag{70}$$

В этом случае волновая функция ψ в η-представлении удовлетворяет уравнению

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = H_\eta\Psi = \left(\eta H\eta^{-1} + i\frac{\partial\eta}{\partial t}\left(\eta^{-1}\right)\right)\Psi, \tag{71}$$

где по-прежнему

$$\Psi = \eta\psi. \tag{72}$$

Покажем единственность введенного гамильтониана H_η в уравнении (71). Используя (66), (67), получаем

$$H_\eta = \eta H\eta^{-1} + i\frac{\partial\eta}{\partial t}\eta^{-1} = \\ = \tilde{\eta}\left(LHL^{-1} + i\frac{\partial L}{\partial t}L^{-1}\right)\tilde{\eta}^{-1} + i\frac{\partial\tilde{\eta}}{\partial t}\tilde{\eta}^{-1}. \tag{73}$$

Выберем преобразование $L(x)$ такое, чтобы $\gamma^0(x) \to \to \sqrt{-g^{00}}\gamma^{\underline{0}}$ (см. (60)–(62)). Тогда согласно (56)

$$LHL^{-1} + i\frac{\partial L}{\partial t}L^{-1} = \tilde{H}, \tag{74}$$

$$H_\eta = \tilde{\eta}\tilde{H}\tilde{\eta}^{-1} + i\frac{\partial\tilde{\eta}}{\partial t}\tilde{\eta}^{-1}. \tag{75}$$

Для любой системы реперов после указанных операций будет получаться один и тот же гамильтониан H_η (75), что доказывает его единственность.

Докажем, что гамильтониан H_η в (74) является самосопряженным $\left(H_\eta = H_\eta^+\right)$.

$$H_\eta^+ = \left(\tilde{\eta}\tilde{H}\tilde{\eta}^{-1} + i\frac{\partial\tilde{\eta}}{\partial t}\left(\tilde{\eta}^{-1}\right)\right)^+ = \\ = \left(\tilde{\eta}^{-1}\right)^+\tilde{H}^+\left(\tilde{\eta}\right)^+ - \left(\tilde{\eta}^{-1}\right)^+ i\frac{\partial\tilde{\eta}^+}{\partial t}. \tag{76}$$

Для системы реперных векторов в калибровке Швингера соотношение (35) становится равным

$$\begin{gathered}\tilde{H}^+ = \tilde{\rho}\tilde{H}\tilde{\rho}^{-1} + \tilde{\Delta}; \\ \tilde{\rho} = (-g)^{1/2}\left(-g^{00}\right)^{1/2};\ \tilde{\eta} = (-g)^{1/4}\left(-g^{00}\right)^{1/4}; \\ \tilde{\gamma}^0 = \sqrt{-g^{00}}\gamma^{\underline{0}}; \\ \tilde{\Delta} = i\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\left(-g^{00}\right)}\frac{\partial\left(-g^{00}\right)}{\partial t} + \frac{1}{(-g)}\frac{\partial(-g)}{\partial t}\right) = 2i\frac{\partial\tilde{\eta}}{\partial t}\tilde{\eta}^{-1}.\end{gathered} \tag{77}$$

Тогда выражение (76) равно

$$H_\eta^+ = \tilde{\eta}\tilde{H}\tilde{\eta}^{-1} + i\frac{\partial\tilde{\eta}}{\partial t}\tilde{\eta}^{-1} = H_\eta. \tag{78}$$

Скалярное произведение в η-представлении по-прежнему является плоским и равным исходному, $\langle\varphi,\psi\rangle_\rho = = (\Phi, \Psi)$.

6. Алгоритм нахождения гамильтониана в η-представлении

По результатам данной работы могут быть сформулированы правила нахождения гамильтониана в η-представлении для дираковской частицы в произвольном гравитационном поле. Априорной информацией, которую будем предполагать известной, является информация о метрическом тензоре $g_{\alpha\beta}(x)$, символах Кристоффеля $\begin{pmatrix}\lambda \\ \alpha\beta\end{pmatrix}$, локальном метрическом тензоре $\eta_{\underline{\alpha\beta}}$ и локальных дираковских матрицах $\left\{\gamma_{\underline{\alpha}}\right\}$. Указанные правила состоят в следующем:

1) для гравитационного поля, описываемого метрикой $g_{\alpha\beta}(x)$, находится система реперов $\left\{\tilde{H}^\alpha_{\underline{\mu}}(x)\right\}$, удовлетворяющая калибровке Швингера. Напомним, что в этой калибровке компоненты реперов $\tilde{H}^0_{\underline{0}}, \tilde{H}^k_{\underline{0}}$

связаны с компонентами тензора $g^{\alpha\beta}(x)$ следующими соотношениями:

$$\tilde{H}^0_{\underline{0}} = \sqrt{-g^{00}}; \quad \tilde{H}^k_{\underline{0}} = -\frac{g^{0k}}{\sqrt{-g^{00}}}. \tag{79}$$

