УДК 539.17

ИНВАРИАНТНОСТЬ ОБЩЕГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА НЕЙТРОНОВ В НЕКОТОРЫХ ПРОФИЛЬНЫХ СИСТЕМАХ И ВЫТЕКАЮЩИЕ ИЗ ЭТОГО СЛЕДСТВИЯ

Н. Б. Бабичев, П. С. Бондарев, И. В. Лутиков, В. П. Незнамов

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Выявлен класс профильных систем, для которых общее линейное кинетическое уравнение обладает свойством инвариантности по отношению к преобразованиям подобия. На этой основе получены точные соотношения между различными физическими величинами, от которых зависят процессы нейтронной кинетики.

Ключевые слова: Уравнение переноса, преобразования подобия, инварианты, соотношения подобия.

Введение

В работе [1] с помощью свойства инвариантности односкоростного кинетического уравнения относительно преобразований подобия решена задача на главные собственные значения λ. В [1] получена следующая, справедливая в случае пространственно-однородных систем с фиксированным изотопным составом ядер, формула:

$$\lambda = \rho F(\rho R). \qquad (1)$$

Здесь R − характерный размер системы; ρ − не зависящая от координат плотность среды; $F(\rho R)$ − некоторая функция, вид которой определяется типом геометрии системы (шар, куб и прочее).

В данной работе в отличие от работы [1] не используется односкоростное приближение и исследованы системы, в которых свойства вещества зависят от координат. Далее присутствуют следующие упрощения:

− за основу принято линеаризованное уравнение Больцмана, что предполагает отсутствие нейтрон-нейтронных взаимодействий;

− так как нейтронная плотность считается очень малой по сравнению с плотностью ядер, то не учитывается изменение изотопного состава вещества со временем вследствие образования осколков при делении активных ядер и протекания реакции неупругого рассеяния;

− исследования ведутся применительно к быстрым импульсным системам, в которых при наличии делящихся материалов роль запаздывающих нейтронов незначительна;

− не учитываются гидрогазодинамические процессы, которые могут привести к изменению со временем плотности и температуры вещества.

Цели данной работы состоят в следующем:

− определение систем, для которых кинетическое уравнение обладает свойством инвариантности;

− нахождение точных связей между физическими параметрами, справедливых в случае подобных профильных систем.

1. Общее интегродифференциальное кинетическое уравнение для нейтронов

За основу примем справедливое в рамках сделанных во введении предположений нестационарное уравнение переноса нейтронов

$$\frac{\partial \psi\left(t,\vec{r},\vec{V}\right)}{\partial t} + \left(\vec{V}\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\right)\psi\left(t,\vec{r},\vec{V}\right) + \zeta\left(\vec{r},\vec{V}\right)\psi\left(t,\vec{r},\vec{V}\right) = \int d\vec{V}'\,\Gamma\left(\vec{r},\vec{V}',\vec{V}\right)\psi\left(t,\vec{r},\vec{V}'\right). \qquad (2)$$

Здесь использованы следующие обозначения: $\psi\left(t,\vec{r},\vec{V}\right)$ − функция распределения нейтронов в момент времени t в фазовом пространстве векторов $\vec{r}$ и $\vec{V}$, $\psi\left(t,\vec{r},\vec{V}\right)d\vec{r}\,d\vec{V}$ − число частиц в окрестности точки с радиус-вектором $\vec{r}$ внутри элементарного объема $d\vec{r}$, имеющих скорость $\vec{V}$ с точностью до $d\vec{V}$; $\Gamma\left(\vec{r},\vec{V}',\vec{V}\right)d\vec{V}\,dt$ − выражает вероятность того, что за время dt нейтрон скорости $\vec{V}'$ провзаимодействует с каким-либо ядром и в результате этого получится нейтрон, имеющий скорость $\vec{V}$ с точностью до $d\vec{V}$; $\zeta\left(\vec{r},\vec{V}\right)dt$ − вероятность нейтрону, обладающему скоростью $\vec{V}$, провзаимодействовать с веществом за время dt.

