УДК 539.17

РЕШЕНИЕ ОБЩЕЙ ЗАДАЧИ МИЛНА С ДВУМЯ СРЕДАМИ, ХОТЯ БЫ ОДНА ИЗ КОТОРЫХ РАЗМНОЖАЕТ НЕЙТРОНЫ

П. С. Бондарев

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 607188, г. Саров Нижегородской обл.

Получено точное аналитическое решение задачи о пространственном распределении нейтронов в надкритической активной системе из двух полубесконечных сред, которые соприкасаются на плоской границе раздела.

Ключевые слова: Задача Милна, функция распределения, кинетическое уравнение, активная среда.

Введение

Общая задача Милна заключена в определении нейтронного поля в двух полубесконечных пространствах, однородно заполненных разными веществами, которые соприкасаются на плоской границе раздела. Стационарный вариант этой задачи рассмотрен достаточно подробно (см., например, [1, 2]). Но в случае, когда хотя бы одна полубесконечная среда размножает нейтроны, стационарные решения [1, 2] не имеют физического смысла. Размножающая среда представляет собой надкритическую систему, для описания нейтронной кинетики в которой требуется решить нестационарное кинетическое уравнение.

В данной статье найдено новое справедливое в любой точке пространства физическое решение задачи Милна для надкритической системы из двух сред. Подробная постановка этой задачи сформулирована в работе [3], в которой найдено соответствующее аналитическое решение в удаленной от границы раздела сред асимптотической области. Для полноты изложения материала ниже приведена часть результатов работы [3].

1. Переход от нестационарной задачи к стационарной

Будем решать задачу о распределении плотности частиц в бесконечном пространстве, заполненном двумя разными по своим свойствам однородными средами, которые разделены плоской границей (см. рис. 1).

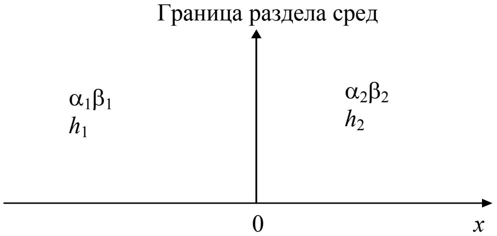

Рис. 1. Схема плоской геометрии двухобластной задачи Милна

Запишем односкоростное кинетическое уравнение для каждого вещества

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{V}\frac{\partial\psi_1(t,x,\mu)}{\partial t}+\mu\frac{\partial\psi_1(t,x,\mu)}{\partial x}+\\
&\quad+\alpha_1\psi_1(t,x,\mu)=\frac{\beta_1}{2}n_1(t,x);\\
&\frac{1}{V}\frac{\partial\psi_2(t,x,\mu)}{\partial t}+\mu\frac{\partial\psi_2(t,x,\mu)}{\partial x}+\\
&\quad+\alpha_2\psi_2(t,x,\mu)=\frac{\beta_2}{2}n_2(t,x),
\end{aligned}\tag{1}$$

где $\psi_1(t,x,\mu)$ и $\psi_2(t,x,\mu)$ – функции распределения для веществ с параметрами α_1, β_1 и α_2, β_2 соответственно; $n_1(t,x)$ и $n_2(t,x)$ – нейтронные плотности, $n_i(t,x)=\int\limits_{-1}^{1}\psi_i(t,x,\mu)d\mu,\ i=1,2.$ Граничное условие имеет вид

$$\psi_1(0,\mu)=\psi_2(0,\mu).\tag{2}$$

Если хотя бы одна из двух рассматриваемых полубесконечных сред размножает нейтроны, то независимо от начального условия функция распределения системы выйдет на экспоненциальный (равновесный) закон

$$\begin{aligned}
&\psi_1(t,x,\mu)\sim e^{\lambda t}\psi_1(x,\mu);\\
&\psi_2(t,x,\mu)\sim e^{\lambda t}\psi_2(x,\mu),
\end{aligned}\tag{3}$$

где $\lambda=\max\{\lambda_1,\lambda_2\}$ – постоянная размножения нейтронов в системе.

Для определенности предположим, что $\lambda_1>\lambda_2$. Тогда

$$\lambda=\lambda_1=(\beta_1-\alpha_1)V=(h_1-1)\alpha_1V.\tag{4}$$

Подставляя выражения (3) в систему (1), переходим от нестационарной задачи к стационарной с другими параметрами веществ

$$\mu\frac{\partial\psi_1(x,\mu)}{\partial x}+\left(\alpha_1+\frac{\lambda}{V}\right)\psi_1(x,\mu)=\frac{\beta_1}{2}n_1(x);$$
$$\mu\frac{\partial\psi_2(x,\mu)}{\partial x}+\left(\alpha_2+\frac{\lambda}{V}\right)\psi_2(x,\mu)=\frac{\beta_2}{2}n_2(x). \tag{5}$$

