УДК 530.145; 514.764; 530.145.7

АТОМЫ И СИЛЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ В РАСШИРЯЮЩЕЙСЯ ВСЕЛЕННОЙ

М. В. Горбатенко, В. П. Незнамов*

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл., пр. Мира, 37

Установленный ранее авторами алгоритм построения самосопряженного гамильтониана в η-представлении для дираковских частиц, взаимодействующих с гравитационным полем общего вида, обобщается на случай электромагнитных полей. Полученный гамильтониан применяется, когда гравитационное поле описывает пространственно-плоскую модель Фридмана, а электромагнитное поле является обобщением кулоновского потенциала на случай этой модели.

Анализ атомных систем и электромагнитных сил взаимодействия в условиях пространственно-плоского расширения Вселенной показал, что система атомных уровней не меняется с космологическим временем. Наоборот, силы взаимодействия элементарных частиц изменяются с расширением Вселенной. Спектральные линии атомов в пространственно-плоской расширяющейся Вселенной идентичны в разные моменты космологического времени. Полученные результаты подтверждают представления стандартной космологической модели о механизме красного смещения атомных спектров.

Ключевые слова: Самосопряженный гамильтониан, пространственно-плоская модель Фридмана, расширяющаяся Вселенная, красное смещение, силы взаимодействия элементарных частиц.

Введение

В работе [1] был сформулирован алгоритм построения самосопряженного гамильтониана в η-представлении для дираковских частиц, взаимодействующих с гравитационным полем общего вида. Следуя этому алгоритму, в той же работе был получен самосопряженный гамильтониан для частиц со спином ½, находящихся в расширяющейся Вселенной, описываемой решениями Фридмана. В данной работе с помощью полученного гамильтониана исследуется вопрос о влиянии гравитационного поля на состояния дираковских частиц в составе связанных систем таких, как, например, водородоподобный атом. Рассмотрение проводится применительно к пространственно-плоской модели Фридмана, которая, как известно (см., например, [2]), достаточно хорошо описывает эволюцию Вселенной на ранних стадиях и в современную эпоху.

Для данной модели с метрикой

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + b^2(t)\left[dx^2 + dy^2 + dz^2 \right] \qquad (1)$$

гамильтониан в η-представлении для дираковской частицы с массой m в обозначениях [1] имеет вид

$$H_\eta = im\gamma_{\underline{0}} - \frac{i}{b(t)}\gamma_{\underline{0}}\gamma_{\underline{k}}\frac{\partial}{\partial x^k}. \qquad (2)$$

В квазистационарном приближении для космологического момента времени t оператор энергии можно записать в виде

$$E = \sqrt{H_\eta^2} = \sqrt{m^2 + \frac{\mathbf{p}^2}{b^2(t)}}. \qquad (3)$$

В выражениях (2), (3) и ниже используется система единиц $\hbar = c = 1$; $p^k = -i\dfrac{\partial}{\partial x^k}$ – компоненты импульса дираковской частицы.

Из выражений (2), (3) видно, что физическим импульсом дираковских частиц является величина

$$\mathbf{p}_{phys} = \frac{\mathbf{p}}{b(t)}. \qquad (4)$$

В расширяющейся Вселенной величина $b(t)$ растет со временем, и в сопутствующей космологической системе отсчета физические импульсы $\mathbf{p}_{phys}(t)$ уменьшаются со временем. Дираковские частицы с полуцелым спином постепенно «вмораживаются». Ситуация полностью аналогична рассмотрению в работе [2] поведения массивных безспиновых частиц в расширяющейся Вселенной. Первоначально релятивистские дираковские частицы с массой m при больших космологических временах становятся нерелятивистскими.

Представляет интерес рассмотреть связанные атомные состояния дираковской частицы в пространственно-плоской модели Фридмана.

*E-mail: neznamov@vniief.ru

В разделе 1 мы устанавливаем вид гамильтониана (2) в случае взаимодействия с электромагнитным полем. В разделе 2 получаем решения уравнений Максвелла в пространственно-плоской модели Фридмана. В разделе 3 анализируются атомные системы и электромагнитные силы взаимодействия в условиях пространственно-плоского расширения Вселенной.