Компоненты $\tilde{H}^0_{\underline{k}}$ тождественно равны нулю:

$$\tilde{H}^0_{\underline{k}} = 0. \tag{80}$$

Для нахождения $\tilde{H}^n_{\underline{m}}$ вводится тензор f^{mn} с компонентами

$$f^{mn} = g^{mn} - \frac{g^{0m} g^{0n}}{g^{00}}. \tag{81}$$

Тензор f^{mn} удовлетворяет условиям

$$f^{mn} g_{nk} = \delta^m_k. \tag{82}$$

На роль величин $\tilde{H}^n_{\underline{m}}$ подойдут любые три 3-мерных вектора, удовлетворяющие соотношениям

$$\tilde{H}^m_{\underline{k}} \tilde{H}^n_{\underline{k}} = f^{mn}; \tag{83}$$

2) записывается общее выражение для гамильтониана $\tilde{H}$.

$$\tilde{H} = -\frac{im}{\left(-g^{00}\right)} \tilde{\gamma}^0 + \frac{i}{\left(-g^{00}\right)} \tilde{\gamma}^0 \tilde{\gamma}^k \frac{\partial}{\partial x^k} - i\tilde{\Phi}_0 + \frac{i}{\left(-g^{00}\right)} \tilde{\gamma}^0 \tilde{\gamma}^k \tilde{\Phi}_k. \tag{84}$$

Здесь:

$$\tilde{\gamma}^\alpha = \tilde{H}^\alpha_{\underline{\beta}} \gamma^{\underline{\beta}}, \tag{85}$$

$$\tilde{\Phi}_\alpha = -\frac{1}{4} \tilde{H}^{\underline{\varepsilon}}_\mu \tilde{H}_{\nu\underline{\varepsilon};\alpha} \tilde{S}^{\mu\nu}; \tag{86}$$

3) согласно (75)

$$H_\eta = \tilde{\eta} \tilde{H} \tilde{\eta}^{-1} + i\tilde{\eta} \frac{\partial \tilde{\eta}^{-1}}{\partial t}, \tag{87}$$

где оператор $\tilde{\eta}$ определяется соотношением

$$\tilde{\eta} = \left(-g\right)^{1/4} \left(-g^{00}\right)^{1/4}. \tag{88}$$

Выражения (87), (88) определяют оператор H_η, который является искомым эрмитовым гамильтонианом в η-представлении.

Таким образом,

$$H_\eta = -\frac{im}{\left(-g^{00}\right)} \tilde{\gamma}^0 + \frac{i}{\left(-g^{00}\right)} \tilde{\gamma}^0 \tilde{\gamma}^k \frac{\partial}{\partial x^k} - i\tilde{\Phi}_0 + \frac{i}{\left(-g^{00}\right)} \tilde{\gamma}^0 \tilde{\gamma}^k \tilde{\Phi}_k - \frac{i}{4\left(-g^{00}\right)} \tilde{\gamma}^0 \tilde{\gamma}^k \times \left\{ \frac{\partial \ln\left(-g\right)}{\partial x^k} + \frac{\partial \ln\left(-g^{00}\right)}{\partial x^k} \right\} + \frac{i}{4} \left\{ \frac{\partial \ln\left(-g\right)}{\partial t} + \frac{\partial \ln\left(-g^{00}\right)}{\partial t} \right\}. \tag{89}$$

Приведенные выше правила применяются далее для нахождения гамильтонианов в η-представлении для нескольких стационарных и нестационарных метрик.

7. Операторы Гамильтона в η-представлении для ряда метрик

7.1. Метрика, использованная в работах [3, 4]

Рассмотрим вопрос о построении гамильтониана H_η стационарной метрики следующего вида:

$$ds^2 = -V^2 dt^2 + W^2 \left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right), \tag{90}$$

где V, W − функции пространственных координат. Будем использовать систему реперных векторов в калибровке Швингера:

$$\tilde{H}^0_{\underline{0}} = \frac{1}{V}, \ \tilde{H}^0_{\underline{k}} = 0, \ \tilde{H}^k_{\underline{0}} = 0, \ \tilde{H}^k_{\underline{m}} = \frac{1}{W} \delta^k_{\underline{m}}. \tag{91}$$

Эволюция волновой функции ψ определяется согласно уравнению Шредингера

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi, \tag{92}$$

где $\hat{H}$ − оператор Гамильтона (исходный гамильтониан). Явное выражение для исходного гамильтониана $\hat{H}$, согласно [3], имеет вид:

$$\tilde{H} = imV\gamma_{\underline{0}} - i\frac{V}{W} \gamma_{\underline{0}} \gamma^{\underline{k}} \frac{\partial}{\partial x^k} - \frac{i}{2} \frac{V_{,k}}{W} \gamma_{\underline{0}} \gamma^{\underline{k}} - i\frac{VW_{,k}}{W^2} \gamma_{\underline{0}} \gamma^{\underline{k}}. \tag{93}$$

