УДК 539.17

РЕШЕНИЕ ОДНОСКОРОСТНОЙ ЗАДАЧИ ПО НЕЙТРОННОЙ КИНЕТИКЕ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ И СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ, СПРАВЕДЛИВОЕ В КЛАССЕ ОДНОРОДНЫХ ОДНОСВЯЗНЫХ ОБЪЕКТОВ С НЕВОГНУТЫМИ ВНЕШНИМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

Н. Б. Бабичев, И. В. Лутиков

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Решена задача на собственные значения и собственные функции. Выявлен характер зависимостей собственных значений от ядерно-физических свойств вещества. Обсуждается физический смысл некоторых уравнений переноса нейтронов в однородных системах.

Ключевые слова: Уравнение переноса, преобразования подобия, инварианты, собственные значения.

Введение

Будем исходить из односкоростного кинетического уравнения (см., например, [1]) относительно функции распределения нейтронов $\psi\left(t,\vec{r},\vec{\Omega}\right)$ в момент времени t в фазовом пространстве векторов $\vec{r}$, $\vec{\Omega}$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial\psi\left(t,\vec{r},\vec{\Omega}\right)}{\partial t}+\left(\vec{\Omega}\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\right)\psi\left(t,\vec{r},\vec{\Omega}\right)+$$
$$+\alpha\,\psi\left(t,\vec{r},\vec{\Omega}\right)=\frac{\beta}{4\pi}\int d\vec{\Omega}'\psi\left(t,\vec{r},\vec{\Omega}'\right), \qquad (1)$$

в котором параметры $\alpha = n_a\left(\sigma_s+\sigma_f+\sigma_c\right)$ и $\beta = h\alpha$ постоянны.

Введены следующие обозначения: $n_a = \dfrac{N_A}{A}\rho$ − не зависящая от времени t и от $\vec{r}$ (радиус-вектор, проведенный из начала координат в точку наблюдения) плотность ядер вещества; $h=\dfrac{\nu\sigma_f+\sigma_s}{\sigma_s+\sigma_f+\sigma_c}$ − активность вещества; σ_s, σ_f и σ_c – элементарные сечения рассеяния, деления и захвата; ν – среднее число нейтронов, испускаемых в одном акте деления ядра; N_A – число Авогадро; ρ − плотность среды; A − массовое число ядра.

Начальным и граничным условиями являются

$$\psi\left(t=0,\vec{r},\vec{\Omega}\right)=\psi_{00}\left(\vec{r},\vec{\Omega}\right), \qquad (2)$$

$$\psi\big|_S = 0 \text{ при } \left(\vec{\Omega}\,\vec{N}_S\right)<0. \qquad (3)$$

Условие (3) означает отсутствие нейтронов, летящих в систему из вакуума через ее внешнюю поверхность S.

Здесь $\vec{\Omega}=\dfrac{\vec{V}}{V}$ и $\vec{N}_S$ − это соответственно единичные векторы, направленные вдоль скорости $\vec{V}$ движения нейтрона и по внешней нормали к S в сторону пустоты.

Граничное условие (3) означает отсутствие обмена нейтронами между частями системы через вакуумные области, в которых справедливо уравнение (1) при значениях $\alpha = 0$ и $\beta = 0$. Поэтому рассматриваемые здесь объекты произвольной геометрической формы ограничены классом односвязных систем со всюду невогнутыми внешними поверхностями S.

Характерные размеры R таких систем могут быть выбраны произвольным образом. От выбора характерного размера системы зависят константы C_1 и C_2 в формулах, по которым определяются объем и площадь поверхности тела $V_T = C_1 R^3$ и $S_T = C_2 R^2$.

Известно, что в случае конечных по размерам систем кинетическое уравнение (1) обладает дискретным набором собственных значений (СЗ) $\lambda=\lambda_0>\lambda_1>\lambda_2>...$ и соответствующими собственными функциями (СФ). Общим решением является суперпозиция

$$\psi\left(t,\vec{r},\vec{\Omega}\right)=\sum_{m=0}^{\infty}a_m\,e^{\lambda_m t}\,\psi_m\left(\vec{r},\vec{\Omega}\right). \qquad (4)$$

Величины λ_0 и $\psi_0\left(\vec{r},\vec{\Omega}\right)$ далее будем называть главными собственными значениями (ГСЗ) и собственными функциями (ГСФ).