В результате нам удается строго обосновать тот факт, что система атомных уровней не меняется с космологическим временем. И, наоборот, силы взаимодействия элементарных частиц изменяются по мере расширения Вселенной.

В Заключении проводится общее обсуждение результатов работы.

1. Гамильтониан дираковской частицы, взаимодействующей с гравитационным и электромагнитным полями

Результирующий самосопряженный гамильтониан H_η в η-представлении для дираковской частицы в гравитационном поле, согласно [1], имеет следующий вид:

$$H_\eta = -\frac{im}{\left(-g^{00}\right)}\tilde{\gamma}^0 + \frac{i}{\left(-g^{00}\right)}\tilde{\gamma}^0\tilde{\gamma}^k\frac{\partial}{\partial x^k} - i\tilde{\Phi}_0 + \\ + \frac{i}{\left(-g^{00}\right)}\tilde{\gamma}^0\tilde{\gamma}^k\tilde{\Phi}_k - \frac{i}{4\left(-g^{00}\right)}\tilde{\gamma}^0\tilde{\gamma}^k \times \\ \times\left\{\frac{\partial\ln(-g)}{\partial x^k} + \frac{\partial\ln\left(-g^{00}\right)}{\partial x^k}\right\} + \\ + \frac{i}{4}\left\{\frac{\partial\ln(-g)}{\partial t} + \frac{\partial\ln\left(-g^{00}\right)}{\partial t}\right\}. \quad (5)$$

Тильды над величинами означают, что величины относятся к системе реперов в калибровке Швингера.

В случае взаимодействия с гравитационным полем ковариантная производная $\nabla_\alpha\psi$ вычисляется по формуле

$$\nabla_\alpha\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x^\alpha} + \Phi_\alpha\psi. \quad (6)$$

Как известно, при «включении» электромагнитного поля величина $\nabla_\alpha\psi$ принимает следующий вид*:

$$\nabla_\alpha\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x^\alpha} + \Phi_\alpha\psi + ieA_\alpha\psi. \quad (7)$$

Здесь A_α − вектор-потенциал электромагнитного поля. Сравнение (6) и (7) прямо указывает на те действия, которые необходимо произвести для учета электромагнитного взаимодействия. А именно: необходимо в формулах работы [1] произвести замену

$$\Phi_\alpha \to \Phi_\alpha + ieA_\alpha. \quad (8)$$

Действуя таким способом, мы вместо сформулированного в [1] алгоритма построения обобщенного гамильтониана H_η в η-представлении приходим к следующему модифицированному алгоритму:

1) для гравитационного поля, описываемого метрикой $g_{\alpha\beta}(x)$, находится система реперов $\left\{\tilde{H}^\alpha_{\underline{\mu}}(x)\right\}$, удовлетворяющая калибровке Швингера. Напомним, что в этой калибровке компоненты реперов $\tilde{H}^0_{\underline{0}}$, $\tilde{H}^k_{\underline{0}}$ связаны с компонентами тензора $g^{\alpha\beta}(x)$ следующими соотношениями:

$$\tilde{H}^0_{\underline{0}} = \sqrt{-g^{00}}; \quad \tilde{H}^k_{\underline{0}} = -\frac{g^{0k}}{\sqrt{-g^{00}}}. \quad (9)$$

Компоненты $\tilde{H}^0_{\underline{k}}$ тождественно равны нулю,

$$\tilde{H}^0_{\underline{k}} = 0. \quad (10)$$

Для нахождения $\tilde{H}^n_{\underline{m}}$ вводится тензор f^{mn} с компонентами

$$f^{mn} = g^{mn} - \frac{g^{0m}g^{0n}}{g^{00}}. \quad (11)$$

Тензор f^{mn} удовлетворяет условиям

$$f^{mn}g_{nk} = \delta^m_k. \quad (12)$$

На роль величин $\tilde{H}^n_{\underline{m}}$ подойдет любая тройка 3-мерных векторов, удовлетворяющая соотношениям

$$\tilde{H}^m_{\underline{k}}\tilde{H}^n_{\underline{k}} = f^{mn}; \quad (13)$$

2) записывается общее выражение для гамильтониана $\tilde{H}$:

$$\tilde{H} = -\frac{im}{\left(-g^{00}\right)}\tilde{\gamma}^0 + \frac{i}{\left(-g^{00}\right)}\tilde{\gamma}^0\tilde{\gamma}^k\frac{\partial}{\partial x^k} - \\ - i\left(\tilde{\Phi}_0 + ieA_0\right) + \frac{i}{\left(-g^{00}\right)}\tilde{\gamma}^0\tilde{\gamma}^k\left(\tilde{\Phi}_k + ieA_k\right). \quad (14)$$