В рассматриваемом случае

$$\sqrt{-g} = VW^3; \quad \sqrt{-g^{00}} = \frac{1}{V}, \tag{94}$$

поэтому

$$\tilde{\eta} = \left(-g\right)^{1/4} \left(-g^{00}\right)^{1/4} = W^{3/2}. \tag{95}$$

В η-представлении самосопряженный гамильтониан H_η равен

$$H_\eta = \tilde{\eta} \tilde{H} \tilde{\eta}^{-1} = imV\gamma_{\underline{0}} - \frac{i}{2}\left(\gamma_{\underline{0}} \gamma^{\underline{k}} \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{V}{W} + \frac{V}{W} \gamma_{\underline{0}} \gamma^{\underline{k}} \frac{\partial}{\partial x^k} \right). \tag{96}$$

Выражение (96) получено без предположений о слабости гравитационного поля и совпадает с самосопряженным гамильтонианом в работе [3].

7.2. Метрика Шварцшильда в изотропных координатах

Метрика Шварцшильда получается из метрики (90) при записи решения Шварцшильда в изотропных координатах. Опуская процедуру соответствующего координатного преобразования, приведем результат: для перехода к изотропным координатам функции V, W необходимо выбрать согласно формулам (см., например, [3, 12]):

$$V=\frac{\left(1-\dfrac{M}{2R}\right)}{\left(1+\dfrac{M}{2R}\right)};\quad W=\left(1+\frac{M}{2R}\right)^2. \tag{97}$$

Из (96), (97) следует вид гамильтониана в η-представлении:

$$H_\eta=im\frac{\left(1-\dfrac{M}{2R}\right)}{\left(1+\dfrac{M}{2R}\right)}\gamma_{\underline{0}}-i\frac{\left(1-\dfrac{M}{2R}\right)}{\left(1+\dfrac{M}{2R}\right)^3}\gamma_{\underline{0}}\gamma^{\underline{k}}\frac{\partial}{\partial x^k}-$$

$$-i\frac{\left(1-\dfrac{M}{4R}\right)}{\left(1+\dfrac{M}{2R}\right)^4}\frac{MR_k}{R^3}\gamma_{\underline{0}}\gamma^{\underline{k}}. \tag{98}$$

В случае слабых полей выражение (98) в низшем порядке приближения становится равным

$$H_\eta=im\gamma_{\underline{0}}\left(1-\frac{M}{R}\right)-i\left(1-2\frac{M}{R}\right)\gamma_{\underline{0}}\gamma^{\underline{k}}\frac{\partial}{\partial x^k}-$$

$$-i\frac{MR_k}{R^3}\gamma_{\underline{0}}\gamma^{\underline{k}}. \tag{99}$$

Это выражение совпадает с тем, что приведено в [1] (формула (58)). При необходимости точное выражение (98) для гамильтониана может быть разложено по степеням малого параметра до любого порядка малости.

7.3. Метрика Шварцшильда в координатах (t, r, θ, φ)

В этом разделе будем записывать метрику Шварцшильда в координатах

$$\left(x^0,x^1,x^2,x^3\right)\equiv\left(t,r,\theta,\varphi\right). \tag{100}$$

В этих координатах имеем:

$$ds^2=-\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2+\frac{dr^2}{\left(1-\dfrac{2M}{r}\right)}+$$

$$+r^2\left(d\theta^2+\sin^2\theta\, d\varphi^2\right). \tag{101}$$

Для метрики, определяемой квадратом интервала (101), получаем:

$$g=-r^4\sin^2\theta, \tag{102}$$

$$\left.\begin{aligned}&\tilde\eta=\left(-g\right)^{1/4}\left(-g^{00}\right)^{1/4}=\frac{\left(r^4\sin^2\theta\right)^{1/4}}{\left(1-\dfrac{2M}{r}\right)^{1/4}};\\ &\tilde\eta\frac{\partial\tilde\eta^{-1}}{\partial r}=-\frac{1}{r}+\frac{M}{2r^2}\frac{1}{\left(1-\dfrac{2M}{r}\right)};\ \tilde\eta\frac{\partial\tilde\eta^{-1}}{\partial\theta}=-\frac{1}{2}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}.\end{aligned}\right\} \tag{103}$$