Цели данной работы состоят в решении задачи на СЗ и СФ, а также в изучении некоторых новых кинетических уравнений. При этом основной интерес для нас представляют ГСЗ $\lambda = \lambda_0$ и ГСФ $\psi\left(\vec{r},\vec{\Omega}\right) = \psi_0\left(\vec{r},\vec{\Omega}\right)$.

Отметим, что за достаточно большое характерное время $t_0 >> \dfrac{1}{|\lambda|}$ решение (4) выходит на простой экспоненциальный закон

$$\psi\left(t,\vec{r},\vec{\Omega}\right) = e^{\lambda t}\psi\left(\vec{r},\vec{\Omega}\right). \tag{5}$$

После подстановки соотношения (5) в уравнение (1) имеем:

$$\left(\vec{\Omega}\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\right)\psi\left(\vec{r},\vec{\Omega}\right) + \left(\alpha + \frac{\lambda}{V}\right)\psi\left(\vec{r},\vec{\Omega}\right) = \frac{\beta}{4\pi}\int d\vec{\Omega}'\psi\left(\vec{r},\vec{\Omega}'\right). \tag{6}$$

1. Один из способов решения поставленной задачи на собственные значения и собственные функции

1.1. Вывод основных формул

В кинетическом уравнении (1) перейдем к безразмерным переменным

$$\tau = \beta V t, \tag{7}$$

$$\vec{z} = \beta\vec{r}. \tag{8}$$

В результате этого получим уравнение переноса для функции распределения нейтронов $\psi\left(\tau,\vec{z},\vec{\Omega}\right)$ в фазовом пространстве векторов $\vec{z}$, $\vec{\Omega}$

$$\left[\frac{\partial}{\partial\tau} + \left(\vec{\Omega}\frac{\partial}{\partial\vec{z}}\right)\right]\psi\left(\tau,\vec{z},\vec{\Omega}\right) + \frac{1}{h}\psi\left(\tau,\vec{z},\vec{\Omega}\right) = \frac{1}{4\pi}\int d\vec{\Omega}'\psi\left(\tau,\vec{z},\vec{\Omega}'\right) \tag{9}$$

с начальным и граничным (на поверхности Σ тела в $\vec{z}$-пространстве) условиями

$$\psi\left(\tau = 0,\vec{z},\vec{\Omega}\right) = \psi_{00}\left(\vec{z},\vec{\Omega}\right), \tag{10}$$

$$\psi\big|_\Sigma = 0, \text{ если } \left(\vec{\Omega}\vec{N}_\Sigma\right) < 0. \tag{11}$$

Следуя работе [2], решение уравнения (9) будем искать в виде

$$\psi\left(\tau,\vec{z},\vec{\Omega}\right) = f\left(\tau,\vec{z},\vec{\Omega}\right)\exp\left(-\frac{\tau}{h}\right). \tag{12}$$

Очевидно, что новая функция распределения подчиняется кинетическому уравнению

$$\left[\frac{\partial}{\partial\tau} + \left(\vec{\Omega}\frac{\partial}{\partial\vec{z}}\right)\right]f\left(\tau,\vec{z},\vec{\Omega}\right) = \frac{1}{4\pi}\int d\vec{\Omega}'f\left(\tau,\vec{z},\vec{\Omega}'\right). \tag{13}$$

Уравнение (13) надо решать при условиях

$$f\left(\tau = 0,\vec{z},\vec{\Omega}\right) = f_{00}\left(\vec{z},\vec{\Omega}\right), \tag{14}$$

$$f\big|_\Sigma = 0, \text{ если } \left(\vec{\Omega}\vec{N}_\Sigma\right) < 0. \tag{15}$$

В общем решении

$$f\left(\tau,\vec{z},\vec{\Omega}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m e^{\Lambda_m\tau} f_m\left(\vec{z},\vec{\Omega}\right), \tag{16}$$

наибольшая среди СЗ величина $\Lambda = \Lambda_0$ и $f\left(\vec{z},\vec{\Omega}\right) = f_0\left(\vec{z},\vec{\Omega}\right)$ являются главными собственными значениями и собственными функциями уравнения (13).