В первом уравнении системы (5) сделаем замену

$$x=\frac{z_1}{\alpha_1+\frac{\lambda}{V}}=\frac{z_1}{\beta_1}, \tag{6}$$

во втором –

$$x=\frac{z_2}{\alpha_2+\frac{\lambda}{V}}=\frac{z_2}{\alpha_2-\alpha_1+\beta_1} \tag{7}$$

и получаем новую систему

$$\mu\frac{\partial\psi_1(z_1,\mu)}{\partial z_1}+\psi_1(z_1,\mu)=\frac{H_1}{2}n_1(z_1),$$
$$\mu\frac{\partial\psi_2(z_2,\mu)}{\partial z_2}+\psi_2(z_2,\mu)=\frac{H_2}{2}n_2(z_2), \tag{8}$$

где

$$H_1=1;$$
$$H_2=\frac{\beta_2}{\alpha_2-\alpha_1+\beta_1}. \tag{9}$$

В уравнениях системы (8) z_1 и z_2 – новые безразмерные переменные, которые в дальнейшем будем обозначать просто z.

При любых параметрах α_1, β_1, α_2, β_2 значение H_2 всегда меньше единицы при условии, что хотя бы одна из двух сред активна ($\lambda > 0$).

Таким образом, нестационарная задача двух сред свелась к стационарной задаче с параметрами*

$$\alpha_1'=\alpha_2'=1;$$
$$H_1=1;$$
$$H_2=H_2(h_1,\alpha_1,h_2,\alpha_2)<1$$

и постоянным потоком нейтронов на бесконечности в среде 1 (иначе не будет стационарного режима).

2. Решение стационарной задачи Милна для двух поглощающих сред

2.1. Лаплас-образ функции плотности частиц

Будем решать систему уравнений (8) с параметрами

$$H_1=h_1<1,$$
$$H_2=h_2<1.$$

*Так как z – безразмерная переменная, то новые параметры α_1' и α_2' тоже безразмерны и равны единице.

Для удобства вычислений предположим, что функции $n_1(z)$ и $n_2(z)$ определены в полупространстве $z > 0$.

Пусть $\psi_+(\mu)$ – угловое распределение частиц, падающих из среды 1 в среду 2; $\psi_-(|\mu|)$ – угловое распределение частиц, выходящих из среды 2 и попадающих в среду 1, т. е.

$$\psi_1(0,\mu)=\begin{cases}\psi_-(\mu)\ \text{при}\ \mu>0;\\ \psi_+(\mu)\ \text{при}\ \mu<0;\end{cases}$$
$$\psi_2(0,\mu)=\begin{cases}\psi_+(\mu)\ \text{при}\ \mu>0;\\ \psi_-(\mu)\ \text{при}\ \mu<0.\end{cases} \tag{10}$$

Определим лаплас-образы функции распределения ψ (μ, z) и плотности частиц $n(z)$, как обычно, следующим образом:

$$\Phi(s,\mu)=\int_0^\infty\psi(z,\mu)e^{-sz}dz;$$
$$\Phi_0(s)=\int_{-1}^1\Phi(s,\mu)d\mu=\int_0^\infty n(z)e^{-sz}dz. \tag{11}$$

Из системы (8) с учетом (10) получаем

$$\Phi_{01}(s)=\frac{\int_{-1}^1\frac{\mu\psi_1(0,\mu)}{1+\mu s}d\mu}{1-\frac{h_1}{s}\operatorname{arth}s}=\frac{\int_0^1\frac{\mu\psi_-(\mu)}{1+\mu s}d\mu-\int_0^1\frac{\mu\psi_+(\mu)}{1-\mu s}d\mu}{1-\frac{h_1}{s}\operatorname{arth}s};$$
$$\Phi_{02}(s)=\frac{\int_{-1}^1\frac{\mu\psi_2(0,\mu)}{1+\mu s}d\mu}{1-\frac{h_2}{s}\operatorname{arth}s}=\frac{\int_0^1\frac{\mu\psi_+(\mu)}{1+\mu s}d\mu-\int_0^1\frac{\mu\psi_-(\mu)}{1-\mu s}d\mu}{1-\frac{h_2}{s}\operatorname{arth}s}. \tag{12}$$

Пусть поток нейтронов направлен из среды 1 в среду 2. Тогда плотность частиц в среде 2 при $z\to\infty$ стремится к нулю, а в среде 1 при $z\to-\infty$ экспоненциально возрастает (см., например, [1]).