Находим реперные векторы в калибровке Швингера. Отличные от нуля компоненты реперов равны:

$$\left.\begin{aligned}&\tilde H^0_{\underline{0}}=\frac{1}{\sqrt f};\quad \tilde H^k_{\underline{0}}=0;\quad \tilde H^0_{\underline{k}}=0;\quad \tilde H^1_{\underline{1}}=\sqrt f;\quad \tilde H^2_{\underline{2}}=\frac{1}{r}\quad \tilde H^3_{\underline{3}}=\frac{1}{r\cdot\sin\theta};\\ &\tilde H_{\underline{0}0}=-\sqrt f;\quad \tilde H_{\underline{0}k}=0;\quad \tilde H_{\underline{k}0}=0;\quad \tilde H_{\underline{1}1}=\frac{1}{\sqrt f};\quad \tilde H_{\underline{2}2}=r\quad \tilde H_{\underline{3}3}=r\cdot\sin\theta;\\ &\tilde H^{00}=-\frac{1}{\sqrt f};\quad \tilde H^{\underline{0}k}=0;\quad \tilde H^{\underline{k}0}=0;\quad \tilde H^{\underline{1}1}=\sqrt f;\quad \tilde H^{\underline{2}2}=\frac{1}{r}\quad \tilde H^{\underline{3}3}=\frac{1}{r\cdot\sin\theta};\\ &\tilde H^{\underline{0}}_0=\sqrt f;\quad \tilde H^{\underline{0}}_k=0;\quad \tilde H^{\underline{k}}_0=0;\quad \tilde H^{\underline{1}}_1=\frac{1}{\sqrt f};\quad \tilde H^{\underline{2}}_2=r\quad \tilde H^{\underline{3}}_3=r\cdot\sin\theta.\end{aligned}\right\} \tag{104}$$

Здесь $f\equiv1-\dfrac{2M}{r}$. Отличные от нуля символы Кристоффеля равны:

$$\left.\begin{aligned}&\begin{Bmatrix}0\\01\end{Bmatrix}=\frac{r_0}{2r^2\left(1-\dfrac{r_0}{r}\right)};\\ &\begin{Bmatrix}1\\00\end{Bmatrix}=\frac{r_0}{2r^2}\left(1-\frac{r_0}{r}\right);\quad \begin{Bmatrix}1\\11\end{Bmatrix}=-\frac{r_0}{2r^2\left(1-\dfrac{r_0}{r}\right)};\quad \begin{Bmatrix}1\\22\end{Bmatrix}=-r\left(1-\frac{r_0}{r}\right);\\ &\begin{Bmatrix}1\\33\end{Bmatrix}=-r\sin^2\theta\left(1-\frac{r_0}{r}\right);\\ &\begin{Bmatrix}2\\12\end{Bmatrix}=\frac{1}{r};\quad \begin{Bmatrix}2\\33\end{Bmatrix}=-\sin\theta\cos\theta;\quad \begin{Bmatrix}3\\13\end{Bmatrix}=\frac{1}{r};\quad \begin{Bmatrix}3\\23\end{Bmatrix}=-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}.\end{aligned}\right\} \tag{105}$$

По формуле (16) находим величины $\tilde{\Phi}_0, \tilde{\Phi}_k$:

$$\left.\begin{aligned}
\tilde{\Phi}_0 &= \frac{M}{2r^2}\gamma_{\underline{0}}\gamma_{\underline{1}};\\
\tilde{\Phi}_1 &= 0;\\
\tilde{\Phi}_2 &= -\frac{1}{2}\sqrt{f}\gamma_{\underline{1}}\gamma_{\underline{2}};\\
\tilde{\Phi}_3 &= -\frac{1}{2}\cos\theta\gamma_{\underline{2}}\gamma_{\underline{3}} + \frac{1}{2}\sqrt{f}\,\sin\theta\gamma_{\underline{3}}\gamma_{\underline{1}}.
\end{aligned}\right\} \qquad (106)$$

Подставляем (104) в выражение (84) для $\tilde{H}$:

$$\tilde{H} = im\sqrt{f}\gamma_{\underline{0}} - i\sqrt{f}\gamma_{\underline{0}} \times$$
$$\times\left\{\gamma_{\underline{1}}\sqrt{f}\frac{\partial}{\partial r} + \gamma_{\underline{2}}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \gamma_{\underline{3}}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right\} -$$
$$- i\tilde{\Phi}_0 - i\sqrt{f}\gamma_{\underline{0}}\left\{\gamma_{\underline{1}}\sqrt{f}\tilde{\Phi}_1 + \gamma_{\underline{2}}\frac{1}{r}\tilde{\Phi}_2 + \gamma_{\underline{3}}\frac{1}{r\sin\theta}\tilde{\Phi}_3\right\}. \quad (107)$$

После использования формул (106) получаем:

$$\tilde{H} = im\sqrt{f}\gamma_{\underline{0}} - i\sqrt{f}\gamma_{\underline{0}} \times$$
$$\times\left\{\gamma_{\underline{1}}\sqrt{f}\frac{\partial}{\partial r} + \gamma_{\underline{2}}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \gamma_{\underline{3}}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right\} -$$
$$- i\frac{M}{2r^2}\gamma_{\underline{0}}\gamma_{\underline{1}} - \frac{if}{r}\gamma_{\underline{0}}\gamma_{\underline{1}} - \frac{i\sqrt{f}\cos\theta}{2r\sin\theta}\gamma_{\underline{0}}\gamma_{\underline{2}}. \qquad (108)$$