Возможны четыре канала взаимодействий нейтронов с ядрами: упругое (*s*) и неупругое (*in*) рассеяние, деление (*f*) активных ядер, поглощение (*c*). Им соответствуют элементарные (микроскопические) сечения $\sigma_1 = \sigma_s$, $\sigma_2 = \sigma_{in}$, $\sigma_3 = \sigma_f$, $\sigma_4 = \sigma_c$, и при этом

$$\Gamma\left(\vec{r},\vec{V}',\vec{V}\right) = \sum_{k=1}^{3} \Gamma_k\left(\vec{r},\vec{V}',\vec{V}\right), \tag{3}$$

$$\zeta\left(\vec{r},\vec{V}\right) = \sum_{k=1}^{4} \zeta_k\left(\vec{r},\vec{V}\right). \tag{4}$$

В рамках некоторых упрощений можно приближенно определить явный вид этих функций (см. монографию Б. Дэвисона [2]). Отметим, что В. Н. Климов в работе [3] нашел явный вид интеграла столкновений $\Gamma_s = \Gamma_1\left(\vec{r},\vec{V}',\vec{V}\right)$ и функции $\zeta_s = \zeta_1\left(\vec{r},\vec{V}\right)$ при использовании различных физических предположений.

Не раскрывая конкретного вида функций (3) и (4), имеем право считать их и, следовательно, уравнение переноса (2) точными. Столь же точными являются также все формулы, которые получены далее.

2. Класс профильных систем, в рамках которого нестационарное кинетическое уравнение инвариантно относительно преобразований подобия

Описывающие вероятностные процессы взаимодействия нейтронов с ядрами функции $\Gamma\left(\vec{r},\vec{V}',\vec{V}\right)$ и $\zeta\left(\vec{r},\vec{V}\right)$ зависят от плотности $\rho\left(\vec{r}\right)$ и температуры вещества $T\left(\vec{r}\right)$, а также от макроскопических сечений

$$\alpha_k\left(\vec{r}\right) = N\left(\vec{r}\right)\sum_j \mu_j\left(\vec{r}\right)\sigma_{kj}. \tag{5}$$

Здесь $\mu_j\left(\vec{r}\right)$ и σ_{kj} – соответственно концентрация по частицам ядер *j*-го сорта и элементарное сечение взаимодействия нейтрона с *j*-м ядром по каналу с номером *k*; $N\left(\vec{r}\right) = \dfrac{N_a \rho\left(\vec{r}\right)}{\sum\limits_j \mu_j\left(\vec{r}\right) A_j}$ – плотность ядер, т. е. их количество в единице объема; N_a и A_j – число Авогадро и массовое число *j*-го ядра.

Раскроем, например, структуру функций $\Gamma_s = \Gamma_1$ и $\zeta_s = \zeta_1$:

$$\Gamma_1\left(\vec{r},\vec{V}',\vec{V}\right) = N\left(\vec{r}\right)\sum_j \int d\vec{W}_j \mu_j\left(\vec{r}\right)\left|\vec{V}' - \vec{W}_j\right| \times$$
$$\times \sigma_1\left(\left|\vec{V}' - \vec{W}_j\right|\right)\eta_1\left(\vec{V}',\vec{W}_j,\vec{V}\right)\gamma\left(\vec{r},\vec{W}_j\right); \tag{6}$$

$$\zeta_1\left(\vec{r},\vec{V}\right) = \int d\vec{V}'\Gamma_1\left(\vec{r},\vec{V},\vec{V}'\right)^*; \tag{7}$$

$\vec{W}_j$ – скорость ядер *j*-го сорта; $\eta_1\left(\vec{V}',\vec{W}_j,\vec{V}\right)d\vec{V}$ – вероятность нейтрону, имевшему до столкновения с *j*-м ядром скорость $\vec{V}'$, после упругого рассеяния приобрести скорость $\vec{V}$ с точностью до $d\vec{V}$; $\gamma\left(\vec{r},\vec{W}_j\right)$ – скоростное распределение ядер *j*-го сорта в точке $\vec{r}$, нормированное равенством

$$\int d\vec{W}_j \gamma\left(\vec{r},\vec{W}_j\right) = 1. \tag{8}$$

Очевидно, что в общем случае распределения различных ядер по скоростям зависят от температуры среды $T\left(\vec{r}\right)$. Данные зависимости ярко проявляются в тех случаях, когда существенна роль тепловых нейтронов. Примером этого являются водородосодержащие системы со сравнительно большим количеством ядер водорода.