Безразмерное уравнение (13) не содержит в себе параметров, которые зависят от ядерно-физических свойств среды. Решение (16) уравнения (13) определяется типом геометрии системы и ее характерным размером в $\vec{z}$-пространстве $Z = \beta R$ (R − характерный размер тела в $\vec{r}$-пространстве). Можно утверждать, что зависимость решения (16) уравнения (13) от $Z = \beta R$, а значит и от свойств среды через параметр β, вносится граничным условием (15). Таким образом, общее решение задачи на СЗ имеет следующий вид:

$$\Lambda_m = \Lambda_m\left(Z\right) = \Lambda_m\left(\beta R\right), \tag{17}$$

из которого видно, что от параметров β и R СЗ зависят только, как от произведения βR. СФ $f_m\left(\vec{z},\vec{\Omega}\right)$ от $Z = \beta R$ зависят параметрически. Решение задачи на ГСЗ и ГСФ имеет общий следующий вид:

$$f\left(\tau,\vec{z},\vec{\Omega}\right) = e^{\Lambda\tau}f\left(\vec{z},\vec{\Omega}\right). \tag{18}$$

Здесь $\Lambda = \Lambda_0$ это наибольшая среди Λ_m величина, т. е. ГСЗ.

Найдем теперь ГСЗ λ. Учитывая формулы (5), (12) и (18), имеем:

$$\psi\left(\vec{r},\vec{\Omega}\right)e^{\lambda t} = C\, f\left[\vec{z}\left(\vec{r}\right),\, \vec{\Omega}\right]\exp\left[\left(\Lambda - \frac{1}{h}\right)\tau(t)\right]. \tag{19}$$

Здесь C − некоторая размерная константа, которую можно определить, зная нормировки функций $\psi\left(\vec{r},\vec{\Omega}\right)$ и $f\left(\vec{z},\vec{\Omega}\right)$.

Приравняв показатели экспонент в левой и правой частях равенства (19), получим искомое решение

$$\lambda = \beta V\left[\Lambda\left(\beta R\right) - \frac{1}{h}\right] = \alpha V\left[h\Lambda\left(\beta R\right) - 1\right]. \tag{20}$$

Очевидно, что для СЗ и СФ с произвольным номером m вместо соотношения (19) получается

$$\psi_m\left(\vec{r},\vec{\Omega}\right)e^{\lambda_m t}=C_m f_m\left(\beta\vec{r},\vec{\Omega}\right)\exp\left[\left(\Lambda_m-\frac{1}{h}\right)\beta V t\right]. \quad (21)$$

Поэтому для произвольных СЗ λ_m справедлива общая формула

$$\lambda_m=\beta V\left[\Lambda_m\left(\beta R\right)-\frac{1}{h}\right]. \quad (22)$$

Здесь $\Lambda_m=\Lambda_m\left(\beta R\right)$ − функция, явный вид которой определяется геометрией системы.

1.2. Замечание по поводу соотношений подобия

В работе [3] на основе справедливого в $\vec{r}$-пространстве кинетического уравнения (6) разработана теория подобия. В [3] показано, что в случае фиксированного типа геометрии однородного объекта (шар, куб и т. д.) при соблюдении условия подобия любых двух систем

$$\beta''R''=\beta'R' \quad (23)$$

соответствующие ГСЗ λ'' и λ' выражаются друг через друга точными аналитическими соотношениями. Одним из таких соотношений, например, является следующее:

$$\lambda''=\alpha''V\left[\frac{h''}{h'}\left(1+\frac{\lambda'}{\alpha'V}\right)-1\right]. \quad (24)$$

Рассмотренный выше переход от уравнения (1) к кинетическому уравнению (13) в безразмерных переменных τ и $\vec{z}$ интересен тем, что все подобные в $\vec{r}$-пространстве системы превратились в одну систему с размером $Z=\beta R$. Для ГСЗ и ГСФ в случае подобных систем получаем $\Lambda''=\Lambda'$ и $f''\left(\vec{z},\vec{\Omega}\right)=f'\left(\vec{z},\vec{\Omega}\right)$. Выразив Λ через λ по формуле (20)

$$\Lambda=\frac{1}{h}\left(\frac{\lambda}{\alpha V}+1\right), \quad (25)$$

сразу же приходим к соотношению (24).