Подставляем (108) и (103) в формулу (87):

$$H_\eta = im\sqrt{f}\gamma_{\underline{0}} - i\sqrt{f}\gamma_{\underline{0}}\left\{\gamma_{\underline{1}}\sqrt{f}\frac{\partial}{\partial r} + \gamma_{\underline{2}}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} +\right.$$
$$\left.+ \gamma_{\underline{3}}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right\} - \frac{i}{2}\frac{\partial f}{\partial r}\gamma_{\underline{0}}\gamma_{\underline{1}}. \qquad (109)$$

Выражение (109) представляет собой оператор Гамильтона в η-представлении. Как легко убедиться, этот оператор является эрмитовым $\left(H_\eta = H_\eta^+\right)$.

Заметим, что выражения (109) и (98) эквивалентны, просто один и тот же гамильтониан записан в разных системах координат. Каким из этих выражений пользоваться – вопрос удобства в конкретной задаче.

7.4. Модели Фридмана

Рассмотрим уравнение Шредингера в случае, когда пространство является однородным и изотропным и, следовательно, описывается каким-то решением модели Фридмана. Ограничимся двумя простейшими решениями – пространственно-плоской и открытой моделями Фридмана [11].

Пространственно-плоская модель Фридмана

Нестационарная метрика, соответствующая пространственно-плоскому решению Фридмана, определяется соотношением:

$$ds^2 = -dt^2 + b^2(t)\left[dx^2 + dy^2 + dz^2\right]. \qquad (110)$$

Символы Кристоффеля, соответствующие (110), равны:

$$\left.\begin{aligned}
&\begin{pmatrix}0\\00\end{pmatrix} = 0;\quad \begin{pmatrix}0\\0k\end{pmatrix} = 0;\quad \begin{pmatrix}0\\mn\end{pmatrix} = b\dot{b}g_{mn};\\
&\begin{pmatrix}k\\00\end{pmatrix} = 0;\quad \begin{pmatrix}m\\0n\end{pmatrix} = \frac{\dot{b}}{b}\delta_n^m;\quad \begin{pmatrix}k\\mn\end{pmatrix} = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (111)$$

Реперные векторы $\tilde{H}_\alpha^\alpha$ в калибровке Швингера находим, исходя из их определения и используя (110). Получаем:

$$\left.\begin{aligned}
&\tilde{H}_\alpha^{\underline{0}} = (1,0,0,0);\ \tilde{H}_\alpha^{\underline{1}} = (0,b,0,0);\ \tilde{H}_\alpha^{\underline{2}} = (0,0,b,0);\ \tilde{H}_\alpha^{\underline{3}} = (0,0,0,b);\\
&\tilde{H}_{\underline{0}\alpha} = (-1,0,0,0);\ \tilde{H}_{\underline{1}\alpha} = (0,b,0,0);\ \tilde{H}_{\underline{2}\alpha} = (0,0,b,0);\ \tilde{H}_{\underline{3}\alpha} = (0,0,0,b);\\
&\tilde{H}^{\underline{0}\alpha} = (-1,0,0,0);\ \tilde{H}^{\underline{1}\alpha} = \left(0,\frac{1}{b},0,0\right);\ \tilde{H}^{\underline{2}\alpha} = \left(0,0,\frac{1}{b},0\right);\ \tilde{H}^{\underline{3}\alpha} = \left(0,0,0,\frac{1}{b}\right);\\
&\tilde{H}_{\underline{0}}^\alpha = (1,0,0,0);\ \tilde{H}_{\underline{1}}^\alpha = \left(0,\frac{1}{b},0,0\right);\ \tilde{H}_{\underline{2}}^\alpha = \left(0,0,\frac{1}{b},0\right);\ \tilde{H}_{\underline{3}}^\alpha = \left(0,0,0,\frac{1}{b}\right).
\end{aligned}\right\} \qquad (112)$$

Вычисление компонент Φ_α с использованием (110)–(112) приводит к следующему:

$$\left.\begin{aligned}&\tilde\Phi_0 = 0;\\ &\tilde\Phi_k = \frac{1}{2}\frac{\dot b}{b}S_{0k}.\end{aligned}\right\} \qquad (113)$$

Подставляем выражения (113) для компонент $\tilde\Phi_\alpha$ в гамильтониан и получаем:

$$\tilde H = im\tilde\gamma_0 - i\tilde\gamma_0\tilde\gamma^k\frac{\partial}{\partial x^k} - \frac{3i}{2}\frac{\dot b}{b}. \qquad (114)$$

Поскольку в данном случае

$$\tilde\gamma_0 = \gamma_{\underline{0}};\quad \tilde\gamma^k = \frac{1}{b}\gamma^{\underline{k}} = \frac{1}{b}\gamma_{\underline{k}}, \qquad (115)$$