Зависимости физических величин от координат можно представить следующим образом:

$$\rho\left(\vec{r}\right) = \overline{\rho}\varphi\left(\frac{\vec{r}}{R}\right), \tag{9}$$

$$T\left(\vec{r}\right) = \overline{T} f\left(\frac{\vec{r}}{R}\right), \tag{10}$$

$$\mu_j\left(\vec{r}\right) = \overline{\mu}_j f_j\left(\frac{\vec{r}}{R}\right). \tag{11}$$

В эти формулы вошли профильные функции от безразмерного аргумента

$$\vec{x} = \frac{\vec{r}}{R}; \tag{12}$$

R – характерный размер объекта.

Величины $\overline{\rho}$, $\overline{T}$ и $\overline{\mu}_j$ – это усредненные по объему системы значения плотности, температуры и концентраций *j*-х ядер. Профильные функции отнормированы так:

$$\frac{\int d\vec{x}\varphi\left(\vec{x}\right)}{\int d\vec{x}} = \frac{\int d\vec{x} f\left(\vec{x}\right)}{\int d\vec{x}} = \frac{\int d\vec{x} f_i\left(\vec{x}\right)}{\int d\vec{x}} = 1. \tag{13}$$

Поскольку функции $\Gamma\left(\vec{r},\vec{V}',\vec{V}\right)$ и $\zeta\left(\vec{r},\vec{V}\right)$ пропорциональны плотности среды $\rho\left(\vec{r}\right)$, то, записав их в виде

$$\Gamma\left(\vec{r},\vec{V}',\vec{V}\right) = \overline{\rho}\Gamma_0\left(\vec{r},\vec{V}',\vec{V}\right), \tag{14}$$

$$\zeta\left(\vec{r},\vec{V}\right) = \overline{\rho}\zeta_0\left(\vec{r},\vec{V}\right), \tag{15}$$

вместо исходного уравнения (2), рассмотрим эквивалентное ему общее кинетическое уравнение

$$\frac{\partial\psi\left(t,\vec{r},\vec{V}\right)}{\partial t} + \left(\vec{V}\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\right)\psi\left(t,\vec{r},\vec{V}\right) + \overline{\rho}\zeta_0\left(\vec{r},\vec{V}\right)\psi\left(t,\vec{r},\vec{V}\right) =$$
$$= \overline{\rho}\int d\vec{V}'\Gamma_0\left(\vec{r},\vec{V}',\vec{V}\right)\psi\left(t,\vec{r},\vec{V}'\right). \tag{16}$$

*Отметим, что $\Gamma_1\left(\vec{r},\vec{V},\vec{V}'\right) \neq \Gamma_1\left(\vec{r},\vec{V}',\vec{V}\right)$.

Новые функции $\Gamma_0\left(\vec{r},\vec{V}',\vec{V}\right)$, $\zeta_0\left(\vec{r},\vec{V}\right)$ включают в себя $\varphi\left(\frac{\vec{r}}{R}\right)$, $T\left(\vec{r}\right)$ и $\mu_j\left(\vec{r}\right)$. При этом $\Gamma_0 \sim \varphi$, $\zeta_0 \sim \varphi$, а зависимости $T\left(\vec{r}\right)$ и $\mu_j\left(\vec{r}\right)$ в Γ_0 и ζ_0 входят сложным образом.