Выражения для $\psi_+(\mu)$ и $\psi_-(\mu)$ находятся из системы интегральных альбедных уравнений (см. [1−3]) и имеют вид

$$\psi_+(\mu)=\frac{h_2}{2}\frac{1}{1-k_2\mu}\frac{\varphi_1(\mu)}{\varphi_2(\mu)};$$
$$\psi_-(\mu)=\frac{h_1}{2}\frac{1-k_2\mu}{1-k_1^2\mu^2}\frac{\varphi_2(\mu)}{\varphi_1(\mu)}, \tag{13}$$

где функции $\varphi_1(\mu)$ и $\varphi_2(\mu)$ удовлетворяют равенству

$$\int_0^1\frac{y\varphi_i(y)}{y+\mu}dy=\frac{h_i}{2\varphi(\mu)\left(1-k_i^2\mu^2\right)},\ i=1,2 \tag{14}$$

с соответствующими параметрами h_i и k_i (i = 1,2); $k_i=k_i(h_i)$ – решение трансцендентного уравнения $h_i\frac{\operatorname{arth}(k_i)}{k_i}=1$.

Введем новые функции $\tau_1(s)$, $\tau_2(s)$, $\tau_{1-}(s)$ и $\tau_{2-}(s)$ следующим образом:

$$\tau_i(s) = \frac{s^2-1}{s^2-k_i^2}\left(1-\frac{h_i}{s}\operatorname{arth} s\right), \quad i=1,2; \qquad (15)$$

$$\tau_{i-}(s) = \frac{1}{\left(1+s\right)\int\limits_0^1 \frac{\mu\varphi_i(\mu)}{1-\mu s}d\mu}, \quad i=1,2. \qquad (16)$$

Значения функции $\tau_-(s)$ в точках $s > 0$ можно найти с помощью интеграла:

$$\ln\tau_-(s) = \frac{s}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln\left[\frac{\sin^2 x + k^2\cos^2 x}{1-hx\operatorname{ctg} x}\right]}{\sin^2 x + s^2\cos^2 x}dx, \, s>0. \qquad (17)$$

Для случая $s < 0$ нужно воспользоваться соотношением

$$\tau_-(s)\tau_-(-s) = \frac{1}{\tau(s)}. \qquad (18)$$

Подставляем (13) в (12) и после интегрирования получаем явный вид функций $\Phi_{01}(s)$ и $\Phi_{02}(s)$:

$$\Phi_{01}(s) = \frac{s+k_2}{s^2-k_1^2}\frac{\tau_{1-}(s)}{\tau_{2-}(s)}; \qquad (19)$$

$$\Phi_{02}(s) = \frac{1}{s+k_2}\frac{\tau_{2-}(s)}{\tau_{1-}(s)}. \qquad (20)$$

2.2. Обратное преобразование Лапласа

Ранее предполагалось, что функции $n_1(z)$ и $n_2(z)$ определены в полупространстве $z > 0$, поэтому обратное преобразование Лапласа для каждой из них будет иметь вид

$$n_i(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\Phi_{0i}(s)e^{sz}ds, \, i=1,2. \qquad (21)$$

В формуле (21) интегрирование проводится по линии, проходящей правее полюсов функции $\Phi_{0i}(s)$.

Найдем сначала $n_1(z)$. Перепишем выражение (19), используя (15) и (18), в виде

$$\Phi_{01}(s) = g_1(s)\frac{L_2(s)}{L_1(s)}, \qquad (22)$$

где

$$g_1(s) = \frac{1}{s-k_2}\frac{\tau_{2-}(-s)}{\tau_{1-}(-s)}; \qquad (23)$$

$$L_i(s) = 1-h_i\frac{\operatorname{arth} s}{s} = 1-\frac{h_i}{2s}\ln\frac{1+s}{1-s}, \quad i=1,2. \qquad (24)$$

Из (24) видно, что точки $s = \pm 1$ являются точками ветвления функций $L_1(s)$ и $L_2(s)$.

Рассмотрим интеграл от функции $\Phi_{01}(s)e^{sz}$ по контуру, приведенному на рис. 2.

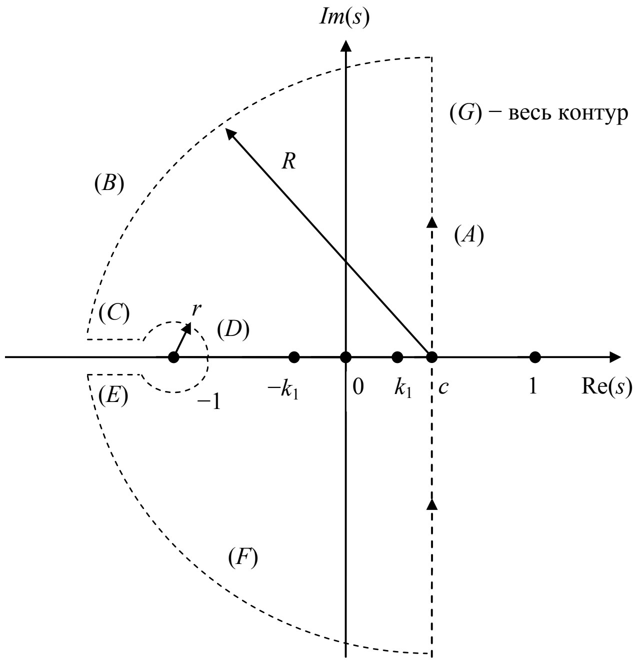

Рис. 2. Контур интегрирования для функции $\Phi_{01}(s)e^{sz}$

Внутри контура (G) находятся два полюса первого порядка $s = \pm k_1$ функции $\Phi_{01}(s)$, поэтому