Здесь

$$\tilde{\gamma}^\alpha = \tilde{H}^\alpha_{\underline{\beta}}\gamma^{\underline{\beta}}, \quad (15)$$

$$\tilde{\Phi}_\alpha = -\frac{1}{4}\tilde{H}^{\underline{\varepsilon}}_\mu\tilde{H}_{\nu\underline{\varepsilon};\alpha}\tilde{S}^{\mu\nu}; \quad (16)$$

3) гамильтониан H_η вычисляется по формуле

$$H_\eta = \tilde{\eta}\tilde{H}\tilde{\eta}^{-1} + i\tilde{\eta}\frac{\partial\tilde{\eta}^{-1}}{\partial t}, \quad (17)$$

где оператор $\tilde{\eta}$ определяется соотношением

$$\tilde{\eta} = (-g)^{1/4}\left(-g^{00}\right)^{1/4}. \quad (18)$$

Выражения (17), (18) определяют оператор H_η, который является искомым эрмитовым гамильтонианом в η-представлении.

*Мы не останавливаемся на вопросе о правиле построения «удлиненных» ковариантных производных для учета взаимодействия частиц с полуцелым спином с калибровочными полями. Этот вопрос излагается во многих монографиях (см., например, [3]).

Таким образом,

$$H_\eta = -\frac{im}{\left(-g^{00}\right)}\tilde{\gamma}^0 + \frac{i}{\left(-g^{00}\right)}\tilde{\gamma}^0\tilde{\gamma}^k \frac{\partial}{\partial x^k} -$$
$$- i\left(\tilde{\Phi}_0 + ieA_0\right) + \frac{i}{\left(-g^{00}\right)}\tilde{\gamma}^0\tilde{\gamma}^k\left(\tilde{\Phi}_0 + ieA_k\right) -$$
$$- \frac{i}{4\left(-g^{00}\right)}\tilde{\gamma}^0\tilde{\gamma}^k\left\{\frac{\partial \ln\left(-g\right)}{\partial x^k} + \frac{\partial \ln\left(-g^{00}\right)}{\partial x^k}\right\} +$$
$$+ \frac{i}{4}\left\{\frac{\partial \ln\left(-g\right)}{\partial t} + \frac{\partial \ln\left(-g^{00}\right)}{\partial t}\right\}. \quad (19)$$

Правила модифицированного алгоритма могут быть использованы для нахождения гамильтонианов в η-представлении для любых стационарных и нестационарных метрик и произвольных электромагнитных полей.

Гамильтониан в η-представлении для дираковской частицы, взаимодействующей с электромагнитным полем, в пространственно-плоской модели Фридмана имеет вид:

$$H_\eta = im\gamma_{\underline{0}} - \frac{i}{b(t)}\gamma_{\underline{0}}\gamma_{\underline{k}}\frac{\partial}{\partial x^k} + eA_0 + \frac{1}{b(t)}\gamma_{\underline{0}}\gamma_{\underline{k}}eA_k. \quad (20)$$

Для проведения анализа, как видно из уравнения (20), необходимо знать выражения для вектор-потенциала электромагнитного поля.

При получении гамильтониана (20) и выражений для потенциалов электромагнитного поля далее используются следующие выражения, соответствующие метрике (1):

− символы Кристоффеля:

$$\left.\begin{matrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 00 \end{pmatrix} = 0; \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0k \end{pmatrix} = 0; \quad \begin{pmatrix} 0 \\ mn \end{pmatrix} = b\dot{b}\delta_{mn}; \\ \begin{pmatrix} k \\ 00 \end{pmatrix} = 0; \quad \begin{pmatrix} m \\ 0n \end{pmatrix} = \frac{\dot{b}}{b}\delta^m_n; \quad \begin{pmatrix} k \\ mn \end{pmatrix} = 0; \end{matrix}\right\} \quad (21)$$