Уравнение (16) подвергнем преобразованиям подобия

$$t \to t' = \frac{\overline{\rho}}{\overline{\rho}'} t, \tag{17}$$

$$\vec{r} \to \vec{r}' = \frac{\overline{\rho}}{\overline{\rho}'} \vec{r}. \tag{18}$$

Из соотношения (18) следует, что

$$R' = \frac{\overline{\rho}}{\overline{\rho}'} R. \tag{19}$$

Так как $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\overline{\rho}}{\overline{\rho}'}\frac{\partial}{\partial t'}$ и $\frac{\partial}{\partial \vec{r}} = \frac{\overline{\rho}}{\overline{\rho}'}\frac{\partial}{\partial \vec{r}'}$, то для штрихованной функции распределения имеем:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi'\left(t',\vec{r}',\vec{V}\right)}{\partial t'} + \left(\vec{V}\frac{\partial}{\partial \vec{r}'}\right)\psi'\left(t',\vec{r}',\vec{V}\right) + \\ + \overline{\rho}'\zeta_0'\left(\vec{r}',\vec{V}\right)\psi'\left(t',\vec{r}',\vec{V}\right) = \\ = \overline{\rho}'\int d\vec{V}'\,\Gamma_0'\left(\vec{r}',\vec{V}',\vec{V}\right)\psi'\left(t',\vec{r}',\vec{V}'\right).\end{aligned} \tag{20}$$

Если кинетические уравнения (16) и (20) по своему виду совпадают друг с другом, то это означает, что они инвариантны относительно преобразований (17), (18).

Из формул (18), (19) вытекает равенство

$$\frac{\vec{r}'}{R'} = \frac{\vec{r}}{R}. \tag{21}$$

Преобразование (18) не приводит к изменению профильных функций, т. е.

$$\varphi'\left(\frac{\vec{r}'}{R'}\right) = \varphi\left(\frac{\vec{r}}{R}\right), \quad f'\left(\frac{\vec{r}'}{R'}\right) = f\left(\frac{\vec{r}}{R}\right), \quad f_j'\left(\frac{\vec{r}'}{R'}\right) = f_j\left(\frac{\vec{r}}{R}\right). \tag{22}$$

Преобразования подобия приводят к перенормировке средней плотности среды $\left(\overline{\rho}' \neq \overline{\rho}\right)$, но они не затрагивают средние температуры $\overline{T}$ и концентрации $\overline{\mu}_j$. Поэтому уравнение (16) инвариантно по отношению к преобразованиям подобия, если наряду с выполнением равенств (21) и (22) соблюдаются условия

$$\overline{T}' = \overline{T}, \quad \overline{\mu}_j' = \overline{\mu}_j. \tag{23}$$

Итак, можно утверждать, что общее кинетическое уравнение (2) инвариантно относительно преобразований (17), (18) в случае систем, подобных по геометрическим размерам, изотопному составу ядер и пространственному распределению температуры среды. При этом зависимости $\rho\left(\vec{r}\right)$, $T\left(\vec{r}\right)$ и $\mu_j\left(\vec{r}\right)$ могут быть произвольными.

3. Вывод аналитических соотношений

Будем рассматривать системы, в которых эволюция функции распределения подчиняется экспоненциальному закону

$$\psi\left(t,\vec{r},\vec{V}\right) = e^{\lambda t}\psi\left(\vec{r},\vec{V}\right), \tag{24}$$

где λ – не зависящий от t и $\vec{r}$ параметр.

3.1. Общие формулы для λ

После подстановки соотношения (24) в уравнение (16) получим:

$$\begin{aligned}\lambda\psi\left(\vec{r},\vec{V}\right) + \left(\vec{V}\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\right)\psi\left(\vec{r},\vec{V}\right) + \overline{\rho}\zeta_0\left(\vec{r},\vec{V}\right)\psi\left(\vec{r},\vec{V}\right) = \\ = \overline{\rho}\int d\vec{V}'\,\Gamma_0\left(\vec{r},\vec{V}',\vec{V}\right)\psi\left(\vec{r},\vec{V}'\right).\end{aligned} \tag{25}$$

Свойство инвариантности кинетического уравнения (25) требует соблюдения связи

$$\lambda' = \frac{\overline{\rho}'}{\overline{\rho}}\lambda \tag{26}$$

между параметрами λ' и λ.