то гамильтониан (114) может быть записан в виде

$$\tilde H = im\gamma_{\underline{0}} - \frac{i}{b}\gamma_{\underline{0}}\gamma_{\underline{k}}\frac{\partial}{\partial x^k} - \frac{3i}{2}\frac{\dot b}{b}. \qquad (116)$$

Далее получим гамильтониан рассматриваемой системы в η-представлении. Весовой оператор Паркера и оператор $\tilde\eta$ равны:

$$\tilde\rho = \sqrt{-g}\gamma_{\underline{0}}\tilde\gamma^0 = b^3;\ \tilde\eta = b^{3/2}. \qquad (117)$$

Тогда

$$\begin{aligned}H_\eta &= \tilde\eta\tilde H\tilde\eta^{-1} + i\frac{\partial\tilde\eta}{\partial t}\left(\tilde\eta^{-1}\right) =\\ &= im\gamma_{\underline{0}} - \frac{i}{b(t)}\gamma_{\underline{0}}\gamma_{\underline{k}}\frac{\partial}{\partial x^k} = H_\eta^+.\end{aligned} \qquad (118)$$

В соответствии с результатами раздела 5 изначально неэрмитов гамильтониан (114) после перехода в η-представление преобразуется в самосопряженный гамильтониан (118) с соответствующим плоским скалярным произведением.

В квазистационарном приближении для космологического момента времени t оператор энергии дираковской частицы в η-представлении равен

$$E = \sqrt{H_\eta^2} = \sqrt{m^2 + \frac{\mathbf{p}^2}{b^2(t)}}. \qquad (119)$$

В выражении (119) $p^k = -i\dfrac{\partial}{\partial x^k}$ – компоненты импульса дираковской частицы.

Открытая модель Фридмана

Рассмотрим случай открытой модели Фридмана в координатах

$$\left(x^0, x^1, x^2, x^3\right) = \left(t, \chi, \theta, \varphi\right).$$

Для этой модели нестационарная метрика имеет вид:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left(d\chi^2 + \mathrm{sh}^2\chi\left[d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right]\right). \qquad (120)$$

Отличные от нуля символы Кристоффеля, соответствующие метрике (120), имеют вид:

$$\left.\begin{aligned}&\begin{pmatrix}0\\00\end{pmatrix} = 0;\ \begin{pmatrix}0\\0k\end{pmatrix} = 0;\ \begin{pmatrix}0\\mn\end{pmatrix} = a\dot a g_{mn};\\ &\begin{pmatrix}k\\00\end{pmatrix} = 0;\ \begin{pmatrix}m\\0n\end{pmatrix} = \frac{\dot a}{a}\delta_n^m;\ \begin{pmatrix}1\\22\end{pmatrix} = -\mathrm{sh}\chi\mathrm{ch}\chi;\\ &\begin{pmatrix}1\\33\end{pmatrix} = -\mathrm{sh}\chi\mathrm{ch}\chi\sin^2\theta;\ \begin{pmatrix}2\\12\end{pmatrix} = \frac{\mathrm{ch}\chi}{\mathrm{sh}\chi};\ \begin{pmatrix}3\\13\end{pmatrix} = \frac{\mathrm{ch}\chi}{\mathrm{sh}\chi};\\ &\begin{pmatrix}2\\33\end{pmatrix} = -\sin\theta\cos\theta;\ \begin{pmatrix}3\\23\end{pmatrix} = \mathrm{ctg}\theta.\end{aligned}\right\} \qquad (121)$$

Отличные от нуля компоненты реперных векторов $\tilde H_\alpha^{\underline{\alpha}}$ в калибровке Швингера равны:

$$\left.\begin{aligned}&\left\{\tilde H_{\underline{0}}^0 = 1;\ \tilde H_{\underline{1}}^1 = \frac{1}{a};\ \tilde H_{\underline{2}}^2 = \frac{1}{a\mathrm{sh}\chi};\ \tilde H_{\underline{3}}^3 = \frac{1}{a\mathrm{sh}\chi\sin\theta};\right.\\ &\left\{\tilde H_{\underline{0}0} = -1;\ \tilde H_{\underline{1}1} = a;\ \tilde H_{\underline{2}2} = a\mathrm{sh}\chi;\ \tilde H_{\underline{3}3} = a\mathrm{sh}\chi\sin\theta;\right.\\ &\left\{\tilde H_\alpha^{\underline{0}} = 1;\ \tilde H_1^{\underline{1}} = a;\ \tilde H_2^{\underline{2}} = a\mathrm{sh}\chi;\ \tilde H_3^{\underline{3}} = a\mathrm{sh}\chi\sin\theta;\right.\\ &\left\{\tilde H^{\underline{0}0} = -1;\ \tilde H^{\underline{1}1} = \frac{1}{a};\ \tilde H^{\underline{2}2} = \frac{1}{a\mathrm{sh}\chi};\ \tilde H^{\underline{3}3} = \frac{1}{a\mathrm{sh}\chi\sin\theta}.\right.\end{aligned}\right\} \qquad (122)$$