− компоненты тензора Римана:

$$\left.\begin{matrix} R^0{}_{m0n} = \delta_{mn}b\ddot{b}; \\ R^p{}_{mqn} = \dot{b}^2\left[\delta^p_q\delta_{mn} - \delta^p_n\delta_{qm}\right]; \end{matrix}\right\}$$
$$R_{0m0n} = -\delta_{mn}b\ddot{b} \quad R_{m0n0} = -\delta_{mn}b\ddot{b}; \quad (22)$$

− компоненты тензора Риччи:

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{b}}{b} \quad R_{mn} = \delta_{mn}\left[b\ddot{b} + 2\dot{b}^2\right];$$
$$R^0_0 = 3\frac{\ddot{b}}{b} \quad R^n_m = \delta^n_m\left[\frac{\ddot{b}}{b} + 2\frac{\dot{b}^2}{b^2}\right]; \; R = 6\frac{\ddot{b}}{b} + 6\frac{\dot{b}^2}{b^2}. \quad (23)$$

2. Решение типа кулоновского потенциала в пространственно-плоской модели Фридмана

2.1. Общие соотношения для уравнений Максвелла

Выпишем общие соотношения для уравнений Максвелла, справедливые для любого пространства.

Определение тензора $F_{\alpha\beta}$:

$$F_{\alpha\beta} = A_{\beta,\alpha} - A_{\alpha,\beta}. \quad (24)$$

Условие калибровки Лоренца:

$$g^{\mu\nu}A_{\mu;\nu} = 0. \quad (25)$$

Это условие может быть записано в виде

$$g^{\mu\nu}A_{\mu,\nu} - g^{\mu\nu}\begin{pmatrix} \varepsilon \\ \mu\nu \end{pmatrix}A_\varepsilon = 0. \quad (26)$$

Уравнения Максвелла в общем виде записываются следующим образом:

$$F_{\alpha\mu;\nu}g^{\mu\nu} = 4\pi j_\alpha. \quad (27)$$

Для непрерывно распределенной заряженной субстанции вектор плотности тока j^α определяется соотношением (см., например, [4])

$$j^\alpha = \frac{\rho}{\sqrt{-g_{00}}}\frac{dx^\alpha}{dx^0}. \quad (28)$$

Для точечных зарядов:

$$j^\alpha = \sum_N \frac{e_N}{\sqrt{-g}}\delta\left(\mathbf{r} - \mathbf{r}_N\right)\frac{dx^\alpha}{dx^0}. \quad (29)$$

Вычислим левую часть соотношения (27)

$$F_{\alpha\mu;\nu}g^{\mu\nu} = \left(A_{\mu;\alpha;\nu} - A_{\alpha;\mu;\nu}\right)g^{\mu\nu} =$$
$$= \left(\left(A_{\mu;\alpha;\nu} - A_{\mu;\nu;\alpha}\right) + A_{\mu;\nu;\alpha} - A_{\alpha;\mu;\nu}\right)g^{\mu\nu} =$$
$$= \left(A_\varepsilon R^\varepsilon{}_{\mu\alpha\nu} + A_{\mu;\nu;\alpha} - A_{\alpha;\mu;\nu}\right)g^{\mu\nu} =$$
$$= A_\varepsilon R^\varepsilon{}_\alpha + A_{\mu;\nu;\alpha}g^{\mu\nu} - A_{\alpha;\mu;\nu}g^{\mu\nu}. \quad (30)$$

С учетом (25) получаем:

$$F_{\alpha\mu;\nu}g^{\mu\nu} = A_\varepsilon R^\varepsilon{}_\alpha - A_{\alpha;\mu;\nu}g^{\mu\nu} =$$
$$= R_{\alpha\mu}A_\nu g^{\mu\nu} - g^{\mu\nu}A_{\alpha,\mu,\nu} + g^{\mu\nu}\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu\alpha \end{pmatrix}_{,\nu}A_\lambda +$$
$$+ g^{\mu\nu}\begin{pmatrix} \varepsilon \\ \mu\alpha \end{pmatrix}A_{\varepsilon,\nu} + g^{\mu\nu}\left[\begin{pmatrix} \varepsilon \\ \nu\alpha \end{pmatrix}A_{\varepsilon,\mu} + \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \nu\mu \end{pmatrix}A_{\alpha,\varepsilon}\right] -$$
$$- g^{\mu\nu}\begin{pmatrix} \varepsilon \\ \nu\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda \\ \varepsilon\mu \end{pmatrix}A_\lambda - g^{\mu\nu}\begin{pmatrix} \varepsilon \\ \nu\mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda \\ \varepsilon\alpha \end{pmatrix}A_\lambda. \quad (31)$$