$$\int\limits_{(G)}\Phi_{01}(s)e^{sz}ds = \left[\int\limits_{(A)}+\int\limits_{(B)}+\int\limits_{(C)}+\int\limits_{(D)}+\int\limits_{(E)}+\int\limits_{(F)}\right]\Phi_{01}(s)e^{sz}ds =$$

$$= 2\pi i\sum_{\pm k_1}\operatorname{Res}\left[\Phi_{01}(s)e^{sz}\right]. \qquad (25)$$

При $R\to\infty$, $r\to 0$ замечаем, что

$$\int\limits_{(A)}\Phi_{01}(s)e^{sz}ds = \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\Phi_{01}(s)e^{sz}ds = 2\pi i n_1(z),$$

$$\int\limits_{(D)}\Phi_{01}(s)e^{sz}ds = 0,$$

$$\left[\int\limits_{(B)}+\int\limits_{(F)}\right]\Phi_{01}(s)e^{sz}ds = 0.$$

С помощью формулы (19) находим вычеты

$$\operatorname*{Res}_{-k_1}\left[\Phi_{01}(s)e^{sz}\right] = C_{1+}e^{-k_1 z};$$

$$\operatorname*{Res}_{k_1}\left[\Phi_{01}(s)e^{sz}\right] = C_{1-}e^{k_1 z},$$

$$C_{1+} = \frac{k_1-k_2}{2k_1}\frac{\tau_{2-}(k_1)\tau_2(k_1)}{\tau_{1-}(k_1)\tau_1(k_1)}, \qquad (26)$$

$$C_{1-} = \frac{k_1+k_2}{2k_1}\frac{\tau_{1-}(k_1)}{\tau_{2-}(k_1)}. \qquad (27)$$

С учетом вышесказанного плотность частиц $n_1(z)$ будет иметь вид

$$n_1(z) = C_{1+}e^{-k_1 z} + C_{1-}e^{k_1 z} + \chi_1(z), \qquad (28)$$

где

$$\chi_1(z) = -\frac{1}{2\pi i}\left[\int\limits_{(C)} + \int\limits_{(E)}\right]\Phi_{01}(s)e^{sz}ds. \qquad (29)$$

На разрезах (*C*) и (*E*) функции L_1 и L_2 определим следующим образом:

$$L_i^{(C)}(s) = 1 - \frac{h_i}{2s}\left[\ln|1+s| + i\pi + \ln(1-s)\right] =$$

$$= 1 - \frac{h_i}{2s}\operatorname{arcth}(s) - \frac{i\pi h_i}{2s}, \; i = 1,2; \qquad (30)$$

$$L_i^{(E)}(s) = 1 - \frac{h_i}{2s}\operatorname{arcth}(s) + \frac{i\pi h_i}{2s}, \; i = 1,2. \qquad (31)$$

Выражение (29) запишем в виде

$$\chi_1(z) = -\frac{1}{2\pi i}\left\{\int\limits_{-\infty}^{-1} ds\left[e^{sz}g_1(s)\frac{L_2^{(C)}}{L_1^{(C)}}\right] + \int\limits_{-1}^{-\infty} ds\left[e^{sz}g_1(s)\frac{L_2^{(E)}}{L_1^{(E)}}\right]\right\}. \qquad (32)$$

Подставляем (30) и (31) в (32), делаем замену $s = -t$ и после несложных преобразований получаем

$$\chi_1(z) = \frac{h_1 - h_2}{2}\int\limits_1^{\infty} g_1(-t)\frac{e^{-tz}dt}{t\left[\left(1 - \frac{h_1}{t}\operatorname{arcth} t\right)^2 + \frac{h_1^2\pi^2}{4t^2}\right]}, \qquad (33)$$

где $g_1(-t) = -\frac{1}{t + k_2}\frac{\tau_{2-}(t)}{\tau_{1-}(t)}.$

Сделаем еще одну замену $t = \frac{1}{\mu}.$

Из формул (14) и (16) следует равенство $\tau_-\left(\frac{1}{\mu}\right) = \frac{2\left(1 - k^2\mu^2\right)}{h(1+\mu)}\varphi(\mu).$ Тогда для функций $g_1\left(-\frac{1}{\mu}\right)$ и $\chi_1(s)$ будем иметь

$$g_1\left(-\frac{1}{\mu}\right) = -\frac{\mu(1 - k_2\mu)}{1 - k_1^2\mu^2}\frac{h_1}{h_2}\frac{\varphi_2(\mu)}{\varphi_1(\mu)},$$

$$\chi_1(z) = -\frac{h_1(h_1 - h_2)}{2h_2}\times$$

$$\times\int\limits_0^1 \frac{1 - k_2\mu}{1 - k_1^2\mu^2}\frac{\varphi_2(\mu)}{\varphi_1(\mu)}\frac{e^{-\frac{z}{\mu}}d\mu}{\left[(1 - h_1\mu\operatorname{arth}\mu)^2 + h_1^2\pi^2\mu^2/4\right]}.$$

Для вычисления функции $n_2(\mu)$ контур интегрирования оставим прежним (см. рис. 2). Внутри этого контура функция $\Phi_{02}(s)$ имеет один полюс первого порядка в точке $s = -k_2$.