Граничное условие к уравнению (25) содержит в себе характерный размер R, который при переходе к штрихованной системе изменяется, т. е. $R' \neq R$.

Инвариантом преобразования (18) является произведение средней плотности на характерный размер, т. е.

$$\mathrm{in}\nu = \overline{\rho}R. \tag{27}$$

Поэтому зависимость λ от физических параметров можно выразить общей формулой

$$\lambda = \overline{\rho}F\left(\overline{\rho}R\right). \tag{28}$$

Существуют и другие связанные между собой инварианты преобразования (18). Например,

$$\mathrm{in}\nu_1 = M\overline{\rho}^2. \tag{29}$$

Здесь $M = C\overline{\rho}R^3$ – масса объекта, C – константа, зависящая от типа его геометрии и выбора R в качестве характерного размера.

Общее решение поставленной задачи можно представить также в виде

$$\lambda = \bar{\rho} F_1\left(M\bar{\rho}^2\right). \qquad (30)$$

Так как $\bar{\rho} = \dfrac{\mathrm{in}\nu}{R}$, то формула (28) переходит в

$$\lambda = \frac{F_2\left(\bar{\rho}R\right)}{R}, \qquad (31)$$

где $F_2\left(\bar{\rho}R\right) = \bar{\rho}RF\left(\bar{\rho}R\right)$.

До тех пор пока геометрия не конкретизирована, функции $F\left(\bar{\rho}R\right)$ и $F_1\left(M\bar{\rho}^2\right)$ нельзя определить. (Их явный вид можно установить путем решения кинетического уравнения совместно с определенным граничным условием.) Тем не менее из решений (28), (30) видно, от каких физических величин и их сочетаний зависит λ.

3.2. Соотношения подобия

Рассмотрим подобные системы, для которых выполняются следующие равенства (условие подобия):

$$\bar{\rho}_1 R_1 = \bar{\rho}_2 R_2 = \bar{\rho}_3 R_3 = \ldots \qquad (32)$$

Массы подобных систем с размерами R_1 и $R_2 = \dfrac{\bar{\rho}_1}{\bar{\rho}_2} R_1$ связаны соотношением

$$M_2 = M_1\left(\frac{\bar{\rho}_1}{\bar{\rho}_2}\right)^2. \qquad (33)$$

Поэтому вместо формулы (26) можно записать

$$\lambda_2 = \sqrt{\frac{M_1}{M_2}}\lambda_1, \qquad (34)$$

$$\lambda_2 = \frac{R_1}{R_2}\lambda_1. \qquad (35)$$

Для таких систем

$$\psi_2\left(\vec{r},\vec{V}\right) = B\psi_1\left(\frac{R_2}{R_1}\vec{r},\vec{V}\right), \qquad (36)$$

где B − константа, связанная с нормировкой этих двух функций.

Заключение

Показано, при соблюдении каких условий общее уравнение переноса нейтронов в профильных системах обладает свойством инвариантности относительно преобразований подобия. С помощью данного свойства получены формулы для параметра λ, от которого зависит скорость изменения со временем полного количества нейтронов в системе.

Представлены соотношения подобия (связи между величинами λ и функциями распределения нейтронов в подобных системах).

Найденные точные аналитические соотношения между физическими величинами дают возможность проведения верификации многогрупповых 1D, 2D и 3D математических методик численного решения кинетического уравнения для нейтронов.

Список литературы

1. Бабичев Н. Б., Лутиков И. В., Незнамов В. П. Теория подобия в рамках односкоростной нейтронной кинетики квазистационарных систем // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2008. Вып. 1. С. 56−64.

2. Дэвисон Б. Теория переноса нейтронов. М.: Изд-во Главного управления по использованию атомной энергии при Совете Министров СССР, 1960.

3. Климов В. Н. Кинетическое уравнение для примесей // Теория вероятностей и ее применения. Т. 2. Вып. 2. 1957.

Статья поступила в редакцию 10.05.2011