После перегруппировки членов в правой части (31) уравнение Максвелла (27) можно записать в виде:

$$R_{\alpha\mu}A_\nu g^{\mu\nu} - g^{\mu\nu}A_{\alpha,\mu,\nu} + g^{\mu\nu}\left[2\begin{pmatrix} \varepsilon \\ \nu\alpha \end{pmatrix}A_{\varepsilon,\mu} + \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \nu\mu \end{pmatrix}A_{\alpha,\varepsilon}\right] +$$
$$+ g^{\mu\nu}\left\{\begin{pmatrix} \lambda \\ \alpha\mu \end{pmatrix}_{,\nu} - \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \alpha\mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda \\ \varepsilon\nu \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \nu\mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda \\ \varepsilon\alpha \end{pmatrix}\right\}A_\lambda = 4\pi j_\alpha. \quad (32)$$

Уравнение Максвелла (32) справедливо для любого риманова пространства при условии, что используется лоренцево калибровочное условие.

2.2. Вектор-потенциал для пространственно-плоской модели Фридмана

Уравнение Максвелла (32) с условием калибровки (25) в этом разделе мы решим для точечного электрического заряда, находящегося в пространстве с метрикой (1). Аналогичная задача в пространстве Минковского приводит, как известно, к решению в виде кулоновского поля точечного заряда.

Задачу будем решать методом теории возмущений. Предположим, что параметр малости связан с производной по времени; более точное определение безразмерного параметра малости будет дано позже. Расстановка порядков малости, которой мы будем пользоваться, должна быть подтверждена их согласованностью с решаемыми уравнениями.

На этом этапе мы делаем предположение о том, что для компонент 4-вектор-потенциала справедлива следующая расстановка порядков малости:

$$\left.\begin{aligned} A_0 &= A_0^{(0)} + A_0^{(2)} + \ldots, \\ A_k &= A_k^{(1)} + A_k^{(3)} + \ldots . \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Переходим к решению методами теории возмущений уравнений Максвелла (32). Записываем эти уравнения, полагая $\alpha = 0$.

$$R_{0\mu} A_\nu g^{\mu\nu} - g^{\mu\nu} A_{0,\mu,\nu} + g^{\mu\nu}\left[2\begin{pmatrix}\varepsilon\\ \nu 0\end{pmatrix} A_{\varepsilon,\mu} + \begin{pmatrix}\varepsilon\\ \nu\mu\end{pmatrix} A_{0,\varepsilon}\right] +$$
$$+ g^{\mu\nu}\left\{\begin{pmatrix}\lambda\\ 0\mu\end{pmatrix}_{,\nu} - \begin{pmatrix}\varepsilon\\ 0\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda\\ \varepsilon\nu\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\varepsilon\\ \nu\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda\\ \varepsilon 0\end{pmatrix}\right\} A_\lambda = 4\pi j_0. \tag{34}$$

Далее в уравнении (34) выделяем члены нулевого и второго порядков малости, используя формулы (1), (21)–(23) для метрики, символов Кристоффеля и тензора Риччи

$$3\frac{\ddot{b}}{b} A_0^{(0)} + \ddot{A}_0^{(0)} - \frac{1}{b^2}\Delta A_0^{(0)} - \frac{1}{b^2}\Delta A_0^{(2)} + 2\frac{1}{b^2}\frac{\dot{b}}{b} A_{k,k}^{(1)} +$$
$$+ \frac{3}{b^2} b\dot{b}\dot{A}_0^{(0)} - 3\frac{\dot{b}^2}{b^2} A_0^{(0)} = 4\pi j_0. \tag{35}$$

Здесь под лапласианом Δ понимается сумма вторых производных по координатам x, y, z, используемым в (1), т. е.