С помощью вычислений, аналогичных проделанным выше, для нейтронной плотности n_2 получаем

$$n_2(z) = C_{2-}e^{-k_2 z} + \chi_2(z), \qquad (34)$$

где

$$C_{2-} = \frac{\tau_{1-}(k_2)\tau_1(k_2)}{\tau_{2-}(k_2)\tau_2(k_2)},$$

$$\chi_2(z) = -\frac{h_2(h_2 - h_1)}{2h_1}\times$$

$$\times\int\limits_0^1 \frac{1}{1 - k_2\mu}\frac{\varphi_1(\mu)}{\varphi_2(\mu)}\frac{e^{-\frac{z}{\mu}}d\mu}{\left[(1 - h_2\mu\operatorname{arth}\mu)^2 + h_2^2\pi^2\mu^2/4\right]}.$$

Формулы (28) и (34) получены для полупространства $z > 0$. В постановке задачи для определенности предполагалось, что среда 1 занимает полупространство $z < 0$ (см. рис. 1). В этом случае необходимо в правой части выражения (28) заменить знак у переменной *z* на противоположный.

Таким образом, решение стационарной задачи Милна для двух поглощающих сред имеет вид

$$n_1(z) = C_{1-}e^{-k_1 z} + C_{1+}e^{k_1 z} + \chi_1(z), \; z < 0; \qquad (35)$$

$$n_2(z) = C_{2-}e^{-k_2 z} + \chi_2(z), \; z > 0, \qquad (36)$$

где

$$C_{1-} = \frac{k_1 + k_2}{2k_1}\frac{\tau_{1-}(k_1)}{\tau_{2-}(k_1)}, \; C_{1+} = \frac{k_1 - k_2}{2k_1}\frac{\tau_{2-}(k_1)\tau_2(k_1)}{\tau_{1-}(k_1)\tau_1(k_1)}, \qquad (37)$$

$$C_{2-} = \frac{\tau_{1-}(k_1)\tau_1(k_2)}{\tau_{2-}(k_2)\tau_2(k_2)}, \qquad (38)$$

$$\chi_1(z) = -\frac{h_1(h_1 - h_2)}{2h_2}\times$$

$$\times\int\limits_0^1 \frac{1 - k_2\mu}{1 - k_1^2\mu^2}\frac{\varphi_2(\mu)}{\varphi_1(\mu)}\frac{e^{\frac{z}{\mu}}d\mu}{\left[(1 - h_1\mu\operatorname{arth}\mu)^2 + h_1^2\pi^2\mu^2/4\right]}, \qquad (39)$$

$$\chi_2(z) = \frac{h_2(h_1 - h_2)}{2h_1}\times$$

$$\times\int\limits_0^1 \frac{1}{1 - k_2\mu}\frac{\varphi_1(\mu)}{\varphi_2(\mu)}\frac{e^{-\frac{z}{\mu}}d\mu}{\left[(1 - h_2\mu\operatorname{arth}\mu)^2 + h_2^2\pi^2\mu^2/4\right]}, \qquad (40)$$

$$\varphi_i(\mu) = \frac{h_i(1+\mu)}{2\left(1 - k_i^2\mu^2\right)}\exp\left[\frac{\mu}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\left[\frac{\sin^2 x + k_i^2\cos^2 x}{1 - h_i x\operatorname{ctg} x}\right]}{\mu^2\sin^2 x + \cos^2 x}dx\right],$$

$$i = 1,2. \qquad (41)$$

Для вычисления коэффициентов C_{1-}, C_{1+} и C_{2-} из формулы (15) получаем

$$\tau_i\left(k_i\right)=\frac{h_i-1+k_i^2}{2k_i^2},\quad i=1,2;$$

$$\tau_i\left(k_j\right)=\frac{k_j^2-1}{k_j^2-k_i^2}\left(1-\frac{h_i}{h_j}\right),\quad i,j=1,2,\ i\neq j. \tag{42}$$

3. Решение стационарной задачи Милна для сред, одна из которых инертна, а другая поглощает нейтроны

В случае $H_1=h_1=1,\ H_2=h_2<1$ формула для нейтронной плотности во второй среде совпадает с полученной ранее зависимостью (36), только надо в (38) и (40) подставить $h_1=1,\ k_1=0$.