Оператор $\tilde\eta$ равен

$$\tilde\eta = (-g)^{1/4}\left(-g^{00}\right)^{1/4} = \left(a^6\mathrm{sh}^4\chi\sin^2\theta\right)^{1/4}. \qquad (123)$$

Величины $\tilde\eta\dfrac{\partial\tilde\eta^{-1}}{\partial x^k}$, необходимые для нахождения гамильтониана в η-представлении:

$$\tilde\eta\frac{\partial\tilde\eta^{-1}}{\partial\chi} = -\mathrm{cth}\chi;\ \tilde\eta\frac{\partial\tilde\eta^{-1}}{\partial\theta} = -\frac{1}{2}\mathrm{ctg}\theta;\ \tilde\eta\frac{\partial\tilde\eta^{-1}}{\partial\varphi} = 0. \qquad (124)$$

Вычисление компонент $\tilde\Phi_\alpha$ с использованием (121) и (122) показывает, что

$$\left.\begin{aligned}&\tilde\Phi_0 = 0,\\ &\tilde\Phi_1 = \frac{\dot a}{2}\gamma_{\underline{0}}\gamma_{\underline{1}},\\ &\tilde\Phi_2 = \frac{\dot a}{2}\mathrm{sh}\chi\gamma_{\underline{0}}\gamma_{\underline{2}} - \frac{1}{2}\mathrm{ch}\chi S^{\underline{12}},\\ &\tilde\Phi_3 = \frac{\dot a}{2}\mathrm{sh}\chi\sin\theta\gamma_{\underline{0}}\gamma_{\underline{3}} + \frac{1}{2}\mathrm{ch}\chi\sin\theta S^{\underline{31}} - \frac{1}{2}\cos\theta S^{\underline{23}}.\end{aligned}\right\} \qquad (125)$$

Вычисление гамильтониана $\tilde H$ приводит к следующему:

$$\begin{aligned}\tilde H = im\gamma_{\underline{0}} - i\gamma_{\underline{0}}\gamma_{\underline{1}}\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial\chi} - i\gamma_{\underline{0}}\gamma_{\underline{2}}\frac{1}{a\mathrm{sh}\chi}\frac{\partial}{\partial\theta} -\\ - i\gamma_{\underline{0}}\gamma_{\underline{3}}\frac{1}{a\mathrm{sh}\chi\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} -\\ -\frac{i}{a}\mathrm{cth}\chi\gamma_{\underline{0}}\gamma_{\underline{1}} - \frac{i}{2a}\frac{\mathrm{ctg}\theta}{\mathrm{sh}\chi}\gamma_{\underline{0}}\gamma_{\underline{2}} - i\frac{3}{2}\frac{\dot a}{a}.\end{aligned} \qquad (126)$$

Вычисляем оператор H_η, используя (89), (123) и (124). Получаем:

$$H_\eta = im\gamma_{\underline{0}} - i\gamma_{\underline{0}}\gamma_{\underline{1}}\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial\chi} - i\gamma_{\underline{0}}\gamma_{\underline{2}}\frac{1}{a\,\mathrm{sh}\chi}\frac{\partial}{\partial\theta} - i\gamma_{\underline{0}}\gamma_{\underline{3}}\frac{1}{a\,\mathrm{sh}\chi\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}. \qquad (127)$$

Величина H_η, определяемая соотношением (127), является гамильтонианом в η-представлении для дираковских частиц в открытой модели Фридмана. Первоначально неэрмитов гамильтониан (126) после перехода в η-представление преобразуется в самосопряженный гамильтониан (127) с соответствующим плоским скалярным произведением.

В квазистационарном приближении для космологического момента времени t оператор энергии для частицы, движущейся по χ-направлению, равен:

$$E = \sqrt{H_\eta^2} = \sqrt{m^2 + \frac{\mathbf{p}_\chi^2}{a^2(t)}}. \qquad (128)$$

Здесь $\mathbf{p}_\chi = -i\dfrac{\partial}{\partial\chi}$.

Обозначим

$$a(t)\mathrm{sh}\chi = \frac{a(t)}{a_0}a_0\mathrm{sh}\chi = b(t)a_0\mathrm{sh}\chi = b(t)r, \qquad (129)$$

где $b(t_0) = 1$; нулевые индексы соответствуют настоящему времени $(t \le t_0)$.