1.3. Физический смысл некоторых кинетических уравнений

Нестационарные уравнения переноса (1), (9) для функций распределения в $\vec{r}$- и $\vec{z}$-пространствах, а также вытекающие из них, при справедливости формулы (5), уравнения (6) и

$$\left(\vec{\Omega}\frac{\partial}{\partial\vec{z}}\right)\psi\left(\vec{z},\vec{\Omega}\right)+\frac{1}{h}\left(1+\frac{\lambda}{\alpha V}\right)\psi\left(\vec{z},\vec{\Omega}\right)= =\frac{1}{4\pi}\int d\vec{\Omega}'\psi\left(\vec{z},\vec{\Omega}'\right) \quad (26)$$

имеют обычный физический смысл.

Кинетическое уравнение (13) для функции

$$f\left(\tau,\vec{z},\vec{\Omega}\right)=\psi\left(\tau,\vec{z},\vec{\Omega}\right)\exp\left(\frac{\tau}{h}\right), \quad (27)$$

вообще говоря, представляется абстрактным, поскольку в его левой части отсутствуют слагаемые, ответственные за уменьшение количества нейтронов в точке $\vec{z}$ вследствие их взаимодействия с веществом. Как отмечалось выше, уравнение (13) не содержит никаких физических характеристик среды, но функция $f\left(\tau,\vec{z},\vec{\Omega}\right)$ от них зависит по той причине, что граничное условие включает в себя характерный размер системы $Z=\beta R$.

При стремлении параметра h к бесконечности уравнение (9) вырождается и переходит в уравнение переноса (13). Очевидно, что при этом $f\left(\tau,\vec{z},\vec{\Omega}\right)= =\psi\left(\tau,\vec{z},\vec{\Omega}\right)$. Таким образом, уравнение (13) это вырожденное кинетическое уравнение.

Здесь уместно отметить работу Пайерлса [4], в которой на основе вырожденного интегрального уравнения переноса

$$n\left(\vec{r}\right)=\frac{\beta}{4\pi}\int\frac{d\vec{r}'n\left(\vec{r}'\right)}{\left|\vec{r}'-\vec{r}\right|^2}, \quad (28)$$

где $n(\vec{r})=\int d\vec{\Omega}'\psi\left(\vec{r},\vec{\Omega}'\right)$ − нейтронная плотность, была решена стационарная задача об отыскании критического радиуса R_* однородного шара с бесконечной мультипликацией (активность $h\to\infty$). В работе [4] получено: $R_*\left(h\to\infty\right)=\frac{c_0}{\beta}=\frac{c_0}{h\alpha}$, $c_0=\frac{2}{1{,}57}=1{,}27738\ldots$, величина β конечна, $\alpha\to 0$.

Критические параметры произвольных по геометрии активных систем с $h\to\infty$ можно определить путем решения уравнения переноса (13), положив в нем $\frac{\partial f\left(\tau,\vec{z},\vec{\Omega}\right)}{\partial\tau}=0$ (критическое условие стационарности системы).

Если выполняется равенство (18), то из кинетического уравнения (13) получаем

$$\vec{\Omega}\frac{\partial f\left(\vec{z},\vec{\Omega}\right)}{\partial\vec{z}}+\Lambda f\left(\vec{z},\vec{\Omega}\right)=\frac{1}{4\pi}\int d\vec{\Omega}'f\left(\vec{z},\vec{\Omega}'\right). \quad (29)$$

В случае критических систем с $h\to\infty$ ГСЗ $\Lambda\to 0$ и уравнение (29) вырождается, принимая следующий вид:

$$\vec{\Omega}\frac{\partial f\left(\vec{z},\vec{\Omega}\right)}{\partial\vec{z}}=\frac{1}{4\pi}\int d\vec{\Omega}'f\left(\vec{z},\vec{\Omega}'\right). \quad (30)$$

Вырожденные кинетические уравнения типа (30) и их решения достаточно подробно изучены в работе [5].