Чтобы найти выражение для $n_1(z)$, необходимо для (35) и (39) рассмотреть предельный случай $h_1\to 1$, $k_1\to 0$.

При $h_1=1$ функция $\Phi_{01}\left(s,h_1=1\right)=\frac{s+k_2}{s^2}\frac{\tau_{1-}(s)}{\tau_{2-}(s)}$ имеет в точке $s=0$ полюс второго порядка, тогда

$$\sum\operatorname*{Res}_{\pm k_1}\left[\Phi_{01}(s)e^{sz}\right]\xrightarrow[k_1=0]{h_1=1}\operatorname*{Res}_{0}\left[\Phi_{01}(s)e^{sz}\right]=$$

$$=\frac{k_2\tau_{1-}(0)}{\tau_{2-}(0)}\left[z+\left(\frac{1}{k_2}+\frac{\tau'_{1-}(0)}{\tau_{1-}(0)}-\frac{\tau'_{2-}(0)}{\tau_{2-}(0)}\right)\right]$$

и

$$C_{1-}e^{-k_1z}+C_{1+}e^{k_1z}\xrightarrow[k_1=0]{h_1=1}C_1\left(-z+z_0\right), \tag{43}$$

где

$$C_1=\frac{k_2\tau_{1-}(0)}{\tau_{2-}(0)}=\sqrt{3\left(1-h_2\right)},$$

$$z_0=\frac{1}{k_2}+z_{01}-z_{02}, \tag{44}$$

$$z_{0i}=1+\frac{\tau'_{i-}(0)}{\tau'_{i-}(0)},\ i=1,2. \tag{45}$$

Для функции $\chi_1(z)$ в рассматриваемом пределе получаем выражение

$$\chi_1\left(z,h_1=1\right)=-\frac{1-h_2}{2h_2}\times$$

$$\times\int_0^1\frac{\varphi_2(\mu)}{\varphi_1(\mu)}\frac{\left(1-k_2\mu\right)e^{\frac{z}{\mu}}d\mu}{\left[\left(1-h_1\mu\operatorname{arth}\mu\right)^2+h_1^2\pi^2\mu^2/4\right]}. \tag{46}$$

Введем новую функцию $\xi(\mu)$:

$$\xi(\mu)=\frac{h_2}{1-k_2\mu}\frac{\varphi_1\left(\mu,h_1=1\right)}{\varphi_2(\mu)}=$$

$$=\left(1+k_2\mu\right)\exp\left[\frac{\mu}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\left(\frac{1}{1+k_2^2\operatorname{ctg}^2x}\frac{1-h_2x\operatorname{ctg}x}{1-x\operatorname{ctg}x}\right)}{\mu^2\sin^2x+\cos^2x}dx\right]. \tag{47}$$

Полное решение стационарной задачи Милна для двух полубесконечных сред, разделенных плоской границей, одна из которых инертна, а другая поглощает нейтроны, будет иметь вид

$$n_1(z)=-z+z_0-\varepsilon_1(z),\ z<0; \tag{48}$$

$$n_2(z)=Ae^{-k_2z}+\varepsilon_2(z),\ z>0, \tag{49}$$

где

$$\varepsilon_1(z)=-\frac{\chi_1\left(z,h_1=1\right)}{\sqrt{3\left(1-h_2\right)}}=$$

$$=\frac{\sqrt{1-h_2}}{2\sqrt{3}}\int_0^1\frac{e^{\frac{z}{\mu}}}{\xi(\mu)}\frac{d\mu}{\left[\left(1-\mu\operatorname{arth}\mu\right)^2+\pi^2\mu^2/4\right]}, \tag{50}$$

$$\varepsilon_2(z)=\frac{\chi_2\left(z,h_1=1\right)}{\sqrt{3\left(1-h_2\right)}}=$$

$$=\frac{\sqrt{1-h_2}}{2\sqrt{3}}\int_0^1\frac{\xi(\mu)e^{-\frac{z}{\mu}}d\mu}{\left[\left(1-h_2\mu\operatorname{arth}\mu\right)^2+h_2^2\pi^2\mu^2/4\right]}, \tag{51}$$

$$A=\frac{C_{2-}}{\sqrt{3\left(1-h_2\right)}}=$$

$$=\sqrt{\frac{1-h_2}{3}}\frac{2\left(1-k_2^2\right)}{h_2\left(1+k_2^2\right)\left(h_2-1+k_2^2\right)}\xi\left(k_2\right). \tag{52}$$

Найдем формулы для z_{01} и z_{02}. В формуле (17) сделаем замену $t=\operatorname{tg}(x)$, тогда

$$\ln\tau_-(s)=-\frac{s}{\pi}\int_0^\infty\frac{\ln\left[\frac{t^2+1}{t^2+k^2}\left(1-h\frac{\operatorname{arctg}t}{t}\right)\right]}{t^2+s^2}dt, \tag{53}$$

$$\frac{\tau'_-(s)}{\tau_-(s)}=\left[\ln\tau_-(s)\right]'=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\ln\left[\frac{t^2+1}{t^2+k^2}\left(1-h\frac{\operatorname{arctg}t}{t}\right)\right]d\left\{\frac{t}{t^2+s^2}\right\}. \tag{54}$$