Если радиус пространственной кривизны Вселенной в настоящее время стремится к бесконечности $(a_0 \to \infty)$, то

$$r \approx a_0\chi. \qquad (130)$$

В этом случае гамильтониан (127) становится равным

$$H_\eta = im\gamma_{\underline{0}} - i\gamma_{\underline{0}}\gamma_{\underline{1}}\frac{1}{b(t)}\frac{\partial}{\partial r} - i\gamma_{\underline{0}}\gamma_{\underline{2}}\frac{1}{b(t)r}\frac{\partial}{\partial\theta} - i\gamma_{\underline{0}}\gamma_{\underline{3}}\frac{1}{b(t)r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} = im\gamma_{\underline{0}} - i\gamma_{\underline{0}}\gamma_{\underline{k}}\frac{1}{b(t)}\left(\nabla_k\right)_{sph}. \qquad (131)$$

В выражении (131) через $\left(\nabla_k\right)_{sph}$ обозначены компоненты градиента в сферической системе координат. Очевидно, в декартовой системе координат гамильтониан (131) совпадает с гамильтонианом (118) для пространственно-плоской модели Фридмана.

Физические следствия, вытекающие из гамильтонианов (118), (131) для дираковских частиц в расширяющейся Вселенной, будут представлены в последующей работе авторов. Основные результаты состоят в следующем:

1) гамильтонианы (118), (131) при включении взаимодействия с электромагнитным полем не приводят к дополнительному космологическому смещению атомных спектральных линий, что согласуется с современной космологической моделью ΛCDM («concordance model»);

2) расширение Вселенной приводит к космологическому изменению сил взаимодействия элементарных частиц.

Заключение

Результаты данной работы позволяют сделать вывод о том, что решена проблема единственности и самосопряженности дираковских гамильтонианов в произвольных гравитационных полях, как стационарных, так и зависящих от времени.

Уникальные свойства весового оператора Паркера $\rho = \sqrt{-g}\gamma_{\underline{0}}\gamma^0 = \eta^+\eta$ позволяют в η-представлении получать единственным образом самосопряженные гамильтонианы дираковских частиц в произвольных гравитационных полях.

Этот вывод справедлив как в случае выполнения условия псевдоэрмитовости (2), когда начальный гамильтониан эрмитов относительно скалярного произведения Паркера (стационарные гравитационные поля), так и в случае нарушения условия (2), когда начальный гамильтониан неэрмитов относительно скалярного произведения Паркера (нестационарные гравитационные поля). В последнем случае для получения самосопряженных гамильтонианов дираковских частиц необходимо предварительно перейти в систему реперов в калибровке Швингера.

Скалярные произведения в η-представлении – плоские, что позволяет применять обычный аппарат эрмитовой квантовой механики. Естественно, наблюдаемые физические величины в исходном представлении должны быть преобразованы при переходе в η-представление соответствующим образом $\left(O \to \eta O \eta^{-1}\right)$.

По результатам рассмотрения в разделе 6 сформулированы правила (общий алгоритм) нахождения гамильтонианов в η-представлении, пригодные для любых гравитационных полей. Общий подход продемонстрирован при получении выражений для дираковского гамильтониана для стационарной метрики, рассматривавшейся в работах [3] стационарного решения Шварцшильда в изотропных координатах и в координатах (t, r, θ, φ), а также для нестационарных пространственно-плоской и открытой моделей Фридмана.

Список литературы

1. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. // Phys. Rev. 2010. Vol. D82. P. 104056; arXiv:1007.4631v1[gr-qc].

2. Hehl F. W., Ni W. T. // Phys. Rev. 1990. Vol. D42. P. 2045.

3. Obukhov Yu. N. // Phys. Rev. Lett. 2001. Vol. 86. P. 192; Forschr. Phys. 2002. Vol. 50. P. 711; arXiv: gr-qc/0012102.

4. Obukhov Yu. N., Silenko A. J., Teryaev O. V. // Phys. Rev. 2009. Vol. D80. P. 064044, arXiv:0907.4367v1[gr-qc].

5. Parker L. // Phys. Rev. 1980. Vol. D22. P. 1922.

6. Huang Xing, Parker L. // Phys. Rev. 2009. Vol. D79. P. 024020; arXiv: 0811.2296v1[hep-th].

7. Bender C. M, Brody D., Jones H. F. // Phys. Rev. Lett. 2002. Vol. 89. P. 2704041; Phys. Rev. 2004. Vol. D70. P. 025001.

8. Mostafazadeh A. // J. Math Phys. (N. Y.) 2002. Vol. 43. P. 205; 2002. Vol. 43. P. 2814; 2002. Vol. 43. P. 3944; arXiv:0810.5643v3[quant-ph].

9. Bagchi B., Fring A. // Phys. Lett. 2009. Vol. A 373. P. 4307, arXiv: hep-th/0907.5354v1.

10. Schwinger J. // Phys. Rev. 1963. Vol. 130. P. 800–805.

11. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М.: Наука, 1988 [L. D. Landau and E. M. Lifshitz. The Classical Theory of Fields. Pergamon Press, Oxford, 1975].

12. Lihgtman A., Press W., Price R., Teukolsky S. Problem Book in Relativity and Gravitation (Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1975).

Статья поступила в редакцию 09.02.2011