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{36}$$

Из (35) в нулевом порядке малости получаем:

$$\frac{1}{b^2}\Delta A_0^{(0)} = -4\pi j_0. \tag{37}$$

Согласно (29), для положительного заряда Ze

$$j_0 = -\frac{Ze}{\sqrt{-g}}\delta(\mathbf{r}) = -\frac{Ze}{b^3}\delta(x)\delta(y)\delta(z) \tag{38}$$

и уравнение (37) имеет вид:

$$\frac{1}{b^2}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial A_0^{(0)}}{\partial r}\right) = 4\pi\frac{Ze}{b^3}\delta(r). \tag{39}$$

Решением (39) является

$$A_0^{(0)} = -\frac{Ze}{br}. \tag{40}$$

В таком виде выражение для $A_0^{(0)}$ переходит в обычное выражение для потенциала при записи в локально плоском пространстве Минковского $\left(A^0 = -\dfrac{Ze}{r}\right)$.

Далее в уравнении (32) полагаем $\alpha = k,\ \ j_k = 0$. Это уравнение записываем в первом порядке малости, используя формулы (1), (21)–(23) для метрики, символов Кристоффеля и тензора Риччи. Получаем:

$$\Delta A_k^{(1)} = 2b\dot{b}A_{0,k}^{(0)}. \tag{41}$$

Подстановка в (41) выражения (40) для $A_0^{(0)}$ дает:

$$\Delta A_k^{(1)} = 2\dot{b}\frac{Zex_k}{r^3}. \tag{42}$$

Из (42) следует, что

$$A_k^{(1)} = -Ze\dot{b}\frac{x_k}{r}. \tag{43}$$

Продолжая решение уравнения (35), во втором порядке малости:

$$3\frac{\ddot{b}}{b} A_0^{(0)} + \ddot{A}_0^{(0)} - \frac{1}{b^2}\Delta A_0^{(2)} + 2\frac{1}{b^2}\frac{\dot{b}}{b} A_{k,k}^{(1)} +$$
$$+ \frac{3}{b^2} b\dot{b}\dot{A}_0^{(0)} - 3\frac{\dot{b}^2}{b^2} A_0^{(0)} = 0. \tag{44}$$

Подставляя выражение для $A_{k,k}^{(1)}$ из (43), получаем

$$\Delta A_0^{(2)} = -2\frac{Ze}{r}\ddot{b}. \tag{45}$$

Отсюда следует, что

$$A_0^{(2)} = -Ze\ddot{b}r. \tag{46}$$

Итак, окончательные выражения для компонент 4-вектор-потенциала имеют вид:

$$A_0 = -\frac{Ze}{br} - Ze\ddot{b}r + \ldots, \tag{47}$$

$$A_k = -Ze\dot{b}\frac{x_k}{r} + \ldots . \tag{48}$$

Выражения (47), (48) удовлетворяют условию калибровки (25), что указывает на самосогласованность используемого метода нахождения решений уравнения Максвелла.

Для решений (47), (48) в каждом порядке малости выполняется закон сохранения электрического заряда.

Формулы (47), (48) подтверждают предположения о расстановке порядков малости, принятые в начале рассмотрения. Как видим, в пространственно-плоской модели Фридмана задача о точечном заряде не может быть решена в принципе без учета компонент A_k. В этом отношении задача в модели Фридмана качественно отличается от аналогичной задачи в плоском пространстве-времени.

Потенциальная энергия U, которая входит в гамильтониан для электрона в водородоподобном атоме, имеет, как следует из (47), (48), следующий вид:

$$U = -\frac{Ze^2}{br} - \ddot{b}Ze^2 r. \tag{49}$$

В гамильтониан также входит взаимодействие с компонентами электромагнитного поля A_k.

Оценим величину параметра малости, использованного в разложениях.

По определению $\dot{b} = Hb$. По порядку величины $\ddot{b} \sim H^2 b$, где H − постоянная Хаббла. В настоящее время $H_0 = 2{,}4 \cdot 10^{-18}\,\frac{1}{c}$.