Там же рассмотрен, в частности, тот случай вырождения, когда $\lambda = -\alpha V$ и, согласно формуле (25), $\Lambda = 0$. В [5] показано, что при этом $\lambda = -\frac{c_0 V}{hR}$, где R − характерный размер объекта, c_0 − константа, определяемая типом геометрии вырожденной системы. В этой же работе получено также полное решение данной задачи на примере шара (определена постоянная c_0 и найдена функция распределения нейтронов). Кроме того, в [5] определены приближенные аналитические решения, описывающие нейтронную кинетику шара, находящегося в состояниях неполного сильного вырождения.

Здесь отметим еще один случай справедливости уравнения (30), когда характерный размер однородной системы с постоянной массой стремится к бесконечности. При этом $\Lambda \to 0$, $\alpha \to 0$, $\lambda \to 0$ и $\frac{\lambda}{\alpha V} \to 0$, что соответствует неизменности числа нейтронов в пустом пространстве.

2. Решение задачи на собственные значения с использованием свойства инвариантности кинетического уравнения

В предыдущем разделе задача на СФ и СЗ была решена методом сведения исходного уравнения переноса (1) к вырожденному кинетическому уравнению (13), которое не включает в себя зависящих от ядерно-физических свойств вещества величин. При таком подходе удалось получить общие аналитические формулы для СЗ, из которых видно, от каких физических величин и каким образом они зависят. Вывод аналогичных формул, но другим способом (путем анализа уравнения типа (29)) был проведен в работе [6]. В этом разделе задача на СЗ и СФ решается на основе свойства инвариантности кинетического уравнения для вспомогательной функции $f\left(t,\vec{r},\vec{\Omega}\right)$ относительно преобразований подобия.

Переходя в уравнении (13) от безразмерных переменных τ и $\vec{z}$ к обычным (t и $\vec{r}$), имеем

$$\left[\frac{1}{V}\frac{\partial}{\partial t} + \left(\vec{\Omega}\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\right)\right] f\left(t,\vec{r},\vec{\Omega}\right) = \frac{\beta}{4\pi}\int d\vec{\Omega}' f\left(t,\vec{r},\vec{\Omega}'\right). \quad (31)$$

Данное уравнение подвергнем преобразованиям подобия

$$t \to t' = \frac{\beta}{\beta'} t, \quad (32)$$

$$\vec{r} \to \vec{r}' = \frac{\beta}{\beta'} \vec{r}. \quad (33)$$

Учитывая, что $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'}\frac{dt'}{dt} = \frac{\beta}{\beta'}\frac{\partial}{\partial t'}$ и $\frac{\partial}{\partial \vec{r}} = \frac{\beta}{\beta'}\frac{\partial}{\partial \vec{r}'}$, для штрихованной функции $f'\left(t',\vec{r}',\vec{\Omega}\right)$ получаем кинетическое уравнение

$$\left[\frac{1}{V}\frac{\partial}{\partial t'} + \left(\vec{\Omega}\frac{\partial}{\partial \vec{r}'}\right)\right] f'\left(t',\vec{r}',\vec{\Omega}\right) = \frac{\beta'}{4\pi}\int d\vec{\Omega}' f\left(t',\vec{r}',\vec{\Omega}'\right). \quad (34)$$

По своему виду уравнения (31) и (34) абсолютно одинаковы.