После интегрирования по частям и несложных преобразований из (54) получаем

$$\frac{\tau'_{-}(s)}{\tau_{-}(s)} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{dt}{t^2+s^2}\left\{-\frac{2t^2}{t^2+1}+\frac{3t^2+k^2}{t^2+k^2}-\frac{t^2+1-h}{\left(t^2+1\right)\left(1-ht^{-1}\operatorname{arctg} t\right)}\right\}. \qquad (55)$$

В выражении (55) делаем обратную замену $x = \operatorname{arctg} t$ и подставляем $s = 0$. Тогда

$$z_{0i} = 1+\frac{\tau'_{i-}(0)}{\tau_{i-}(0)} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{3+k^2\operatorname{ctg}^2 x}{\sin^2 x+k^2\cos^2 x}-\frac{1+\left(1-h\right)\operatorname{ctg}^2 x}{1-hx\operatorname{ctg} x}\right]dx. \qquad (56)$$

Если среда 1 инертна $(h_1 = 1,\ k_1 = 0)$, то

$$z_{01} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{3}{\sin^2 x}-\frac{1}{1-x\operatorname{ctg} x}\right]dx \approx 0,7104. \qquad (57)$$

На рис. 3 приведена зависимость z_0 (44) от параметра h.

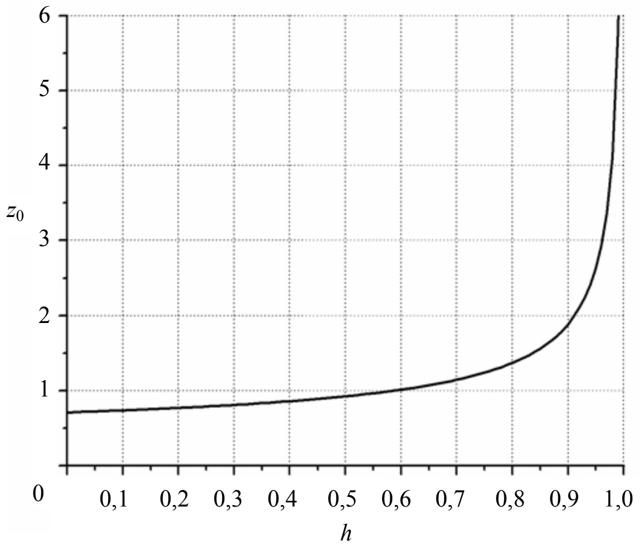

Рис. 3. Зависимость величины z_0 от параметра h

Величину z_0 назовем (см. [2]) безразмерной экстраполированной длиной, так как на расстоянии z_0 от границы раздела в менее активной среде (в нашем случае в среде 2) асимптотическая часть нейтронной плотности $n_1(z)$ (48) обращается в нуль.

Из рисунка видно, что при $h \to 0$ $z_0 \approx 0,7104$, а при $h \to 1$ значение z_0 стремится к бесконечности.

Рассмотрим подробнее эти два предельных случая:

1) $h = h_2 \to 0$.

В этом случае задача двух сред переходит в классическую однообластную задачу Милна, когда задан равномерный поток нейтронов на бесконечности, идущий через инертную $\left(h_1 = 1\right)$ среду, заполняющую половину пространства ($z < 0$) с перпендикулярной потоку граничной плоскостью, за которой следует вакуум. Для этой задачи Плачек и Зейдель [4] методом Винера−Хопфа нашли лаплас-образ нейтронной плотности, из разложения которого в ряд Лорана они сделали вывод, что асимптотическая часть плотности нейтронов линейно зависит от координаты и обращается в нуль на расстоянии $z_0 \approx 0,7104$. Затем Марк [5], пользуясь результатами работы [4], нашел явное выражение для нейтронной плотности

$$n_M\left(z\right) = 3\left\{-z+z_0-\frac{1}{4}\int_0^1\left(e^{z/\mu}\right)d\mu/\psi\left(0,-\mu\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left[\left(1-\mu\operatorname{arth}\mu\right)^2+\pi^2\mu^2/4\right]\right\}, \qquad (58)$$

где

$$\psi\left(0,\mu\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(1-\mu\right)\exp\left\{-\frac{\mu}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\left[\dfrac{\sin^2 u}{1-u\operatorname{ctg} u}\right]}{1-\left(1-\mu^2\right)\sin^2 u}du\right\}, \mu < 0. \qquad (59)$$