Потенциальную энергию (49) можно записать в виде

$$U \approx -\frac{Ze^2}{br} + \frac{H^2}{c^2} Ze^2 br. \tag{50}$$

В выражении (50) c − скорость света; выше по тексту использовалась система единиц $\hbar = c = 1$. Для атомных расстояний $r \approx 10^{-8}$ см отношение второго слагаемого к первому в (50) равно:

$$\frac{\left(2{,}4 \cdot 10^{-18}\right)^2}{\left(3 \cdot 10^{10}\right)^2} b^2 \left(10^{-8}\right)^2 << 1. \tag{51}$$

Как видно из левой части (51), параметром малости применительно к атомным системам является отношение атомных размеров $a \approx 10^{-8}$ см к «размеру» Вселенной $\frac{c}{H_0} \approx 10^{28}$ см.

3. Связанные атомные системы и силы взаимодействия элементарных частиц в пространственно-плоской модели Фридмана

3.1. Водородоподобный атом в расширяющейся Вселенной

Рассмотрим движение электрона в кулоновском поле ядра с зарядом Ze в условиях пространственно-плоской модели Фридмана. Используя гамильтониан (20) и выражение (47) для скалярного потенциала A_0 с ведущим первым слагаемым, уравнение Дирака можно записать в виде:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left(c\boldsymbol{\alpha}\frac{\mathbf{p}}{b(t)} + \beta mc^2 - \frac{Ze^2}{b(t)r} - \frac{Ze\dot{b}}{b(t)r}\vec{\alpha}\vec{r}\right)\psi. \tag{52}$$

В уравнении (52) использована метрика с сигнатурой $\eta_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}\left[1, -1, -1, -1\right]$ с четырехмерными матрицами в представлении Дирака−Паули $\left(\alpha^k = \gamma^{\underline{0}}\gamma^{\underline{k}},\ \beta = -i\gamma^{\underline{0}}\right)$; $p^i = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x^i}$.

Зависимость $b(t)$ в уравнении (52) подразумевает, что характеристики атомных систем могут изменяться в космологическом масштабе времени. В главном порядке теории возмущений в каждый космологический момент времени можно решать задачу о нахождении волновых функций и спектра энергии в квазистационарном приближении. В этом приближении величина $b(t)$ является константой и метрика (1) координатным преобразованием сводится к метрике пространства Минковского. Легко убедиться, что уровни энергии для уравнения Дирака (52) не зависят от величины $b(t)$ и совпадают со стандартным решением.

$$E_n = mc^2\left[1 + \left((Z\alpha)\Big/\left(n - \left(j + \frac{1}{2}\right) + \left(\sqrt{\left(j+\frac{1}{2}\right)^2 - Z^2\alpha^2}\right)\right)\right)^2\right]^{-1/2}. \tag{53}$$

Здесь $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$ − постоянная тонкой структуры; n, j − квантовые числа.

Естественно, аналогичный вывод следует и для уровней энергии нерелятивистского уравнения Шредингера.

Полученные в квазистационарном приближении решения уравнения (52) обладают следующими особенностями. Энергетический спектр (53) инвариантен относительно одинакового изменения координатных значений импульса $\mathbf{p}$ и координатной потенциальной энергии $U = -\frac{Ze^2}{r}$. Решение (53) одинаково как при предельно малых, так и при предельно больших значениях $p^i_{phys} = \frac{p^i}{b(t)}$, $U_{phys} = -\frac{Ze^2}{b(t)r}$. Потенциалы ионизации остаются одинаковыми во всем интервале изменений $b(t)$ (для атома водорода I = 13,6 эВ). Конечно, при очень малых значениях p^i_{phys} и U_{phys} атомные состояния будут разрушаться из-за квантовых флуктуаций в соответствии с соотношениями неопределенности Гейзенберга.

Таким образом, структура атомных уровней не изменяется по ходу разлета Вселенной.

Это означает, что полученные результаты подтверждают стандартную интерпретацию механизма красного смещения как смещения, связанного лишь с ростом длины волны фотонов по мере распространения во Вселенной.

Отметим также, что в квазистационарном приближении пренебрежимо мал эффект расщепления спектральных линий из-за влияния гравитационного поля.

3.2. *Силы взаимодействия элементарных частиц в расширяющейся Вселенной*

Первоначально рассмотрим электромагнитное взаимодействие.