Граничное условие

$$f\big|_S = 0, \text{ если скалярное произведение } \left(\vec{\Omega}\vec{N}\right) < 0 \quad (35)$$

содержит в себе характерный размер объекта, который подчиняется частному преобразованию подобия

$$R \to R' = \frac{\beta}{\beta'} R. \quad (36)$$

Очевидно, что произведение β на R является инвариантной величиной, т. е.

$$\mathrm{in}\nu = \beta R. \quad (37)$$

Общее решение

$$f\left(t,\vec{r},\vec{\Omega}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m e^{\varepsilon_m t} f_m\left(\vec{r},\vec{\Omega}\right) \quad (38)$$

должно зависеть от инварианта (37). Возможно построение различных инвариантов (например, $\mathrm{in}\nu_1 = M^{\frac{1}{3}}\beta^{\frac{2}{3}}$, M − масса тела). Существенно, что все эти инварианты выражаются друг через друга. Поэтому для определенности и простоты здесь мы выберем инвариант (37). В таком случае можно считать, что СЗ зависят от произведения βR:

$$\varepsilon_m = \varepsilon_m\left(\beta R\right), \quad (39)$$

которые определяются типом геометрии системы. СФ зависят от произведения βR параметрическим образом.

Теперь, вспомнив про соотношение (12), запишем следующую связь между функциями $\psi\left(t,\vec{r},\vec{\Omega}\right)$ и $f\left(t,\vec{r},\vec{\Omega}\right)$, подчиняющимися соответственно уравнениям (1) и (31):

$$\psi\left(t,\vec{r},\vec{\Omega}\right) = f\left(t,\vec{r},\vec{\Omega}\right) e^{-\frac{\beta V t}{h}}. \quad (40)$$

После подстановки рядов (4) и (38) в формулу (40) и последующего приравнивания показателей соответствующих экспонент находим искомую связь между СЗ, т. е.

$$\lambda_m = \beta V\left[\frac{\varepsilon_m\left(\beta R\right)}{\beta V} - \frac{1}{h}\right]. \quad (41)$$

Формулы (41) и (22) совпали с точностью до обозначений. Чтобы привести их к одинаковому виду, произвольную функцию $\varepsilon_m\left(\beta R\right)$ заменим так:

$$\Lambda_m(\beta R) = \frac{\varepsilon_m(\beta R)}{\beta V}. \qquad (42)$$

После такой замены формулы (22) и (41) стали одинаковыми.

Естественно, что при этом полученное здесь решение задачи на ГСЗ $\lambda = \lambda_0$ и $\Lambda = \Lambda_0$ совпало с решением (20).

Заключение

Решена задача на собственные значения и собственные функции и показано, что разные способы ее решения приводят к одинаковым результатам.

Следует отметить, что полученное ранее в работе [2] решение на ГСЗ

$$\lambda = \rho F(\rho R), \qquad (43)$$

где ρ − плотность среды, на основе инвариантности уравнения переноса (6) по отношению к преобразованию

$$\vec{r} \to \vec{r}' = \frac{\rho}{\rho'}\vec{r} \qquad (44)$$

существенно менее информативно, чем найденное здесь решение (20), и в отличие от (20) справедливо лишь в узком классе систем с фиксированным изотопным составом вещества.

Список литературы

1. Дэвисон Б. Теория переноса нейтронов. М.: Изд-во Главного управления по использованию атомной энергии при Совете Министров СССР, 1960.

2. Бабичев Н. Б., Лутиков И. В., Севастьянов А. А. Элементы теории подобия нестационарных однородных систем в односкоростной нейтронной кинетике // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2008. Вып. 2. С. 18−20.

3. Бабичев Н. Б., Лутиков И. В., Незнамов В. П. Теория подобия в рамках односкоростной нейтронной кинетики квазистационарных систем // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2008. Вып. 1. С. 56−64.

4. Peierls R. Critical conditions in neutron multiplication // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1939. Vol. 35. P. 4. P. 610−615.

5. Бабичев Н. Б., Лутиков И. В., Незнамов В. П. Некоторые решения вырожденного и близкого к вырожденному уравнений переноса нейтронов // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2009. Вып. 1. С. 3−10.

6. Бабичев Н. Б., Беженцев Б. В., Бондарев П. С., Забусов П. В. Собственные значения односкоростного уравнения переноса нейтронов в однородных системах // ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2009. Вып. 3. С. 68−70.

Статья поступила в редакцию 10.05.2011