Формулы (58), (59) можно получить из (48) и (50), так как при $h_2 \to 0$

$$\varepsilon_1\left(z, h_2 = 0\right) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}}\int_0^1\frac{e^{\frac{z}{\mu}}}{\xi\left(\mu, h_2 = 0\right)}\frac{d\mu}{\left[\left(1-\mu\operatorname{arth}\mu\right)^2+\pi^2\mu^2/4\right]}, \qquad (60)$$

$$\xi\left(\mu, h_2 = 0\right) = \left(1+\mu\right)\exp\left[\frac{\mu}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\left(\dfrac{\sin^2 u}{1-u\operatorname{ctg} u}\right)}{\mu^2\sin^2 u+\cos^2 u}du\right]. \qquad (61)$$

Из (48), (60) и (61) следует, что с точностью до нормировочной константы функции $n_1\left(z, h_2 = 0\right)$ и $n_M(z)$ совпадают, т. е. $\dfrac{n_1\left(z, h_2 = 0\right)}{n_1\left(z = 0, h_2 = 0\right)} = \dfrac{n_M(z)}{n_M(z = 0)}$;

2) $h = h_2 \to 1$.

Получаем задачу о распределении нейтронов внутри однородной инертной среды в безразмерном z-пространстве и соответственно, см. формулу (9), однородной в x-пространстве. Поток в этом случае отсутствует и очевидно, что пространственная часть нейтронной плотности $n(z)$ будет постоянна (полное же число нейтронов в системе будет экспоненциально расти из-за временного множителя $e^{\lambda t}$). Согласно своему определению, в этом случае экстраполированная длина будет равна бесконечности

$$z_0\left(h_2 \to 1\right) \to \infty.$$

На рис. 4 приведена зависимость нейтронной плотности $n(z)$ от безразмерной координаты z для некоторых значений параметра $h_2 = H_2$.

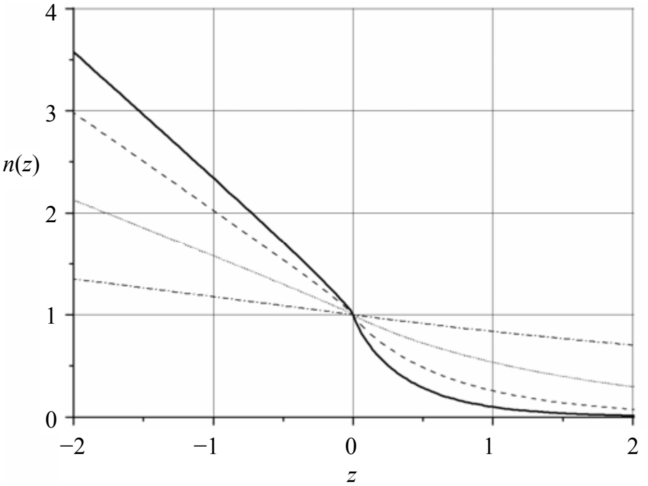

Рис. 4. График нейтронной плотности $n(z)$ для некоторых значений параметра H_2: —— $- H_2 = 0{,}5$; - - - - $- H_2 = 0{,}7$; ······· $- H_2 = 0{,}9$; -·-·-·- $- H_2 = 0{,}99$

Из рис. 4 видно, как при стремлении H_2 к единице нормированная нейтронная плотность выходит на константу.

С помощь замен, обратных сделанным ранее (6) и (7), легко получить функцию $n(x)$. Заметим, что решения, полученные в z-пространстве для какого-то фиксированного параметра H_2, подходят для бесконечного множества подобных систем, для которых

$$\frac{\beta_2}{\alpha_2 - \alpha_1 + \beta_1} = \frac{h_2}{1 + (h_1 - 1)\alpha_1 / \alpha_2} = H_2 < 1.$$

Заключение

Получено точное физическое решение нестационарного варианта двухобластной задачи Милна, в которой хотя бы одна из полубесконечных сред размножает нейтроны. В частном случае классической однообластной задачи Милна полученные формулы согласуются с известными результатами работ [4, 5].

Список литературы

1. Романов Ю. А. Точные решения односкоростного кинетического уравнения и их использование для расчета диффузионных задач (усовершенствованный диффузионный метод) // Критические параметры реакторных систем. М.: Госатомиздат, 1960. С. 3−26.

2. Дэвисон Б. Теория переноса нейтронов. М.: Изд-во Главного управления по использованию атомной энергии при Совете Министров СССР, 1960.

3. Бабичев Н. Б., Бондарев П. С. Поле нейтронов в надкритической активной системе из двух соприкасающихся полубесконечных сред // ВАНТ. Теоретическая и прикладная физика. 2009. Вып. 1. С. 17−25.

4. Placzek G., Seidel W. Milne’s Problem in Transport Theory // Phys. Rev. 1947. Vol. 72. P. 550.

5. Mark C. The Neutron Density Near a Plane Surface // Phys. Rev. 1947. Vol. 72. P. 558.

Статья поступила в редакцию 10.05.2011