Скалярный потенциал (47) состоит из двух членов: кулоновского потенциала $\frac{Ze}{br}$ и потенциала $\frac{Ze\ddot{b}r}{c^2}$. Второй член пренебрежимо мал как на малых, так и на разумно больших расстояниях.

Кулоновский потенциал и статическое электрическое поле, определяемое первым слагаемым (47), изменяются с космологическим временем $\sim \frac{1}{b(t)}$ и $\sim \frac{1}{b^2(t)}$ соответственно. В удаленном прошлом они были чрезвычайно велики, в далеком будущем они станут бесконечно малыми.

Статические магнитные поля согласно гамильтониану (20) также изменяются $\sim \frac{1}{b^2(t)}$:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{b^2(t)}\left(\nabla \times \mathbf{A}\right). \tag{54}$$

Обратимся теперь к сильным взаимодействиям и, в частности, к феноменологическому потенциалу *QCD*, измененному по аналогии с электромагнитными потенциалами для использования в пространственно-плоской расширяющейся Вселенной $(r \to b(t)r)$:

$$V = Kb(t)r, \tag{55}$$

где K − силовая константа сильных взаимодействий.

Из (55) видно, что в ранней Вселенной с $b(t) << 1$ (если в настоящее время $b(t_0) = 1$) потенциал V мал и практически не связывает кварки и глюоны. С ростом $b(t)$ возникает все более сильная кварк-глюонная связь. Можно говорить, что расширение Вселенной усиливает конфайнмент кварков внутри адронов и мезонов.

Что касается гравитационного потенциала, то по аналогии с электромагнитным взаимодействием можно предполагать, что ньютоновский потенциал тела с массой M имеет вид

$$U_{gr.}^{(0)} = \frac{GM}{b(t)r}, \tag{56}$$

где G − гравитационная постоянная.

Для будущих исследований представляет интерес − просматривается ли аналогия с электромагнитным взаимодействием в части существования дополнительных слагаемых отталкивающего типа в выражении (56), пропорциональных степеням расстояния $(b(t)r)^n$. В случае существования таких членов и в зависимости от своей величины они могли бы влиять на характер расширения Вселенной.

Заключение

В данной работе получили развитие результаты работы [1] в части вида гамильтониана для частиц с полуцелым спином в произвольном гравитационном и электромагнитном полях. Обобщенный гамильтониан в η-представлении дается формулой (19).

В разделе 2 получены решения уравнений Максвелла в пространственно-плоской модели Фридмана. Решения имеют вид (47), (48). Из них следует, что в пространственно-плоской модели Фридмана задача о точечном заряде не может быть решена в принципе без учета компонент A_k. В этом отношении задача в модели Фридмана качественно отличается от аналогичной задачи в плоском пространстве-времени.

В разделе 3 проведен анализ атомных систем и электромагнитных сил взаимодействия в условиях пространственно-плоского расширения Вселенной. Показано (и это является центральным результатом данной работы), что система атомных уровней не меняется с космологическим временем. И, наоборот, силы взаимодействия изменяются по мере расширения Вселенной.

Таким образом, спектральные линии атомов в пространственно-плоской расширяющейся Вселенной идентичны в разные моменты космологического времени. Это утверждение, доказанное в данной работе, является строгим результатом, который подтверждает представления стандартной космологической модели о механизме красного смещения атомных спектров.

Авторы благодарят профессоров Б. П. Косякова и P. Fiziev за обсуждение результатов данной работы.

Список литературы

1. Gorbatenko M. V., Neznamov V. P. Uniqueness and Self-Conjugacy of Dirac Hamiltonians in Arbitrary Gravitational Fields. arXiv: 1102.4067 [gr-qc], [hep-th].

2. Горбунов Д. С., Рубаков В. А. Введение в теорию ранней Вселенной. Теория горячего Большого взрыва. М.: Изд-во ЛКИ, 2008.

3. Peskin M. E., Schroeder D.V. Introduction to Quantum Field Theory (Addison – Wesley Publishing Company, 1995) (Русский перевод: М. Пескин, Д. Шредер. Введение в квантовую теорию поля, РХД, Москва, Ижевск, 2001).

4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М.: Наука, 1988 [L. D. Landau and E. M. Lifshitz. The Classical Theory of Fields. Pergamon Press, Oxford, 1975].

Статья поступила в редакцию 19.04.2011